

## Riccati 方程式の厳密解表現に基づく弾性振動系の統合化設計問題

On Design Problem of Integrated Structure/Control  
Systems Based on the Explicit Solution of  
Algebraic Riccati Equation

○平元 和彦\*, 土岐 仁\*, 大日方 五郎\*

○Kazuhiko Hiramoto, Hitoshi Doki, Goro Obinata

\*秋田大学

\*Akita University

キーワード: アクティブ振動制御 (active vibration control), 統合化設計 (integrated design),  
代数リカッチ方程式 (algebraic Riccati equation), コロケーション (collocation)

連絡先: 010 秋田市手形学園町 1-1 秋田大学鉱山学部機械工学科 平元 和彦  
Tel: 0188-89-2341, Fax: 0188-37-0405, E-mail: hira@ipc.akita-u.ac.jp

### 1. はじめに

将来建設が予定されている大型宇宙構造物は、地上からの打ち上げコストを抑えるため、また宇宙空間内では自重を支える必要がないため、その寸法に対して非常に軽量に設計される。このような構造物は、部材の内部減衰はほとんど期待できない。よって実用化に際しては振動をアクティブに抑制する必要がある。現在活発に研究が行われている<sup>(1)</sup>。最新の制御理論の適用も多く見られる<sup>(2)</sup>。

はじめからアクティブ制御を想定した構造物の設計問題において、センサやアクチュエータ配置を含む構造系と、制御を行うコントローラを同時に設計すれば、両者をそれぞれ独立に設計するより高い制御性能が実現できると期待できる。この問題は構造系と制御系の統合化設計問題 (同時最適化問題) と呼ばれ、いくつかの研究報告例がある<sup>(3)</sup>。

統合化設計問題は、制御性能を表現する評価関数を構造系とコントローラ双方に存在する設計パラメータにより最適化する問題と帰着できる。従来の研究例は、固定した構造系に対して  $H_2$  や  $H_\infty$  制御則など解析的な制御則によってコントローラを設計し、その後構造系の設計パラメータを閉ループ系の安定性を損なわない範囲内で調整することを繰り返して最適化を行っている<sup>(4)</sup>。この手法は常に安定な閉ループ系が得られる点や設計パラメータ数を減少させることが可能となる点で有効であるが、パラメータ空間が使用する制御則により制限される。

本報告では、制御対象をモード座標で表現されたコロケーションの成立する不減衰系に限定し、その統合化設計問題を考える。この系に対する代数 Riccati 方程式の正定解が解析的に表現できる<sup>(5)</sup>ことを用いて、LQG 制御の下で、構造系と制御系の設計パラメータの両者を同時に調整できる統合化設計問題が定式化可能であることを示す。設計例として、柔軟構造物の振動制御系設計におけるセンサ・アクチュエータ配置問題を考え、最適配置が簡単に求められることを示す。

### 2. 制御対象の記述と Riccati 方程式の厳密解表現

アクティブ制御を前提とする  $n$  自由度の不減衰系の構造物の運動方程式を次式で定義する。

$$M\ddot{q} + Kq = E(p_s)u + Fw \quad (1)$$

$M, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  はそれぞれ質量、剛性行列であり、 $q \in \mathbb{R}^n$  は変位ベクトル、 $u$  は操作入力ベクトル、 $w$  は外乱ベクトルである。  $E(p_s)$  は、アクチュエータからの力の加わり方を表す行列で、 $F$  は外乱の入り方を表す行列である。  $p_s$  は、アクチュエータの取り付け位置や数に関するデータを要素に持つベクトルである。式(1)をモード座標系で表すことを考える。  $\omega_k, \phi_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) をそれぞれ次式の固有値問題を満足する固有周波数および

び正規化された固有ベクトルとする。

$$M\omega_k^2\phi_k - K\phi_k, \quad \phi_k^T M\phi_k = \delta_{kj} \quad (2)$$

$\delta$  は Kronecker のデルタである。  $q$  を次式のように級数展開表現する。

$$q = \sum_{k=1}^n \phi_k v_k \quad (3)$$

式(1)に式(3)を代入し、左から  $\phi_k^T$  をかけると、次式を得る。

$$\ddot{v} + \Sigma^2 v = E_n(p,.)u + F_n w \quad (4)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

$$E_n = \begin{bmatrix} \phi_1^T E(p,.) \\ \vdots \\ \phi_n^T E(p,.) \end{bmatrix}, \quad F_n = \begin{bmatrix} \phi_1^T F \\ \vdots \\ \phi_n^T F \end{bmatrix}$$

