計測自動制御学会東北支部第163回研究集会（1996.10.17～18）
資料番号　163-19

距離型ファジィ推論法の諸性質について
A Study on Properties in the Distance-type Fuzzy Reasoning

王　碩玉
Shouyu Wang
山形大学 工学部
Faculty of Engineering, Yamagata University

土谷　武士
Takeshi Tsuchiya
北海道大学 工学部
Faculty of Engineering, Hokkaido University

キーワード：　距離型ファジィ推論法（distance-type fuzzy reasoning method），
凸なファジィ集合（convex fuzzy sets），分離規則（modus ponens）．

連絡先：〒992　米沢市城南4-3-16　山形大学工学部電子情報工学科　王　碩玉
TEL: (0238)26-3312, FAX: (0238)24-2752, E-mail:wang@eie.yz.yamagata.u.ac.jp

1．はじめに

本報告では，まず著者らの提案している距離型ファジィ推論法[1] の概要を紹介する．それから最近分かってきた本推論法の諸性質について論じる．

ファジィ理論中のファジィ推論[2] [3] は応用面において多大な実績をあげられ，社会に貢献している．現在ファジィ制御やエキスパートシステムなどの分野では最もよく使われている直接法のファジィ推論としては *Mamdani*の推論法 [4]，関数型推論法[5]及び簡略化型推論法 [6] がある．しかし，この三つの推論法とも，ルールの前件部と与えられた事実からなる共通集合のメンバーシップ関数の最大値を，前件部と事実がどの程度一致しているかを示す適合度としているので様々な問題点がある．これらの問題点を解決するために，文献[1]ではファジィ集合間の距離に基づいて距離型ファジィ推論法を提案している．本推論法は多重1段の直接法に属するものである．本推論法は次の主な特徴がある．(1) 後件部が凸なファジィ集合であれば，結論も凸なファジィ集合になる．(2) *modus ponens*を厳密に満たしている．(3) ファジィルールベースが疎な場合でも適切な結論が推論される．

*Mamdani*の推論法を含めて通常のファジィ推論法は疎なルールベースの場合には適用できない．この問題に対して，文献 [9] では線形補間型推論法を提案しているが，推論された結論は必ずしも凸なファジィ集合にはならないことが指摘されている [10]．また，推論ルールと事実が互いに厳しすぎる制約条件にあるために[11]，文献[9]の提案した推論法を実際のシステムに応用することが困難であると思われる．

2．ファジィ集合間の距離

本章ではファジィ集合間の距離を定義する．実数全体の集合を R で表わす．R を全体集合とし，R におけるファジィ集合の全体を$F(R)$とする．有界凸なファジィ集合の全体を$\overline{F}(R)$ で表わす．また，$\overline{F}_n(R)$で$\overline{F}(R)$ における正規なファジィ集合の全体を表わす．明らかに

$\overline{F}_n(R)\subset\overline{F}(R)\subset F(R)$ という関係がある．

定義 1：$F(R)$の任意の二つのファジィ集合$A, B\subset F(R)$ に実数 $d(A, B)$が対応し，次の三つの条件を満足するとき，d を$F(R)$上の距離関数という．

$$d(A, B) \geq 0;\ d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \tag{1}$$

$$d(A, B) = d(B, A) \tag{2}$$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, A) \ ,\ \forall C\subset F(R) \tag{3}$$

定義1はファジィ集合間の距離についての公理であるので，実際の問題においては，いろいろな具体的な計算法を定義することができるが，この公理を満たさなければならない．以下では一つの具体的な計算法を定義する．

定義 2：任意のファジィ集合$A, B\subset\overline{F}(R)$ に対して(4)式で定義される実数関数$d(A, B)$を$\overline{F}(R)$ 上の距離関数という．

$$d(A, B) := \left[\int_0^1 \left| infA_{M\alpha} - infB_{M\alpha}\right|^p d\alpha\right]^{1/p} + \left[\int_0^1 \left| supA_{M\alpha} - supB_{M\alpha}\right|^p d\alpha\right]^{1/p} + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{M_A} - 1\right)\mu_A(x) - \left(\frac{1}{M_B} - 1\right)\mu_B(x)\right|^p dx\right]^{1/p} \tag{4}$$

