

二重振り子の振り上げと倒立 (第一関節が能動関節の場合)

Swinging-up and Stabilizing of a Vertical Two Links Mechanism
with a Free Second Joint

○河野 陽平、橋元 皓、島地 重幸
(岩手大学 工学部)

○Youhei Kouno, Akira Hashimoto and Shigeyuki Shimachi
(Iwate University)

キーワード: 二重振り子 (Vertical Two Links Mechanism),
振り上げ (Swinging-up), 倒立 (Stabilizing)

連絡先: 〒020 盛岡市上田4-3-5

岩手大学工学部機械工学第二専攻 河野 陽平

TEL: (0196) 21-6402

FAX: (0196) 21-6402

1. はじめに

二重振り子の倒立については、特定の軌道の繰り返しによるエネルギー増加を利用したもの¹⁾等がある。また安定化については、単振り子をはじめとして多数のものが多様な制御則のもとで扱われている。

本研究では、第一関節を駆動関節とし第二関節を自由関節とした二重振り子の静止状態から倒立静止点への振り上げと倒立点近傍での安定化について考察する。二重振り子の倒立を行うために、システムの倒立点での全エネルギーから関節角空間上での軌道特性を考慮しつつ振り上げに必要なエネルギーを予測し、その状態までトルク一定としてエネルギーを増加させた後、倒立点への軌道を与えることにより倒立を試みる。安定化ではシステムを線形化して設計したレギュレータを適用し、倒立点で静止させる。二重振り子が安定に倒立する限界の初期角度について、初期条件と特性根を変化させて行ったシミュレーションから検討した。

2. モデルと運動方程式

図1に二重振り子のモデルを示す。リンクは剛体中心軸方向に一様な線密度を持つと仮定する。第一関節はその位置が固定されトルクが加えられる。第二関節は自由関節である。

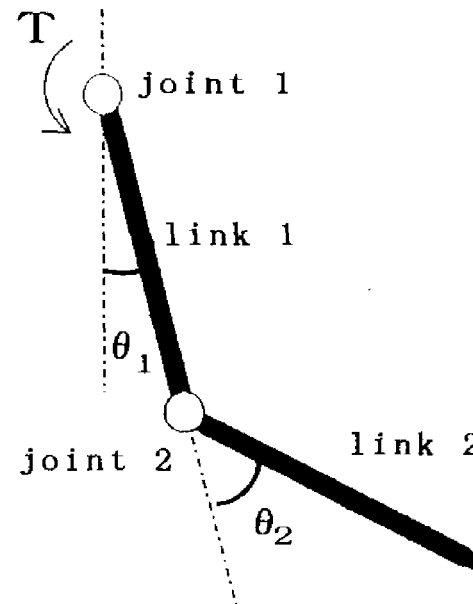


Fig. 1 二重振り子のモデル

以下で用いる主な記号を次に示す。

t : 時間[s]

θ_i : 第 i リンクの基準線からの角度[rad]

- I_i : 第 i リンクの第 i 関節軸まわりの慣性モーメント [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
 l_i : 第 i リンクの重心と第 i 関節軸との距離 [m]
 r : 第一関節と第二関節の軸間距離 [m]
 m_i : 第 i リンクの質量 [kg]
 T : 第一関節軸に加える駆動トルク [$\text{N}\cdot\text{m}$]

ラグランジュの運動方程式を用い、変数を $x_1 = \theta_1, x_2 = \theta_1 + \theta_2$ とおいて整理するとモデルの運動方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{\eta\{\eta x_3^2 \cos(x_2 - x_1) + x_4^2\} \sin(x_2 - x_1)}{\gamma_0 - \eta^2 \cos^2(x_2 - x_1)} \\
 &\quad - \frac{\delta \sin x_1 + \eta \cos(x_2 - x_1) \sin x_2 + \alpha}{\gamma_0 - \eta^2 \cos^2(x_2 - x_1)} \quad (1) \\
 \dot{x}_4 &= -\eta \cos(x_2 - x_1) x_3 - \sin x_2 \\
 &\quad - \eta x_3^2 \sin(x_2 - x_1)
 \end{aligned}$$

