計測自動制御学会東北支部　第162回研究集会（1996.7.19）
資料番号　162 - 3

構造物のホモロジー設計
（ホモロガス振動の実現条件）

Homology Design for Vibration Control of Structure

○趙　相賢（秋田大院）　，　大日方　五郎（秋田大）

○SangHyun CHO　，　Goro OBINATA

School of Engineering and Mining Technology , Akita University , Akita 010

Key Words : Vibration Control , Homology Design , Passive Control , Holonomic Constraint , Zeroing Problem , Unobservable Space.

連絡先：〒010　秋田県秋田市手形字学園町１－１
秋田大学　鉱山学部　機械工学科　大日方研究室
Tel ：(0188) 89 - 2734 ， Fax : (0188) 37 - 0405
E-mail : cho@uws53.akita-u.ac.jp

1．はじめに

人工衛星、宇宙ステーション、宇宙プラットホームなどの宇宙構造物をはじめ、多くの分野にわたる構造物の軽量化と大型化の要求が高まっている。軽量大型化に伴う問題点として、剛性の低下を引き起こすことや低い周波数への弾性振動が発生してしまい、システムの機能に悪影響を及ぼす場合が多く、その弾性振動に対する制御が必要となる。アクティブ制御やダンパなどによって構造系の振動を完全に抑制することは、構造物に流入するエネルギーを完全に散逸させることであるから、それを行うことは困難であり、望ましくない場合が多い。宇宙構造物のアンテナなどに見られるように、振動振幅の抑制ではなく、部材の振動する方向が一定となることが求められる場合がある[1][2]。これらは、振動エネルギーをできるだけ自然に散逸させ、構造物の機能に関わる振動モード形状を制御する問題として定式化することができる。本研究では、線形ホロノーム拘束条件（Linear holonomic constraint）を満たすホモロガス振動モード（Homologous vibration mode）を実現する構造物の設計問題について検討する。

構造物の動特性が線形な状態方程式で実現できる場合、この設計問題は拘束条件に伴う空間を構造物の設計パラメータにより、不可観測部分空間（Unobservable subspace）に包含させることができるかという問題に帰着される[3][4]。この問題については制御理論の幾何学的なアプローチによる「出力零化問題（Zeroing）」として解かれている問題であり、状態ベクトルフィードバックにより、それを実現するための必要十分条件が種々明らかにされている[5][6][8][9]。

しかしながら、構造物の中の設計パラメータは、状態ベクトルフィードバックとは異なる形の静的な出力フィードバックの構造でシステムの動特性に寄与している場合が多い。そこで、本研究では出力零化問題の結果などに基づいて構造物のパラメータ設計により、ホモロガス振動モードを実現するための条件を明らかにする。

2．拘束条件を満足する線形システムと出力零化問題

次のようなn次元の線形自律系に対し、ℓ次元の線形ホロノーム拘束条件について考える。

$$\dot{x} = Ax \quad 、\quad A \in \Re^{n} \tag{2}$$
$$Hx = 0 \quad 、\quad H \in \Re^{\ell} \tag{3}$$

【定理１】 系（2）が拘束条件（3）を満足するためには、システム行列Aは次の条件が成り立つ[5][7]。

$$A = G^{-1}\Lambda G$$

$$G = \left[\begin{array}{c} H \\ \hline G_0 \end{array}\right] \quad 、\quad \det G \neq 0 \tag{4}$$

ここで、Λは任意の対角行列である。

次に、幾何学的なアプローチの方法に基づいて、系（2）に関する状態ベクトルxを変位と速度の部分空間上で、次のように正規化される場合、

$$x = q \oplus \dot{q} \quad 、\quad q, \dot{q} \in \Re^{\frac{n}{2}} \tag{5}$$

システム行列Aは

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \tag{6}$$

と表わされ、それぞれのBlock要素は$(n/2)\times(n/2)$次元の行列であり、式（3）に対応したホロノーム拘束条件を

$$Hq = 0 \quad 、\quad H \in \Re^{\ell} \tag{7}$$

とした場合、次のことが知られている[9][10]。

【定理２】 Block要素A_{21}，A_{22}が次式を満足するなら、拘束条件（7）が満たされる。

$$A_{21} = -G^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 G \tag{8}$$
$$A_{22} = G^{-1}(\Lambda_1 + \Lambda_2)\,G \tag{9}$$

