

非ホロノミックシステムのフィードバック制御則の導出

A Feedback Control Design for Nonholonomic Systems

井前 讓*, ○森 孝行**, 鳥巢 諒***

Joe Imae*, ○Takayuki Mori**, Ryo Torisu***

*岩手大学工学部, **岩手大学大学院, ***岩手大学農学部

Faculty of Engineering, Iwate University

キーワード: Feedback control, Nonholonomic constraint, Nonlinear system, Two-degree-of-freedom

連絡先: 〒020 盛岡市上田4-3-5 岩手大学工学部 機械工学科
井前 讓, Tel.: 0196(21)6401, Email: jima@msv. cc. iwate-u. ac. jp

1. はじめに

非ホロノミックな拘束をうけるシステムは非線形性が強く、一般に取り扱いが困難なシステムとして知られている。特にフィードバック制御則に関しては、ドリフト項を含まない非ホロノミックシステムは滑らかな時不変制御器では制御できないというBrockettの定理¹⁾が得られており、フィードバック制御系の設計問題は解決すべき重要な問題として残されていた。

非ホロノミックシステムのフィードバック制御に関しては代表的な手法として、時変形手法^{2)~4)}および断片的解析手法^{5), 6)}が挙げられる。前者は、フィードバック機構の中に時間関数を組み込むことにより時変形フィードバック制御則を構成し、Brockettの定理から逃れようとする考え方である。比較的容易にフィードバック系が構成できるという利点はあるものの、時間関数を導入した場合の収束性の悪さが指摘されており⁷⁾、実用性の観点からは疑問視されている。なお、収束性に関しては、現在精力的に研究が進められており、最近、指数関数的収束性が得られたとの報告がある⁸⁾。後者は、不連続な機構を制御器の中に積極的に取り入れようとする考え方である。これにより前者の場合と同様にBrockettの定理から逃れることが可能となる。

この手法は指数的収束性が示されており、実用面からも有効な手法と考えられるが、不連続な機構をどのように構成するかは一般的に困難な問題であり、そのため適用範囲が限られているのが現状である。

制御工学の分野でフィードバック制御系設計において重要な地位を占めてきたものに2自由度制御系の設計手法⁹⁾がある。本報告では、構造が簡単でかつ良好な収束性が期待できる同設計手法に基づく新たなフィードバック制御則の提案を行う。非線形システムを対象とするため2自由度制御系の設計手法として文献¹⁰⁾を参考にする。構成は以下のとおりである。2章において2輪モデルの定式化を行う。3章において、2自由度制御系の設計手法に基づく新たなフィードバック則を提案し、4章において具体的な数値計算を行う。それにより提案手法の有効性を実証する。

2. 問題の定式化

制御対象としてFig. 1に示す、2輪モデルをとりあげる。

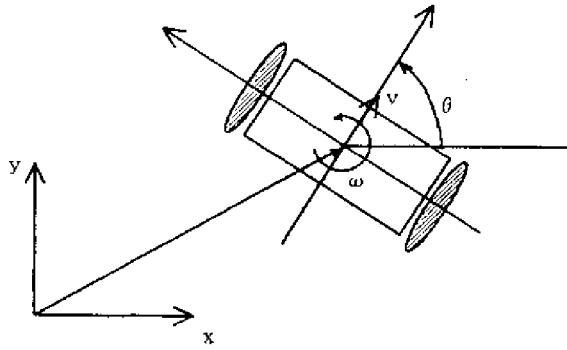


Fig. 1 Model of a cart

ここに,

x, y : 2輪モデルの中心の x, y 座標[m]

θ : x 軸を基準とした 2輪モデルの傾き[rad]

v : 2輪モデルの移動速度[m/s]

ω : θ の角速度[rad/s]

したがって、運動に関する幾何学的な関係から状態方程式として次式(2.1)を得る。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

本報告では、任意の初期状態 (x_0, y_0, θ_0) から終端状態 $(0, 0, 2n\pi)$ へ $v=0, \omega=0$ となるように移動させるためのフィードバック制御則を求める問題を取り扱う。ただし、 v, ω は不連続関数を含めるとする。ここに、 n は整数である。

3. フィードバック制御

非線形システムを対象とする2自由度制御系設計の考え方を基礎としてフィードバック制御則の導出を試みる。文献10)の基本的な考え方は、制御対象の数学的モデルを用いて設計仕様を満たす最適なフィードフォワード制御器を設計し、外乱混入の際にはある種のフィードバック制御を機能させることにより、良好な制御結果を得ようとするものである。本報告ではフィードバック制御則導出に際し、最適レギュレータ理論¹¹⁾を援用した。