状態ベクトルを

$$x = [v_1 \quad \dot{v}_1/\omega_1 \quad \dots \quad v_n \quad \dot{v}_n/\omega_n]^T$$

と定義し、コロケーションが成立していることを考慮すると、系の状態方程式は、次式のように与えられる。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + Bu \\ z = C_z x + D_z u \\ y = Cx + w_o \end{cases} \quad (5)$$

$$A = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1^T F_n / \omega_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n^T F_n / \omega_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1^T E_n(p,.) / \omega_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n^T E_n(p,.) / \omega_n \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad E_n^T(p,.)\phi_1\omega_1 \quad \dots \quad 0 \quad E_n^T(p,.)\phi_n\omega_n]$$

ここで  $z$  は評価出力ベクトル、  $y$  は観測出力ベクトル、  $w_o$  はセンサノイズである。

以下では式(5)で与えられる系に対し、LQG コントローラを設計することを考える。  $w, w_o$  をそれぞれ平均 0 で共分散行列がそれぞれ  $W, W_o$  の白色雑音と仮定する。以下の 2 次形式評価関数を定義する。

$$J_r = E\{x^T Qx + u^T Ru\} \quad (6)$$

$E$ : 期待値演算子,  $Q \geq 0, R > 0$

よく知られているように、式(6)を最小化する制御は、次式の状態フィードバックで与えられる。

$$u = -R^{-1}B^T P x = Gx \quad (7)$$

$P$  は以下の代数 Riccati 方程式の正定解である。

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (8)$$

状態量を推定するオブザーバとして、Kalman フィルタを用いる。その状態方程式は、次式となる。

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ H = -LC^T W_n^{-1} \end{cases} \quad (9)$$

$H$  は Kalman フィルタゲインであり、  $L$  は以下の代数 Riccati 方程式の正定解である。

$$AL + LA^T - LC^T W_n^{-1} CL + W_s = 0 \quad (10)$$

このとき、文献(5)で、以下の定理が得られている。

**[定理 1]** <sup>(6)</sup>  $Q = S^T C^T C S, S = \text{diag}\{s_1, s_1, \dots, s_n, s_n\}, R = I, W_s = W B B^T W, W = \text{diag}\{w_1, w_1, \dots, w_n, w_n\}, W_n = d^2 I$  とする。このとき、Riccati 方程式(8), (10)の解は、それぞれ次式のように与えられる。

$$P = S\Omega \quad (11)$$

$$L = dW\Omega^{-1} \quad (12)$$

ただし、  $\Omega = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_1^2, \dots, \omega_n^2, \omega_n^2\}$

**[証明]** 略。

定理より、式(5)に対する LQG コントローラは、固有振動数、モード形状、設計者の指定する二次形式評価関数の重み、観測ノイズの共分散行列の関数として、厳密に表現できることがわかる。

### 3. 問題設定

本章では、前章で述べたセンサ・アクチュエータコロケーションの成立している不減衰系に対する Riccati 方程式の厳密解表現に基づき、LQG 制御の下での構造系と制御系の統合化設計問題を定式化する。

式(5)の制御対象と式(6)~(12)から求められる LQG コントローラから構成される閉ループ系  $G_s^{LQG}(s)$  は、次式のように状態空間表示される。

$$\begin{cases} \dot{x}_c^{LQG} = A_c^{LQG} x_c + B_c^{LQG} w \\ z = C_c^{LQG} x_c \end{cases} \quad (13)$$

$$x_c^{LQG} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$A_c^{LQG} = \begin{bmatrix} A(\Sigma) \\ H(W, \Sigma, \Phi, p, C(\Sigma, \Phi, p)) \\ B(\Sigma, \Phi, p)G(S, \Sigma, \Phi, p) \\ A(\Sigma) + B(\Sigma, \Phi, p)G(S, \Sigma, \Phi, p) + H(W, \Sigma, \Phi, p, C(\Sigma, \Phi, p)) \end{bmatrix}$$

$$B_c^{LQG} = \begin{bmatrix} B_w(\Sigma, \Phi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c^{LQG} = [C_z \quad 0]$$

ここで  $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$  である。式(13)の各成分はそれぞれが設計パラメータ（行列）の関数であることを明示的にするため上のように表現してある。