ただし無次元パラメータは

$$\gamma = \frac{I_1}{m_2 l_2 r} + \frac{r}{l_2}, \delta = \frac{I_2}{m_2 l_2 r}, \alpha = \frac{T}{m_2 l_2 r} \quad (2)$$

3. 二重振り子の倒立

3. 1. 関節角空間上での軌道制御

関節空間上で曲率半径 ρ の円軌道を描かせるためのトルクを求める。ある点での速度ベクトルを $v = [x_3, x_4]^T$, 加速度ベクトルを $a = [\dot{x}_3, \dot{x}_4]^T$, その方向を θ とし軌道にそって距離 S を取るものとする。軌道の法線方向の加速度ベクトルの大きさは次式となる。

$$\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \dot{x}_3 \sin \theta - \dot{x}_4 \cos \theta \quad (3)$$

$$\sin \theta = \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \cos \theta = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}$$

ただし $(\cdot)^T$ は転置を表す。また、次の関係

がある。

$$\dot{s}^2 = x_3^2 + x_4^2 \quad (4)$$

式(4)から曲率半径 ρ の軌道を与えるトルクは次式となる。

$$\alpha = \frac{\frac{x_3^2 + x_4^2}{\rho} - AB(\sin \theta - C \cos \theta) + D \cos \theta}{A(\sin \theta - C \cos \theta)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\gamma - \eta^2 \cos^2(x_2 - x_1)} \\
 B &= -\delta \sin x_1 + \eta \cos(x_2 - x_1) \sin x_2 \\
 &\quad + \eta \sin(x_2 - x_1) \{ \eta \cos(x_2 - x_1) x_3^2 + x_4^2 \} \\
 C &= -\eta \cos(x_2 - x_1) \\
 D &= -\sin x_2 - \eta \sin(x_2 - x_1) x_3^2
 \end{aligned}$$

ここで、 $\rho = \infty$ の時は直線軌道となる。また式(5)の分母がゼロとなる時、軌道の制御に必要なトルクが発散してしまう。この時の軌道の傾きは式(6)となる。円・直線軌道を描かせるときにはこれを避けるように軌道を選ぶ必要がある。

$$\frac{x_4}{x_3} = -\eta \cos(x_2 - x_1) \quad (6)$$

3. 2. 二重振り子の倒立法

以下の要領で倒立点への振り上げを行う。

- 1) システムの全エネルギーが倒立静止点でのエネルギーと等しくなるまで、トルク一定としエネルギーを増加させる。
- 2) $x_1 = x_2$ の直線軌道に近づくまでトルク零としエネルギー一定のまま移動し、接近したところで円軌道によって接続する。
- 3) 直線軌道上を倒立点まで移動させる。

エネルギーの増加はトルクを第一リンクの進行方向に与え続けることで可能である。

3) の段階で $x_1 = x_2 = \pi$ に達した時のエネルギーが先に求めた倒立静止点のエネルギーと等しければそこで静止するが、実際

には、円軌道と直線軌道を描いている部分でのエネルギーの変化がある為に、この間のエネルギー変化分の誤差が生じる。この差分を考慮してシステムのエネルギーを増加させる必要がある。

しかし、1), 2) の段階ではリンクの軌道を制御しているわけではなく、システムに与えるエネルギーによって異なる軌道を描くためエネルギーの変化量を計算することが出来ない。そこで最終的には試行錯誤的に必要なエネルギー量を調整し倒立を行う。