ここに、Λ_1とΛ_2は同じ固有値を持たないような任意の対角行列である。

次に、構造物に対する線形化方程式は、次式のように与えられる場合が多い。

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Eu \tag{10}$$

ここに、状態量qと$\dot{q}$は（5）式と同様に部分空間上で正規化された$n/2$次元のベクトルとし、uはm次元のアクチュエータの発生ベクトルとして、状態方程式に変換すると次式となる。

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n/2} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline M^{-1}E \end{array}\right] u \tag{11}$$

この系に関する（3）式のような線形ホロノーム拘束条件が課されたときの出力

$$y = \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \end{array}\right] x \tag{12}$$

を常にゼロとなる問題について考える。

この問題は、システム（11）に与えられる初期値や外乱に対して、状態フィードバックによって出力yを恒等的にゼロとする、つまり$y(t) \equiv 0$（$\forall_t$）とする制御問題として、与えられる最大不可観測部分空間に含まれるかどうかの問題である[9][10]。もし、不可観測空間に含まれるなら、そのときのフィードバック制御則の求め方と存在するための必要十分条件が種々に明らかにされている[5][6][8][9]。

システム（11）が次の条件を満たすなら、

$$rank\left[\begin{array}{c|c} Ms^2 + Ds + K & E \\ \hline H & 0 \end{array}\right] = \frac{n}{2} + \ell \quad 、(\forall_s) \tag{13}$$

システム（11）は零点を持たないことになる。

もし、システムが零点を持たずに、行列Eと拘束条件Hの次元が次式のようである場合は、

$$rank\,(E) > rank\,(H) \tag{14}$$

与える初期値や外乱に対する拘束条件付の（12）式の出力を、常にゼロとする状態フィードバックは必ず存在する[5][6]。

そのときの最大不可観測部分空間は、

$$rank\,(N) \;=\; rank\,(A) \;-\; rank\,(H) \qquad (15)$$

で求められる。特に、行列 E の階級が $(n/2)$ の場合は、不可観測部分空間と一致することになるので、定理2を満たす状態フィードバックが存在する[9][10]。

3．構造物のパラメトリゼーションとホモロガス振動の実現条件

構造物に対する線形方程式が次のように表わされ、

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq \;=\; 0 \qquad (16)$$

システムの設計パラメータを M, D, K と仮定すると、定理2に基づき、次のことが得られる。

【定理3】 次の関係を満たすような設計パラメータ M, D, K が存在すると仮定する。

$$-M^{-1}K \;=\; -G^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 G \qquad (17)$$

$$-M^{-1}D \;=\; G^{-1}(\Lambda_1 + \Lambda_2)G \qquad (18)$$

このとき、構造物は拘束条件（3）を満たす。さらに、Λ_1, Λ_2 が安定な固有値を持つとき、構造物は安定である（M, D, K が物理的に実現可能であるとき、Λ_1, Λ_2 の固有値は安定である）。しかし、行列 M, D, K は一般に自由な値を取ることはできず、次のような形に拘束されているのが普通である（設計パラメータを M と考えた場合）。

$$B_M\,\Sigma_M\,C_M \qquad (19)$$

ここに、B_M, C_M は定数行列であり、Σ_M は $(n/2)\times(n/2)$ の対角行列であり、その要素が一般化質量となっている。行列 D, K の場合には、対角行列 Σ の大きさが、バネやダンパの配置数によって異なる。今、問題の定式化を簡単にするため、M は定数行列とし、設計パラメータは D, K だけとした場合に対するホモロガス振動を実現することについて考える。