式(13)を用いて、以下のような問題設定を行う。

**問題** コロケーションの成立した不減衰系に対する LQG 制御則の下での構造系と制御系の統合化設計問題

設計パラメータ  $\{\Sigma, \Phi, S, W, p_s\} \in \Lambda_1$  を調整して、以下の評価関数を最適化または準最適化せよ。

$$J_{LQG} = \|W_z(s)G_w^{LQG}(s)\| \quad (14)$$

$\Lambda_1$  は  $\Omega, \Phi, S, W, p_s$  のすべてが物理的に意味を持つ空間であり、 $W_z(s)$  は重み関数である。

従来、LQG 制御則等の解析的な制御則を使用する統合化設計問題では、固定された構造系に対してコントローラを設計し、閉ループ系の安定性が損なわれない範囲内で、構造系の設計パラメータを調整していた。本定式を用いると、LQG 制御の持つ閉ループ特性を維持しながら構造系と制御系双方に存在する設計パラメータを同時に調整することが可能である。

#### 4. 設計例

前章で述べた結果を用いて、本章では、はり状構造物のセンサ、アクチュエータ最適配置問題を考える。

Fig. 1 のような両端単純支持ばりを考える。水平、鉛直座標をそれぞれ  $\xi, \psi$  とする。 $\xi = \xi_{s0}$  にセンサとアクチュエータが取り付けられており、アクチュエータは集中力  $f_a$  を発生する。 $\xi = \xi_n$  に外乱として集中力  $f_n$  が作用している。 $E, I, \rho, T$  をそれぞれはりの縦弾性係数、断面二次モーメント、密度、断面積とすると、系の運動方程式は次式となる。

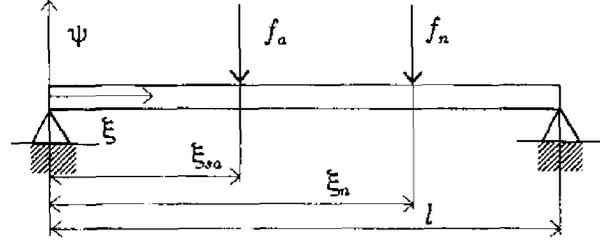


Fig. 1 Simply-supported beam

$$EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f_a \delta(\xi - \xi_{s0}) + f_n \delta(\xi - \xi_n) \quad (15)$$

$\delta(\xi)$  は Dirac のデルタ関数である。系の固有振動数  $\omega_i (i=1, \dots)$  と正規化固有関数  $\phi_i$  は、はりの長さを  $l$  とすると、それぞれ次式となる。

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho T}} \quad (16)$$

$$\phi_i = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{i\pi \xi}{l} \quad (17)$$

このとき、式(5)のような状態空間表現が得られ、 $B_w, B, C$  行列は、次式となる。

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1(\xi_{s0})/\omega_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n(\xi_n)/\omega_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1(\xi_{s0})/\omega_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n(\xi_n)/\omega_n \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$C = [0 \quad \phi_1(\xi_{s0})\omega_1 \quad \dots \quad 0 \quad \phi_n(\xi_n)\omega_n]$$

前章で議論された LQG コントローラを用いて、 $\xi = \xi_s$  でのたわみの分散値を一定値  $\varepsilon^2$  にしながら、アクチュエータの発生する操作量  $u$  の分散値を最小化するセンサ・アクチュエータ位置  $\xi_{s0}^*$  を決定する問題を解く。問題を数学的に再記述すると、以下ようになる。

Minimize

$$J_u = [0_{1 \times 2n} \quad G] X [0_{1 \times 2n} \quad G]^T \quad (19)$$

Subject to

$$J_z = [C_z \quad 0_{1 \times 2n}] X [C_z \quad 0_{1 \times 2n}]^T = \varepsilon^2 \quad (20)$$

$$C_z = [\phi_1(\xi_s) \quad 0, \dots, \phi_n(\xi_s) \quad 0]$$

$X$  は閉ループ系の共分散行列で、以下の Lyapunov 方程式の正定解である。

$$A_c^{LQG} X + X A_c^{LQG} + B_c^{LQG} W_s B_c^{LQG T} = 0 \quad (21)$$

このとき、以下の定理が成立する。

**【定理2】**

$$W = \text{diag}\{|\phi_1(\xi_a)/\phi_1(\xi_{a0})|, \dots, |\phi_n(\xi_a)/\phi_n(\xi_{a0})|\} \quad (22)$$