4. 二重振り子の安定化

4. 1. 状態方程式と出力方程式

倒立点近傍における安定化には、状態フィードバックを適用する。倒立点近傍において線形化した状態方程式は次のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r \quad (7)$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{bf}{\Delta} & -\frac{ae}{\Delta} & 0 & 0 \\ -\frac{af}{\Delta} & \frac{ce}{\Delta} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{\Delta} \\ -\frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{cases} a = m_2 l_2 r, b = l_2, \\ c = l_1 + m_2 r^2, d = m_2 l_2 g, \\ e = (m_1 l_1 + m_2 r)g \end{cases}$$

$$\Delta = bc - a^2$$

出力方程式は x_1, x_2 を出力に選べば次のようになる。

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (8)$$

4. 2. 可制御性・可観測性

システムの次数は4次、制動力は1つなので可制御性行列 \mathbf{V} は 4×4 行列となり、この \mathbf{V} の階数が4である事が可制御である事の必要十分条件になる。可制御性行列は次式となる。

$$\mathbf{V} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B}] \quad (9)$$

式(9)は次の形式で表される。

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \alpha p + \beta q \\ 0 & q & 0 & \gamma p + \delta q \\ p & 0 & \alpha p + \beta q & 0 \\ q & 0 & \gamma p + \delta q & \varepsilon p \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$p = \frac{b}{\Delta}, q = -\frac{a}{\Delta}$$

$$\alpha = \frac{bf}{\Delta}, \beta = -\frac{ae}{\Delta}, \gamma = -\frac{af}{\Delta}, \varepsilon = \frac{ce}{\Delta}$$

この行列の階数は4であることより、システムは可制御である。

システムの出力は2つ、状態変数は4つであり、可観測性行列 \mathbf{S} は 8×4 行列で次のように与えられる。

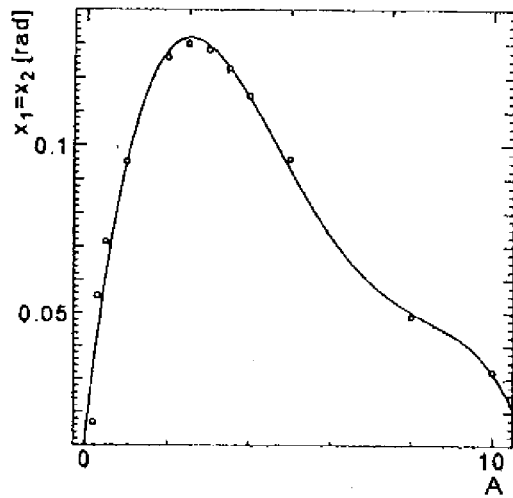
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ \alpha\beta & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (11)$$

この行列の階数は4であり、システムは可観測である。

4. 3. 安定限界について

非線形のシステムに状態フィードバックを適用した場合の収束可能な範囲をシミュレーションによって求める。

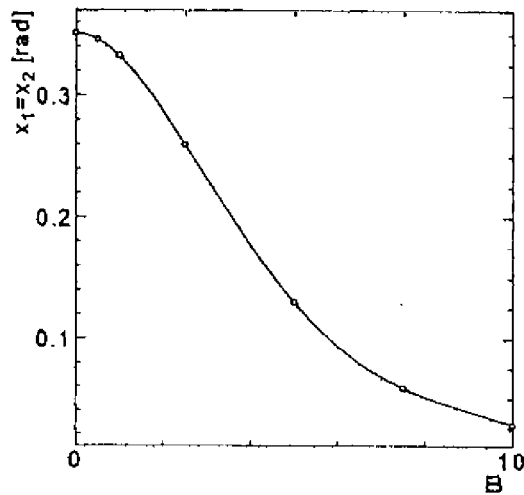
固有値の減衰項・振動項をそれぞれ変化させた時、収束する最大の初期角度 $x_1 = x_2$ を図2、図3に示す。



$$\lambda_{1,2} = -A \pm 0.5j$$

$$\lambda_{3,4} = -A \pm 0.2j$$

Fig. 2 減衰項-最大初期角度



$$\lambda_{1,2} = -2.5 \pm Bj$$

$$\lambda_{3,4} = -2.5 \pm 0.4Bj$$

Fig. 3 振動項-最大初期角度

この結果をもとに、最大の初期角度を取る時の固有値と初期角度を求めると

$$\lambda = -1.9, \quad x_1 = x_2 = 0.388 [\text{rad}] \quad (12)$$

$$(\quad = 22.23 [\text{deg}])$$

となる。シミュレーションではこの値を採用する。

5. シミュレーション結果

以上の考察をもとにシミュレーションを行った。初めにシステムに与えるエネルギー： E_0 、倒立静止点エネルギー： E_c とする。 $E_0 = E_c$ と与えた場合の結果を図4

