

内部モデルレス・サーボ系の設計

A Design of Internal Model Less Servo Control Systems

○石川 孝洋*, 渡部 慶二*, 山田 功*, 斎藤 周次*

○T.Ishikawa*, K. Watanabe*, K. Yamada*, S. Saitoh*

*山形大学工学部

*Yamagata University

キーワード： 内部モデルの原理 (internal model principle), 最終値の定理 (final value theorem), ロバスト安定 (robust stability), 感度関数 (sensitivity function), 相補感度関数 (complementary sensitivity function)

連絡先： 〒 992 米沢市城南 4-3-16 山形大学 工学部 電子情報工学科 渡部研究室

石川 孝洋, Tel.: (0238)26-3326, Fax.: (0238)24-2752, E-mail: ishikawa@ewky.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

時間に変化する目標値に精度良く追従させるフィードバック制御系をサーボ系という。位置制御を行うサーボ系として、内部モデルの原理より積分器を直列補償器としたサーボ系が知られている。しかし、このサーボ系では、例えば実際に台車を動かした場合、摩擦により台車が静止してしまい、その誤差を積分することになってしまう。その結果、台車が静止するときに間欠的に左右に動いてしまうという問題がある。また、制御系を設計する際、制御対象を数値モデル化した公称数式モデルをもとに設計するが、制御対象と公称数式モデルを一致させることは困難であり、一般に誤差が生じてしまう問題がある。上記の問題を解決するため、本研究では、オブザーバを併用した状態フィードバックにパラメータ

Q を付け加えた一般化安定化器を利用した内部モデルレス・サーボ系の設計法を提案する。

2. 内部モデルレス・サーボ系

本研究で用いる一般化安定化器を利用した内部モデルレス・サーボ系を Fig.1 に示す。

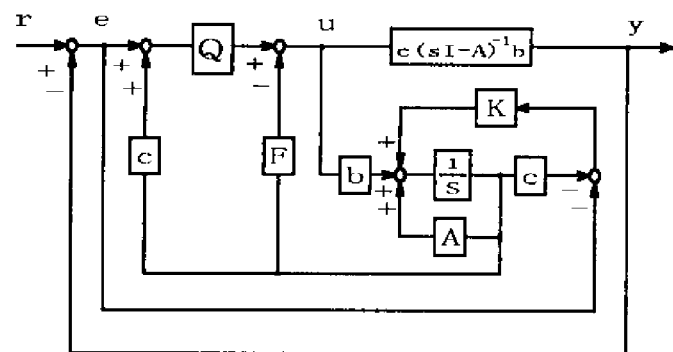


Fig. 1 内部モデルレス・サーボ系

ここで、 $K \in R^n$ はオブザーバのゲイン、 $F \in R^{1 \times n}$ は状態フィードバック係数、 $r \in R$ は目標値、 $y \in R$ は制御量、 $u \in R$ は操作量で

ある。また、制御対象 $G(s)$ の状態方程式を

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = cx(t) \quad (2)$$

$$x(t) \in R^n, A \in R^{n \times n}, b \in R^n, c \in R^{1 \times n}$$

とする。ここで、 $R^{i \times j}$ は実数からなる $i \times j$ 行列の集合である。

この内部モデルレス・サーボ系で、 $r(s)$ から $y(s)$ までの伝達関数、感度関数 $S(s)$ ($= e(s)/r(s)$) 及び相補感度関数 $T(s)$ ($= 1 - S(s)$) は

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \{Qc(sI - A + Kc)^{-1}b \\ &+ F(sI - A + Kc)^{-1}Kc(sI - A)^{-1}b\} \\ &\cdot [1 + F(sI - A)^{-1}b]^{-1} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(s) &= \{1 - (Qc - F)(sI - A + Kc)^{-1}b\} \\ &\cdot [1 + F(sI - A)^{-1}b]^{-1} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(s) &= \{Qc(sI - A + Kc)^{-1}b \\ &+ F(sI - A + Kc)^{-1}Kc(sI - A)^{-1}b\} \\ &\cdot [1 + F(sI - A)^{-1}b]^{-1} \quad (5) \end{aligned}$$