[準備]

- (1) 初期状態 $(x_0^i, y_0^i, \theta_0^i)$, $i=1, \dots, m$, を適当に m 個選び、それぞれの初期状態から終端状態 $(0, 0, 2n\pi)$ へ至る軌道 (\bar{z}^i, \bar{u}^i) , $i=1, \dots, m$, および到達までの時間 T^i , $i=1, \dots, m$, を算出する。この軌道を以後基準軌道と呼ぶ。なお、 $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})^T$ とする。

- (2) 状態方程式(2.1)を基準軌道をもとに線形化し、 m 個の時変線形方程式を導出する。

$$\dot{\delta z}^i = A^i(t)\delta z^i + B^i(t)\delta u^i, \quad i=1, \dots, m \quad (3.1)$$

ここに、 $\delta z^i = z - \bar{z}^i$, $\delta u^i = u - \bar{u}^i$,

$$A^i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{v} \sin \bar{\theta} \\ 0 & 0 & \bar{v} \cos \bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^i(t) = \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta} & 0 \\ \sin \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) 制御区間 $[0, T^i]$ から適当に l 個の $t_k^i \in [0, T^i]$, $j=1, \dots, l^i$, を選ぶ。それぞれの t_k^i に対し、次式(3.2)を満たすフィードバック定数 K_j^i を決定する。

$$\operatorname{Re} \lambda(A^i(t_k^i) + B^i(t_k^i)K_j^i) < 0 \quad \text{for all } k=1, \dots, l^i \quad (3.2)$$

ここに、 $\delta u^i = K_j^i \delta z^i$ であり、 $\operatorname{Re} \lambda(\cdot)$ は (\cdot) の固有値の実部を示す。以後 $\bar{z}^i(t_k^i)$ を基準状態という。

[制御アルゴリズム]

<ステップ 1>

与えられた初期状態 (x_0, y_0, θ_0) に対し、 x, y 座標の意味で一番近いものを $\bar{z}^i(t_k^i)$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, l^i$, から捜し、それを $\bar{z}^i(t_k^i)$ とおく。

<ステップ 2>

2輪モデルを位置座標 (x_0, y_0) で回転させ、その傾きを $\bar{\theta}^i(t_k^i)$ とする。

<ステップ 3>

適当な $K_{j_g}^i$ ($l \geq j_g \geq j_s$)を選び、 $(x_0, y_0, \bar{\theta}^i(t_k^i))$ を初期状態として時変フィードバック制御

$$u = \bar{u}^i + K_{j_g}^i(z - \bar{z}^i) \quad (3.3)$$

を状態方程式(2.1)に適用する。

4. 数値計算

前章で提案された制御アルゴリズムを、半径10[m]の円内に任意に置かれた2輪モデルに適用し、本アルゴリズムの有効性を検証する。ただし、議論を見通しよくするため、 x, y 平面の第1, 2象限を対象とした。その適用に際し、いくつかの注意点を以下に示す。

準備の(1)に関して:

初期状態として、原点を中心とした半径

10[m]の円周上に $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 180^\circ$ (ただし 90° は除く)の12点を選び, 2輪モデルの傾きは, x 軸に平行とした. そのとき, 初期状態 $(x_0^i, y_0^i, \theta_0^i)$ から終端状態 $(0, 0, 2n\pi)$ へ至る基準軌道は, 次のように計算した. すなわち, 新たに状態量として v, ω の変数を加え, 式(2.1)を拡張し式(4.1)を導いた.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

状態方程式(4.1), 初期状態 $(x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, 0, 0)$ のもと, 評価関数

$J = x^2(T_f) + y^2(T_f) + \theta^2(T_f) + v^2(T_f) + \omega^2(T_f)$ を最小とする最適制御問題を解くことにより, 最適軌道 $(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{\theta}^i, \bar{v}^i, \bar{\omega}^i)^T, (\dot{\bar{v}}^i, \dot{\bar{\omega}}^i)^T$ を固定制御区間 $[0, T_f]$ のもと算出した. ここに $T_f = 10$ とした. また, \bar{z}^i, \bar{w}^i は $\bar{z}^i = (\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{\theta}^i)^T, \bar{w}^i = (\bar{v}^i, \bar{\omega}^i)^T$ により与えられる. なお, T_f を未知として計算するのが適当と考えられるが, 終端時刻未知の最適制御問題は一般的に解法困難となることが予想されるので, $T_f = 10$ と固定した. 最適制御問題の解法には文献12)のアルゴリズムを用いた.