に示す。図4では軌道は倒立点の手前で速度零となり到達していない。

システムに与えたエネルギーと倒立点におけるエネルギーとの関係を図6に示す。図6より決定した初期エネルギーを与えた場合の倒立の結果を図7-9に、安定化の結果を図10-11に示す。エネルギー増加の段階で与えるトルクを少なくした場合の結果を図12-14に示す。

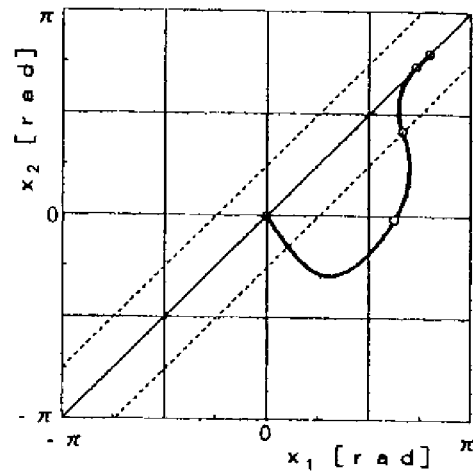


Fig. 4 シミュレーション結果1

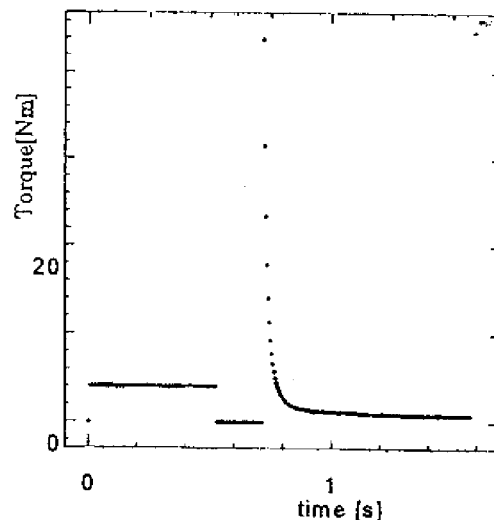


Fig. 5 トルクの変化1

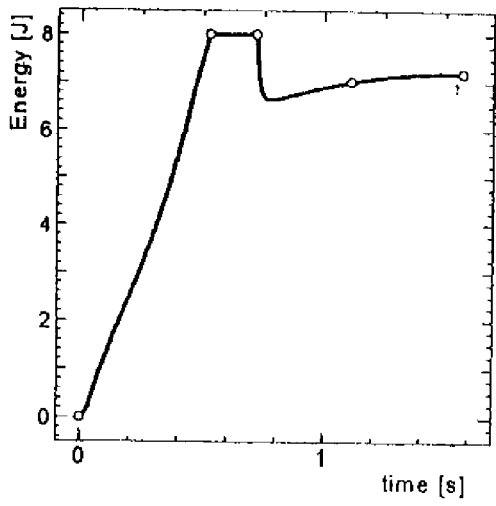


Fig. 6 エネルギーの変化 1

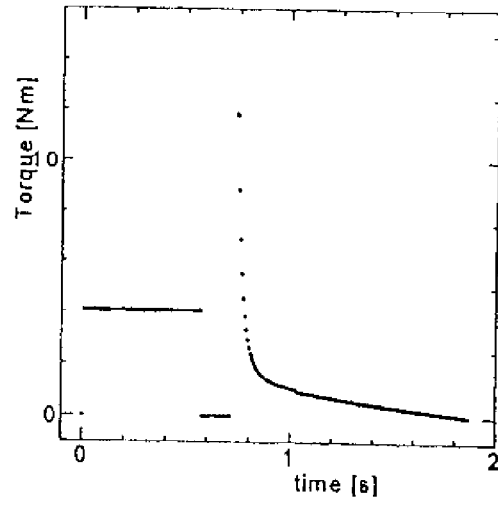


Fig. 8 トルクの変化 2