となる。

3. ロバスト安定

制御対象が

$$G_P(s) = G(s)\{1 + \Delta(s)\} \quad (6)$$

のように変動したとする。ここで、 $\Delta(s)$ はモデル誤差であり、 $G(s)$ 、 $G_P(s)$ の不安定極の数は変わらないものとする。また、 $G(s)$ は制御対象の公称数式モデルであり、可制御、可観測¹⁾とする。

いま、重み関数 $W(s)$ を

$$|\Delta(j\omega)| < |W(j\omega)|, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (7)$$

を満たすように決める。この時、

$$|T(j\omega)| < \left| \frac{1}{W(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (8)$$

つまり、

$$\|WT\|_\infty < 1 \quad (9)$$

を満たす場合、この系はロバスト安定となる。

4. 制御対象が安定な場合の設計法

制御対象の公称数式モデル $G(s)$ が k 個の安定な零点 ($-z_1^-, \dots, -z_k^-$) と l 個の不安定な零点 (z_1^+, \dots, z_l^+) を持つとする。

$$G(s) = k_P \frac{\prod_{i=1}^k (s + z_i^-) \prod_{j=1}^l (s - z_j^+)}{\det(sI - A)} \quad (10)$$

いま、 $G(s)$ が安定であるので、 $K = 0$ とする。

この時の相補感度関数 $T(s)$ は式 (10) より、

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Qc(sI - A)^{-1}b}{1 + F(sI - A)^{-1}b} \\ &= Q \frac{\text{cadj}(sI - A)b}{\det(sI - A + bF)} \\ &= \frac{Qk_P \prod_{i=1}^k (s + z_i^-) \prod_{j=1}^l (s - z_j^+)}{\det(sI - A + bF)} \quad (11) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\bar{T}(s) = \frac{\prod_{i=1}^k (s + z_i^-) \prod_{j=1}^l (s - z_j^+)}{\det(sI - A + bF)} \quad (12)$$

とおき、 $T(s) = Qk_P \bar{T}(s)$ とする。

重み関数 $W(s)$ のゲイン線図が 0dB と交わる角周波数を ω_c とする (Fig.2)。

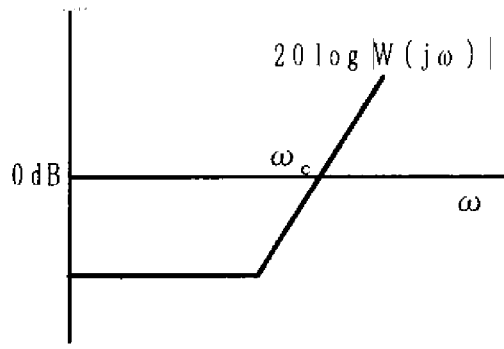


Fig. 2 重み関数 $W(s)$ のゲイン線図

$\omega_n \leq \omega_c$ とおき、

$$\begin{aligned} \det(sI - A + bF) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma \\ &\cdot \prod_{i=1}^k (s + z_i^-) \prod_{j=1}^l (s + z_j^+) \quad (13) \\ n: \text{偶数}, \gamma &= \frac{n - (k + l)}{2} \end{aligned}$$

あるいは、次数を合わせるため、

$$\begin{aligned} \det(sI - A + bF) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma (s + \omega_n) \\ &\cdot \prod_{i=1}^k (s + z_i^-) \prod_{j=1}^l (s + z_j^+) \quad (14) \\ n: \text{奇数}, \gamma &= \frac{n - 1 - (k + l)}{2} \end{aligned}$$

とすると、 $\bar{T}(s)$ は、

$$\bar{T}(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma} \cdot \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_j^+)}{\prod_{j=1}^l (s + z_j^+)} \quad (15)$$

あるいは、

$$\bar{T}(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma (s + \omega_n)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_j^+)}{\prod_{j=1}^l (s + z_j^+)} \quad (16)$$

となる。また、 $s = j\omega$ とおいたときの $|\bar{T}(j\omega)|$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^l (j\omega - z_j^+)}{\prod_{j=1}^l (j\omega + z_j^+)} \right| = 1 \quad (17)$$