としたとき,  $J_z, J_u$  はそれぞれ次式となる.

$$J_z = C_z(V + L)C_z^T \quad (23)$$

$$J_u = GVG^T \quad (24)$$

ただし,

$$V = 1/2W^2(S\Omega)^{-1} \quad (25)$$

**【略証】**  $W$  を式(22)のようにした場合,  $x$  と  $\hat{x}$  の誤差  $x - \hat{x}$  の共分散行列  $X_e$  は, Riccati 方程式 (10) の解  $L$  となる. また,  $\hat{x}$  の共分散行列  $X_c$  は, 以下の Lyapunov 方程式の正定解  $V$  と等しい.

$$(A + BG)V + V(A + BG)^T + d^2HH^T = 0 \quad (26)$$

$V$  が式(25)のように表されることは簡単に証明できる. そして分離定理より,  $x$  の閉ループ共分散行列  $X_p$  は  $V + L$  となる. ■

定理 2 より, 前述した設計問題は以下のような手続きによって解かれる.

手順 1.  $J_z$  に関する仕様  $\epsilon^2$  を定める.

手順 2.  $\xi = \xi_{a0}$  に対して式(22)の  $W$  が計算でき,

$$J_z = C_z(V + L)C_z^T = \epsilon^2 \quad (27)$$

とすることにより, 式(25)を考慮して,  $S$  を求める. (注意:  $S$  の成分  $s_1, \dots, s_n$  に関しては自由度があるので, 応答等から適当に与えることができる)

手順 3. 式(24)  $J_u$  を計算する.

上記の計算を考えている  $\xi_{a0}$  の範囲内で行ない,  $J_u$  が最小となる  $\xi_{a0}^*$  を求めればよい. この設計法は, 例えば文献(6)のセンサ・アクチュエータの最適配置法と比較すると, 以下のような特長がある.

**特長 1.** 閉ループ系の制御性能がすべての  $\xi_{a0}$  に対して式(27)の意味で一定に保たれ, 最適化の物理的な意味は明確である.

**特長 2.**  $\xi_{a0}$  の変化に伴って, 式(27)を満足する LQG コントローラを再度求めたり, 閉ループ系の共分散行列を求めるための Riccati 方程式や Lyapunov 方程式を解く必要はなく, 式(24)のみを計算すればよい. すなわち, このような最適化問題を解く際問題となる計算負荷の問題がない.

簡単のため  $S = sI$  とし, 付録のような諸現で計算を行った.  $\xi_{a0}$  に対する  $J_u$  の変化の様子を Fig. 2 に示す. 各モードの節に当たる部分の付近で不可制御かつ不可観測な漸近安定でないモードの影響から,  $J_u$  が急激に大きくなっているの

がわかる.  $J_u$  は  $\xi_{a0} = 0.63$  で最小となる結果を得た.