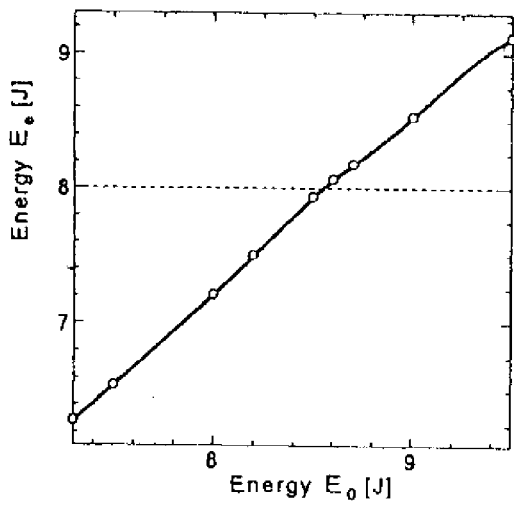


Fig. 6 初期エネルギーと倒立点エネルギー

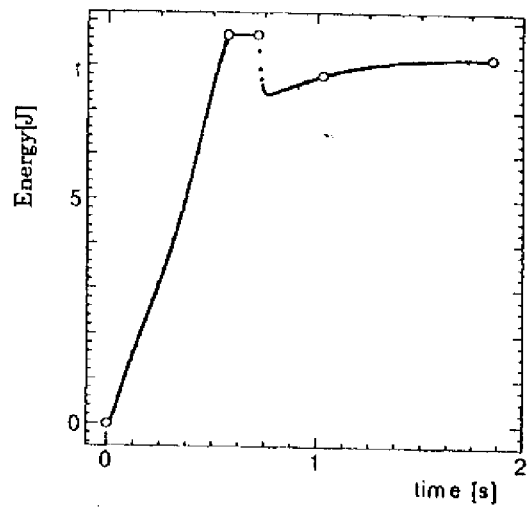


Fig. 9 エネルギーの変化 2

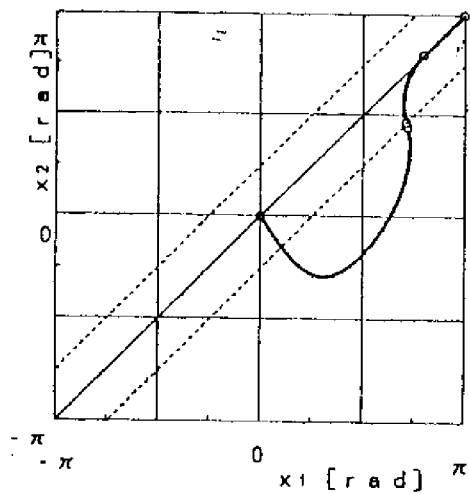


Fig. 7 シミュレーション結果 2

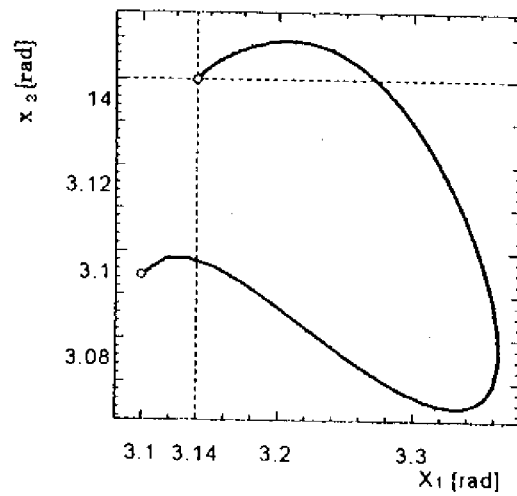


Fig. 10 システムの安定化

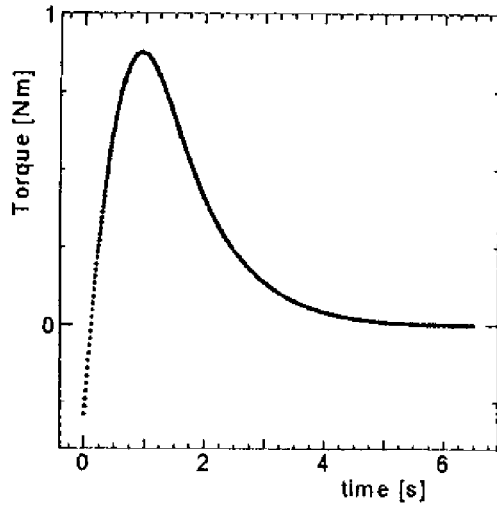


Fig. 11 トルクの変化3

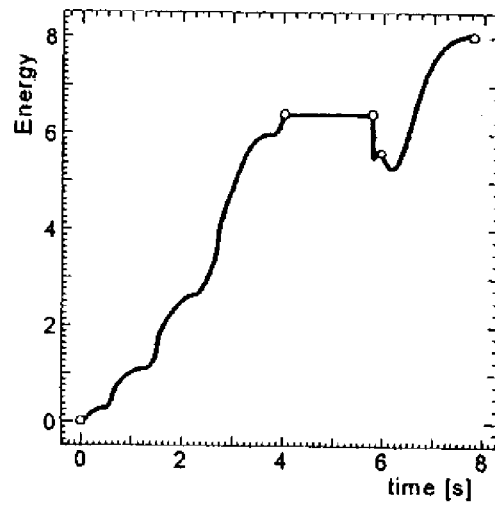


Fig. 14 エネルギーの変化4

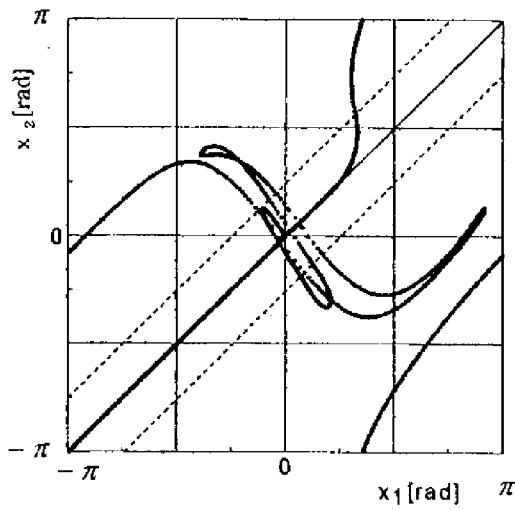