となることから、

$$|\bar{T}(j\omega)| = \left| \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma} \right| \quad (18)$$

あるいは、

$$|\bar{T}(j\omega)| = \left| \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma (s + \omega_n)} \right| \quad (19)$$

となる。

ここで、 $|\bar{T}(j\omega)|$ を $0 \leq \omega < \omega_n$ で平坦にするため、 $\zeta = 0.7$ とすると、 $|\bar{T}(j\omega)|$ と $|W^{-1}(j\omega)|$ のゲイン線図は Fig.3 のようになる。

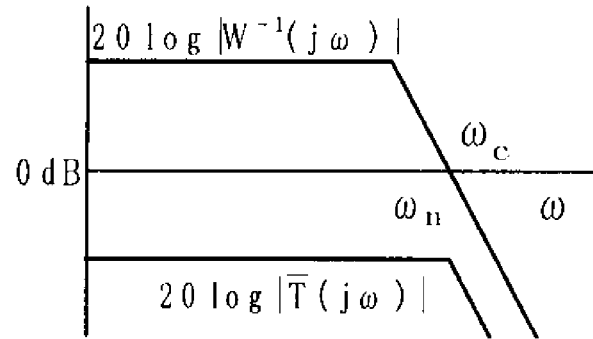


Fig. 3 $|\bar{T}(j\omega)|$ と $|W^{-1}(j\omega)|$ のゲイン線図

次に、ステップ入力 ($r(s) = 1/s$) に対し、定常偏差なく制御量が追従するようにパラメータ Q を決める。

まず、偏差 $e(s)$ は、感度関数 $S(s)$ と目標入力 $r(s)$ との積で表される。

$$\begin{aligned} e(s) &= S(s)r(s) \\ &= S(s)\frac{1}{s} \quad (20) \end{aligned}$$

また、最終値の定理¹⁾より、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \quad (21) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ となるためには感度関数 $S(s)$ が原点に一つの零点を持

つ必要がある。言い換えれば、感度関数 $S(s)$ の分子に $s = 0$ を代入したとき、その分子が 0 になればいい。

いま、 $K = 0$ とした感度関数 $S(s)$ の分子を

$$N(s) = 1 - (Qc - F)(sI - A)^{-1}b \quad (22)$$

とおき、この式 (22) に $s = 0$ を代入すると、

$$N(0) = 1 + QcA^{-1}b - FA^{-1}b \quad (23)$$

となる。 $N(0) = 0$ を満たすパラメータ Q は、

$$Q = \frac{FA^{-1}b - 1}{cA^{-1}b} \quad (24)$$

となる。

$S(s) + T(s) = 1, S(0) = 0$ の関係から、 $T(0) = 1$ となることから、

$$Qk_P = \begin{cases} \omega_n^{2\gamma} & n: \text{偶数} \\ \omega_n^{2\gamma+1} & n: \text{奇数} \end{cases} \quad (25)$$

となり、 $|T(j\omega)|$ は、

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{\omega_n^{2\gamma}}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma} \right| \quad (26)$$

あるいは、

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{\omega_n^{2\gamma+1}}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^\gamma (s + \omega_n)} \right| \quad (27)$$

となる。Fig.3に $|T(j\omega)| = |Q(j\omega)k_P\bar{T}(j\omega)|$ のゲイン線図を付け加えると Fig.4のようになる。したがって、 $\omega_n \leq \omega_c$ でロバスト安定となる。

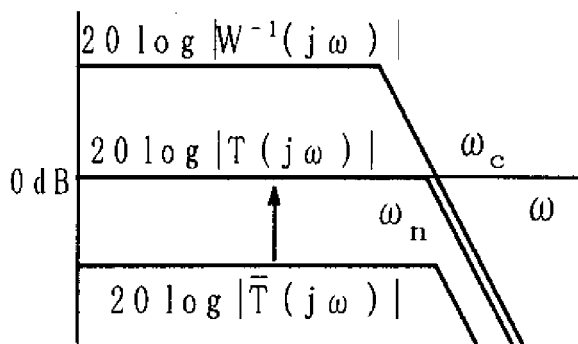


Fig. 4 $|T(j\omega)|$ と $|W^{-1}(j\omega)|$ のゲイン線図

5. 制御対象が不安定な場合の設計法

前節の制御対象が安定な場合は、 $K = 0$ としたが、制御対象が不安定であるので、オブザーバ ($A - Kc$) により、安定化する際、なるべく小さいオブザーバのゲイン $\|K\|$ で安定化することを考え、