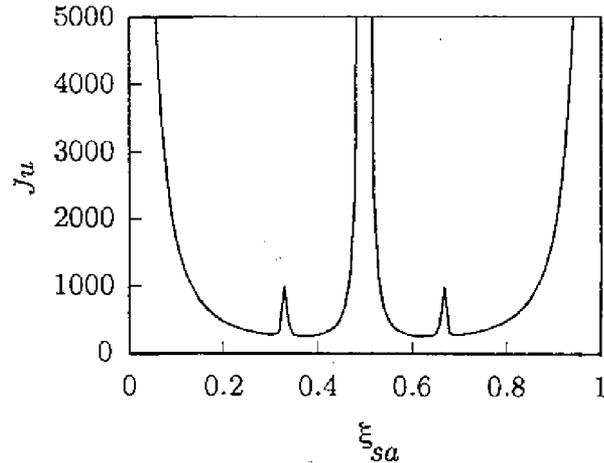


Fig. 2  $J_u$  vs  $\xi_a$

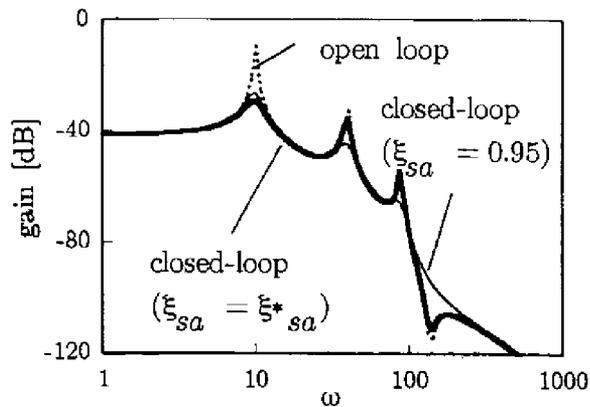


Fig. 3 Gain plots of transfer function from  $w$  to  $z$

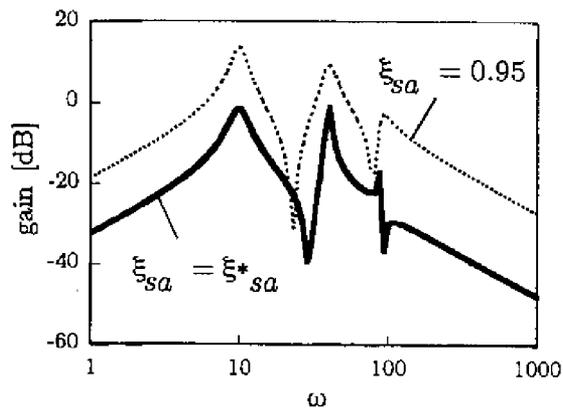


Fig. 4 gain plots of transfer functions from  $w$  to  $u$

Fig. 3 は無制御時, 最適なセンサ・アクチュエータ取り付け位置  $\xi_{a0} = 0.63$  の場合の閉ループ系,  $\xi_{a0} = 0.95$  の場合の閉ループ系の  $w$  から  $z$  までのゲイン特性を示している. 二つの閉ループ系はほぼ同様の制振性能を示している.

これに対し, Fig. 4 は  $\xi_{a0} = 0.63$  と  $\xi_{a0} = 0.95$  の

場合それぞれの  $w$  から  $u$  までのゲイン特性である。最適取り付け位置でのゲインが全体的に小さくなっており、より小さなエネルギーで同程度の制振性能が得られていることが分かる。

## 5. おわりに

コロケーションの成立している不減衰系に対する構造系と制御系の統合化設計法に関して議論した。本系に対してLQGコントローラを設計する際、解かれる代数Riccati方程式の正定解が系の固有周波数、固有モードを用いて解析的に求められることを利用し、LQG制御の下での統合化設計問題を定式化した。はりと近似できる柔軟構造物のセンサ・アクチュエータ配置問題を考え、提案する手法の有効性を示した。

Nettら<sup>(6)</sup>より、閉ループ系を安定化する状態フィードバックゲインとオブザーバゲインが一つ求められると、制御対象とそれを安定化するコントローラの重既約分解表現が得られる。式(7)、(9)のG、Hは明らかにそれらのフィードバックゲインの一つである。この結果から、制御対象に対する安定化コントローラのすべてのクラスがパラメトライズでき、閉ループ系の安定性が保証された統合化設計問題をさらに広いクラスで定式化することが可能となる。この話題に関しては、別の機会に報告する。

## 参考文献

- (1) 池田, 木田, 大型宇宙構造物におけるこれからの制御技術, 計測と制御, 32-1 (1992), 170-173.
- (2) Balas, G. J. and Doyle, J. C., Control of Lightly Damped, Flexible Modes in the Controller Crossover Region, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 17-2 (1994), 370-377.
- (3) 岩壺, 河村, 安達, 機械構造物の構造系と制御系の同時最適設計に関する研究動向と今後の課題, 日本機械学会論文集, 59-559 (1993), 631-637.
- (4) 平元, 土岐, 大日方, 閉ループ系の性能を考慮したパッシブ系とアクティブ系の同時最適化, 日本機械学会論文集, 61-584 (1995), 1450-1455.
- (5) Hsiao, M., Huang, J. and Taylor Jr., L. W., Optimal Modal-Space Controller for Structural Damping Enhancements, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 18-4 (1995), 657-663.
- (6) 近藤, 矢富, 井上, 柔軟構造物の振動制御にお

けるセンサおよびアクチュエータの配置, 日本機械学会論文集, C, 55-513 (1989), 1206-1214.

(7) Nett, C. N., Jacobson, C. A. and Balas, M. J., A Connection Between State-space and Doubly Coprime Fractional Representation, *IEEE Trans. Automat. Control*, 29-9 (1984), 831-831.

## 付録

設計例で用いた物理パラメータ

$n = 3, E = 1, I = 1, \rho = 1, T = 1, \xi_n = 0.7, \xi_r = 0.2, W_s = 100I, W_n = 10^{-10}, \epsilon = 0.5$