Fig. 12 シミュレーション結果4

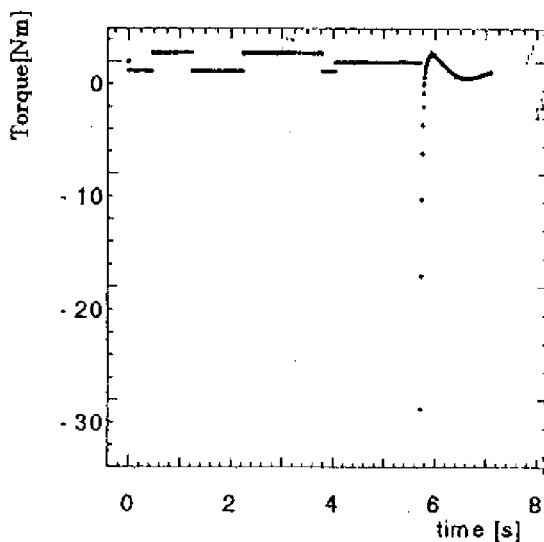


Fig. 13 トルクの変化4

シミュレーション結果より、円・直線軌道でのエネルギーの変化による静止点のずれを最初にリンクに与えるエネルギー量の調節によって補正し、振り子を倒立させることが可能であることが確認された。

6. おわりに

第一関節が受動関節である二重振り子の倒立と安定化について検討した。

システムのエネルギーを増加させ、その後、倒立点への軌道を与えたが、途中のエネルギー変化を定量的に取り扱うことが出来なためにシステムに与えるエネルギーを探索的に決定することにより倒立を行った。

参考文献

- 1) 松岡・西宮・島地：二重振り子の振り上げ方策計測自動制御学会第31回学術講演会，[DS35-2] (1992-7)，393