$$\lambda[A - Kc] = \begin{cases} \text{Re}\{\lambda[A]\} < 0, & \lambda[A] \\ \text{Re}\{\lambda[A]\} > 0, & -\lambda[A] \\ \text{Re}\{\lambda[A]\} = 0, & -0.01 + \lambda[A] \end{cases}$$

となるようにオブザーバのゲイン K を計算する。ここで、 $\lambda[\cdot]$ は固有値を示す。

状態フィードバック係数 F は、安定な場合と同様に求める。

パラメータ Q は、感度関数 $S(s)$ の分子が

$$N(s) = 1 - (Qc - F)(sI - A + Kc)^{-1}b \quad (28)$$

となり、この式 (22) に $s = 0$ を代入すると、

$$N(0) = 1 - Qc(Kc - A)^{-1}b + F(Kc - A)^{-1}b \quad (29)$$

となるので、

$$Q = \frac{1 + F(Kc - A)^{-1}b}{c(Kc - A)^{-1}b} \quad (30)$$

となる。

相補感度関数 $T(s)$ のゲイン線図はオブザーバゲイン $K \neq 0$ の影響で Fig.5のようになるので、 ω_n を小さくすることでロバスト安定となる。

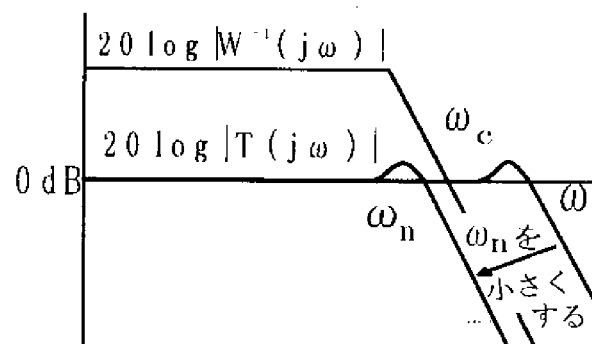


Fig. 5 $|T(j\omega)|$ と $|W^{-1}(j\omega)|$ のゲイン線図

5.1 設計手順

- Step1: 制御対象 $G_p(s)$ 、モデル $G(s)$ から擾動 $|\Delta(j\omega)|$ を見積もり、重み関数 $W(s)$ を求める。また、重み関数 $W(s)$ のゲイン線図が 0dB と交わる角周波数を ω_c とする。
- Step2: オブザーバのゲイン K を計算する。
- Step3: $\omega_n = \omega_c$ とし、状態フィードバック係数 F を求める。
- Step4: パラメータ $Q(s)$ を求める。
- Step5: 相補感度関数 $T(s)$ と重み関数の逆数 $W^{-1}(s)$ のゲイン線図を描き、 $|T(j\omega)|$ が $|W^{-1}(j\omega)|$ の下側となっていることを確認する。下側になっていない場合は、 ω_n を小さく変え、Step3. 以降を繰り返す。