準備の(2)に関して:

制御区間 $[0, T_f]$ を10等分し, $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_{10} = 10$ ($i = 1, \dots, 10$)とした. フィードバック定数 K_j^i は最適レギュレータ理論により求めた.

すなわち, 時不変線形方程式

$$\dot{\delta x}^i = A^i(t_j)\delta x^i + B^i(t_j)\delta u^i \quad (4.2)$$

および, 評価関数

$$J = \int_0^\infty (\delta x^T Q \delta x + \delta u^T R \delta u) dt, \quad Q = I \in R^{3 \times 3}, R = I \in R^{2 \times 2} \quad (4.3)$$

のもとRiccati方程式

$$A^i(t_j)^T P + P A^i(t_j) - P B^i(t_j) R^{-1} B^i(t_j)^T P + Q = 0 \quad (4.4)$$

を $P \in R^{3 \times 3}$ ($P = P^T > 0$)について解くことにより, 定数フィードバック係数

$$K_j^i = -R^{-1} B^i(t_j)^T P$$

を求めた. 式(3.2)を満足させるためには, $Q,$

R を微調整する必要がある.

以上の準備のもと初期状態としてA(4, 7, 0), B(8, 2, 0), C(-5, 5, 0)を設定し, 提案アルゴリズムを適用した. 基準軌道 (\bar{z}^i, \bar{w}^i) , 基準状態 $\bar{z}^i(t_j)$, 初期状態A, B, CをFig. 2に示す.

制御アルゴリズムのステップ 1に関して:

与えられた初期状態 (x_0, y_0, θ_0) に対し, その位置座標 (x_0, y_0) を中心とした正方形を作成した(Fig. 3). この正方形を徐々に大きくしていき(具体的には各辺を0.2[m]づつ増加させた), この中に最初に含まれる基準状態を選び, $\bar{z}^i(t_j^i)$ とした.