【問題】次の二つの等式を仮定する。

$$-M^{-1}B_K\,\Sigma_K\,C_K \;=\; -G^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 G \qquad (20)$$

$$-M^{-1}B_D\,\Sigma_D\,C_D \;=\; G^{-1}(\Lambda_1 + \Lambda_2)G \qquad (21)$$

ここに、M, B_K, C_K, B_D, C_D, $\lambda(\Lambda_1)$, $\lambda(\Lambda_2)$, H が与えられるとき、次の条件

$$\Sigma_K \;>\; 0 \;、\; \Sigma_D \;>\; 0 \qquad (22)$$

$$\det\begin{bmatrix} H \\ --- \\ G_0 \end{bmatrix} \;\neq\; 0 \qquad (23)$$

$$\Lambda_1 \;、\; \Lambda_2 \text{：対角行列} \qquad (24)$$

を満たし、かつ (20) (21) 式を満たす行列 Σ_K, Σ_D, G_0, Λ_1, Λ_2 の存在条件を明らかにすることであり、もし存在する場合、その解を求める問題となる。この問題は、行列の標準的問題ではないので、解法を検討中であるが、求めようとする行列のいくつかを仮定すると容易に解を求められる形をしている。

4．簡単な例

Fig.1のような質量とバネの基本要素で構成されるシステムについて考える。

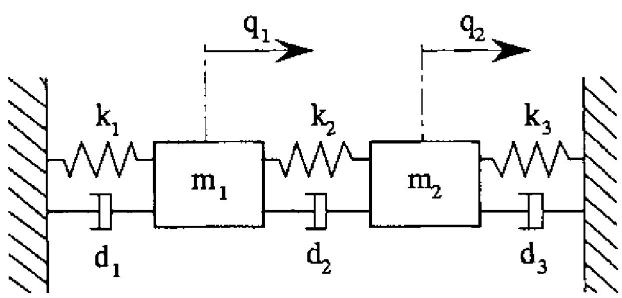

Fig.1 Example of Structure

この系にバネ定数を $k_1 = k_3$ とし、初期値を $t = 0$ とした場合の $q_1(0) - q_2(0) = 0$, $\dot{q}_1(0) - \dot{q}_2(0) = 0$ に対する自由振動は対称的な運動に支配され、次式を満足する。

$$q_1(t) - q_2(t) = 0 \quad , \quad \forall_t \;\geq\; 0 \qquad (25)$$

もし、Fig.1の系に（25）式を満足しない非対称の運動を支配する動特性モードが高減衰特性を持たせるように、この構造にダンパを配置すると、非対称な初期値や外乱により励振された非対称モードが減衰して、最終的には（25）式を満たす対称な振動に支配されることが直感的にわかる。

この簡単な例から理解できるように、構造物では容易に線形ホロノーム拘束を実現することができる一方、その拘束条件は構造に強く依存しているので、自由に設定できないことも明らかである。

5．おわりに

構造物のホモロジー設計のために、拘束条件を満たす線形システムの条件に基づいて構造物のパラメータが満たすべき条件を明らかにした。この条件を満たすパラメータを求める方法は今後の課題であるが、その十分条件に基づく設計法は、いくつかのものが容易に導かれる。Fig.1 の例からもわかる通り、この問題は拘束条件が自然である限り解が直感的に求められる。本報告で定式化された問題の解がより複雑なシステムの「自然な拘束条件」を明らかにすることが期待できる。

参　考　文　献

(1) 森本ほか, 三菱電機技報, Vol.56, No.7, pp.17/21, 1982

(2) 吉川ほか, 機械学会通常総会論文集, No.96-1 (IV), pp. 633/634, 1996

(3) 美多, 計測自動制御論文集, Vol.11-3, pp.354/360, 1975

(4) 小林ほか, 計測自動制御論文集, Vol.17-2, pp.168/175, 1981

(5) 古田ほか, オーム社, 第５章, 1984

(6) 美多ほか, 電気学会論文誌 C, pp.17/26, 1983

(7) C.T.Chen, Holt,Reinhart and Winston, Inc., 1970

(8) 成清ほか, 計測と制御, Vol.18-4, pp.371/377,1982

(9) H.Hemami, et.al, IEEE Trans. Auto. Contr.,Vol. 24, No.4, pp.526/535, 1979

(10) A.Z.Ceranowicz, et.al., IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.25, No.6, pp.1102/1111,1980