6. 数値例

台車系の制御対象 $G_p(s)$ とモデル $G(s)$ は、

$$G_p(s) = \frac{1760}{s(s^2 + 60s + 9800)} \quad (31)$$

$$G(s) = \frac{27}{s(s + 140)} \quad (32)$$

である。

Step1: モデル誤差 $\Delta(s)$ から重み関数 $W(s)$ を

$$W(s) = \frac{(s + 7)^2}{350} \quad (33)$$

とし、 $\Delta(s)$ と $W(s)$ のゲイン線図を Fig.6 に示す。

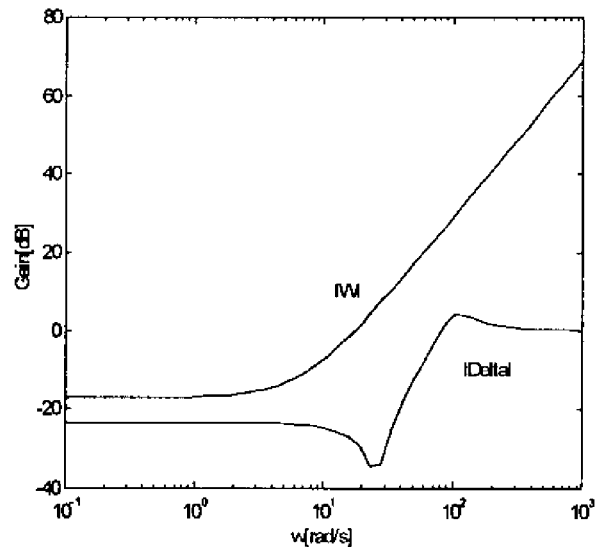


Fig. 6 $\Delta(s)$ と $W(s)$ のゲイン線図

Step2: オブザーバのゲイン K

$$K = \begin{bmatrix} -0.0518 \\ -0.0007 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Step3: $\omega_n = 18[\text{rad/s}]$, 状態フィードバック係数 F

$$F = \begin{bmatrix} -114.80 & 317.52 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Step4: パラメータ Q

$$Q = 11.7268 \quad (36)$$

Step5: 相補感度関数 $T(s)$ と重み関数 $W^{-1}(s)$ のゲイン線図を Fig.7に示す。設計仕様を満たしている。

とを示した。

参考文献

- 1) 中野道雄, 美多勉:制御基礎理論,193/212,
昭晃堂(1993)

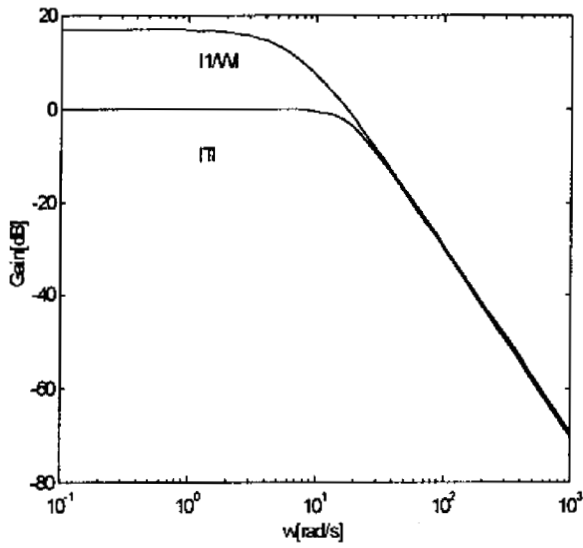


Fig. 7 相補感度関数 $T(s)$ と重み関数 $W^{-1}(s)$ のゲイン線図

シミュレーション結果を Fig.8に示す。

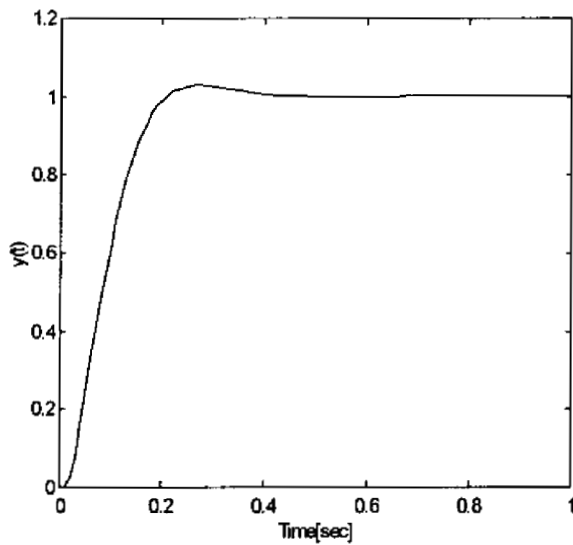


Fig. 8 シミュレーション結果

7. おわりに

本研究では、オブザーバを併用した状態フィードバックにパラメータ Q を付け加えた内部モデルレス・サーボ系の設計法を示した。また、数値例から、モデル誤差のもとで目標値に追従し、台車の位置制御に有効であるこ