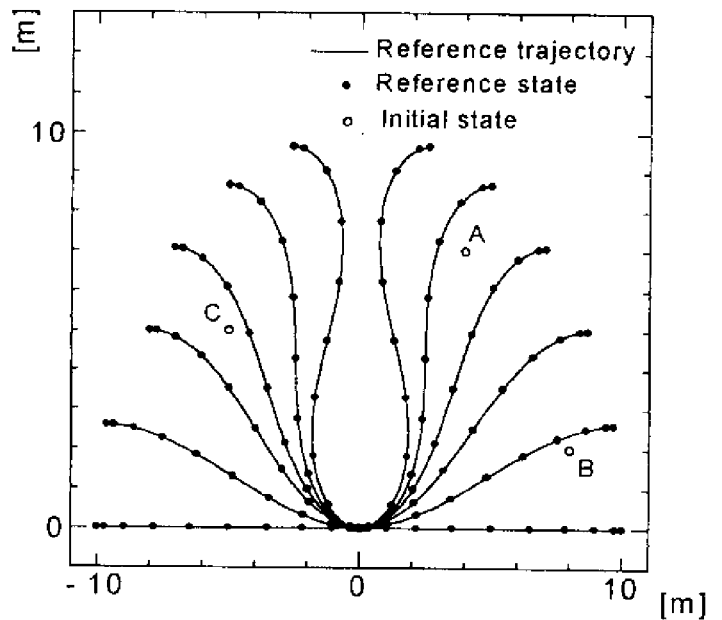


Fig. 2 Reference trajectories

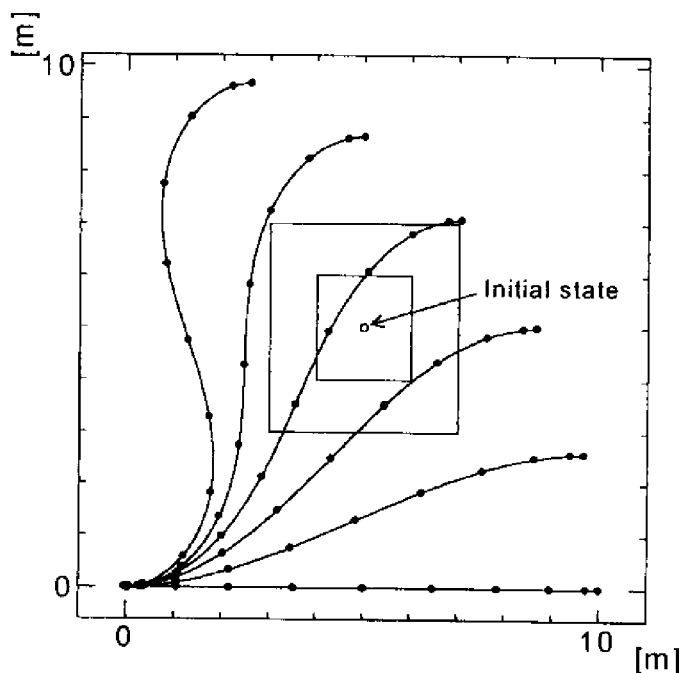


Fig. 3 Initial states and square regions

また、この正方形に基準状態が二つ以上含まれたときは、その中から初期状態との距離が x, y 座標の意味で最小となる基準状態を選び、それを $\bar{z}^i(t_j^i)$ とした。

制御アルゴリズムのステップ 2 に関して：

A, B, C 点のいずれの初期状態においても、等角速度運動により 1 秒で回転させた。

制御アルゴリズムのステップ 3 に関して：

$$j_g = \min \left\{ j \geq \frac{10 + j_x}{2}, j \in \{1, 2, \dots, 9\} \right\}$$

としてフィードバックゲイン $K_{j_g}^i$ を選んだ。

Fig. 4, 5 は A 点に関して得られた軌道の時間応答と軌道を示す。Fig. 6, 7 は B, C 点に関して得られた軌道を示す。これらにより、Fig. 4 は原点近くで $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ が零に漸近しており、Fig. 5, 6, 7 ではいずれの場合においても基準軌道に精度よく追従していることが分かる。

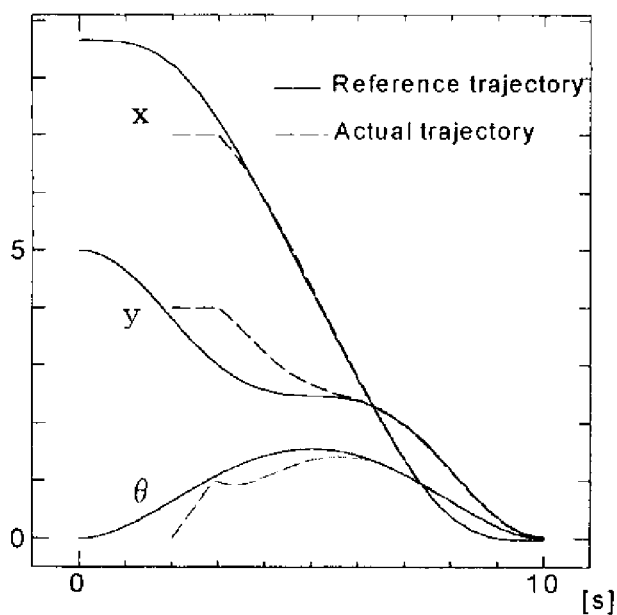


Fig. 4 Reference and actual trajectories for A versus time

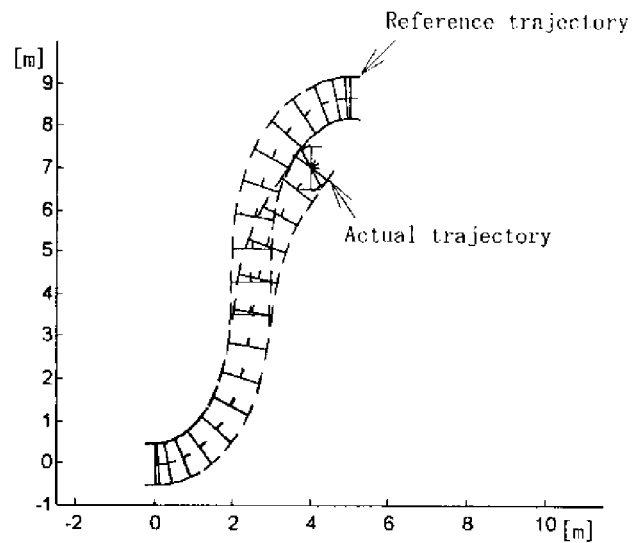


Fig. 5 Reference and actual trajectory for A(4, 7, 0)

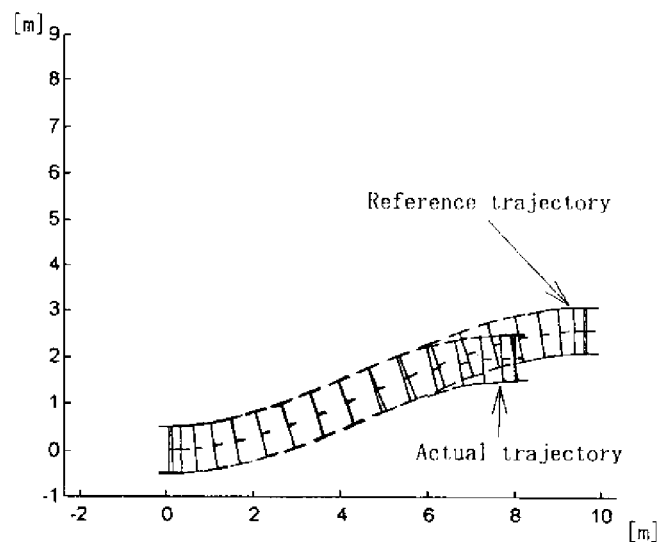


Fig. 6 Reference and actual trajectory for B(8, 2, 0)

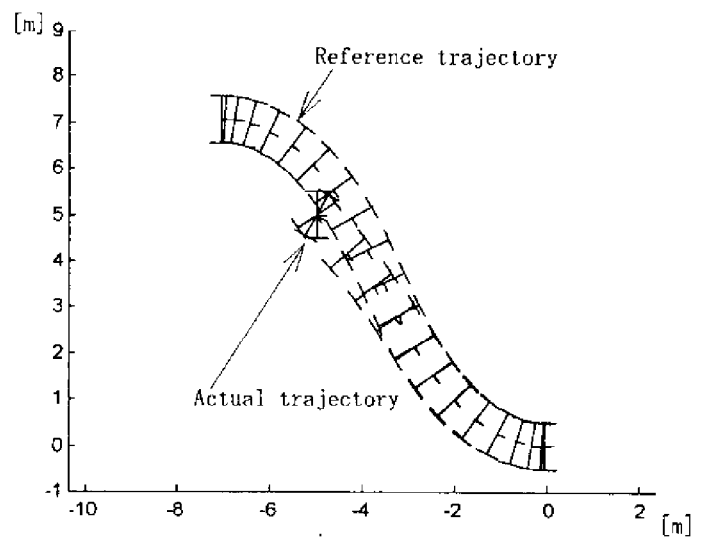


Fig. 7 Reference and actual trajectory for C(-5, 5, 0)

6. おわりに

非ホロノミックシステムに対するフィードバック制御に関し、2自由度制御系の設計手法に基づく新たな制御則を提案した。さらに、具体的な2輪モデルに対して数値計算を行い、提案手法の有効性を確認した。なお、式(3.3)において定数フィードバックゲイン K'_k を選んでいるが、その場合の収束性については今後の研究課題とする。

参考文献

- 1) R. W. Brockett: Asymptotic stability and feedback stabilization, in Differential Geometric Control Theory, Birkhanser, 181/191(1983).
- 2) C. Samson: Velocity and Torque Feedback Control of Nonholonomic Cart, in Advanced Robot Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, No. 162, 125/151(1991).
- 3) J. B. Pomet: Explicit Design of Time Varying Stabilizing Feedback Laws for a Class of Controllable Systems without Drift, System and Control Letters, Vol. 18, 139/145(1992).
- 4) G. C. Walsh and L. G. Bushnell: Stabilization of Multiple Input Chained Form Control Systems, Proc. C.D.C, 959/964(1993).
- 5) C. Canudas de Witt and O. J. Sordalen: Exponential Stabilization of Mobile Robots with Nonholonomic Constraints, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, 1791/1797(1992).
- 6) A. Astolfi: Exponential Stabilization of a car-like vehicle, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1391/1396(1995).
- 7) 中村 仁彦: 非ホロノミックロボットシステム(第3回), 日本ロボット学会, Vol. 11, No. 6, 69/76(1993).
- 8) R. T. M'Clokey and R. M. Murray: Nonholonomic Systems and Exponential Convergence: Some Analytical Tools, Proc. C. D. C, 943/948(1993).
- 9) 荒木, 2自由度制御系-I: システムと制御, Vol. 29, No. 10, 649/656(1985).
- 10) J. Imae, et al: Enhancing Optimal Controllers via techniques from robust and adaptive control, J. adapt. control signal process, Vol. 6, 413/429(1992).
- 11) 伊藤: システム制御理論, 昭晃堂(1973).
- 12) 井前, 箱守: リッカチ解の存在を保証する2次の最適制御アルゴリズム, SIC論文集, 23-4, 410/412(1987).