$1 \leq p \leq \infty$，$|\cdot|$は絶対値を表わすマークである．A_MはAのメンバーシップ関数の最大値M_Aで正規化されたファジィ集合を表わす．$supA_{M\alpha}$と$infA_{M\alpha}$はそれぞれファジィ集合A_Mのα-レベル集合$A_{M\alpha}$の上限と下限を表わす．B_Mについても同様である．

定義２はファジィ集合間の距離の公理を満たしていることが容易に証明できる．

３．距離型ファジィ推論法

本章ではMamdaniの推論法の問題点を解決するために，２章に定義したファジィ集合間の距離に基づいて提案している距離型ファジィ推論法を説明する．

本論文では，図１に示すようなm入力１出力のファジィ推論を検討対象とする．

$$
\begin{array}{llllll}
R^1: & x_1=A^{11}, & x_2=A^{12}, & \cdots, & x_m=A^{1m} & \Rightarrow y=B^1 \\
R^2: & x_1=A^{21}, & x_2=A^{22}, & \cdots, & x_m=A^{2m} & \Rightarrow y=B^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
R^i: & x_1=A^{i1}, & x_2=A^{i2}, & \cdots, & x_m=A^{im} & \Rightarrow y=B^i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
R^n: & x_1=A^{n1}, & x_2=A^{n2}, & \cdots, & x_m=A^{nm} & \Rightarrow y=B^n \\
 & x_1=A^1, & x_2=A^2, & \cdots, & x_m=A^m & \\
\hline
 & & & & & y=B
\end{array}
$$

図１　m入力nルールのファジィ推論

ただし，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$，A^{ij}，B^i，A^j，Bはそれぞれ前件部，後件部，与えられた事実および推論結果を表わし，$A^{ij}, A^j \subset F(R_A)$，$B^i \subset \overline{F}(R_B)$とする．また，次の二つの仮定のもとで推論を行う．

(a)ルール$R^1 \sim R^n$において，互いに矛盾しているルールが存在しない．矛盾しているルールとは，$\exists q_1, q_2 \in \{1,2,\cdots,n\}$，$\sum_{j=1}^{m} d(A^{q_1j}, A^{q_2j})=0$かつ$d(B^{q_1}, B^{q_2}) \neq 0$であれば，ルール$R^{q_1}$と$R^{q_2}$は矛盾していると言うことである．

(b)後件部について，少なくとも一つの$k \in \{1,2,\cdots,n\}$が存在して，$B^k \subset \overline{F}_n(R_B)$を満たす．この仮定は推論結果に正規性を持たせるためである．つまり，$B \subset \overline{F}_n(R_B)$を満たすためである．もし推論結果がこの性質を必要としない場合，この仮定を外しても問題はない．

本推論法は次の三つのステップから構成する．

Step 1：まず，前件部A^{ij}と事実A^jとの距離$d_j(A^{ij}, A^j)$を計算し，次に(5)式により$d_1 \sim d_n$を計算する．

$$d_i=\sum_{j=1}^{m} d_j(A^{ij}, A^j) \tag{5}$$

このように計算された$d_1 \sim d_n$も距離の公理を満足することがわかる．また，矛盾しているルールはないと仮定しているので，$d_1 \sim d_n$の中には二つ以上０になるものは存在しない．

Step 2：次のように，推論結果Bのα－レベル集合を求める．

$$B_\alpha=[\,inf(B_\alpha), sup(B_\alpha)\,] \tag{6}$$

$$inf(B_\alpha):=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[inf(B_\alpha^i)\prod_{j=1, j\neq i}^{n} d_j\right]}{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1, j\neq i}^{n} d_j} \tag{7}$$

$$sup(B_\alpha):=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[sup(B_\alpha^i)\prod_{j=1, j\neq i}^{n} d_j\right]}{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1, j\neq i}^{n} d_j} \tag{8}$$

ただし，もし，後件部の中に$B^k \not\subset \overline{F}_n(R_B)$ $(k=1,2,\cdots,n)$が存在する場合，$\forall \alpha \in (sup\mu_{B^k}(y), 1]$に対する$B_\alpha^k$は空の集合となる．この場合においても推論を可能にするために，次の約束により推論を行う．つまり$\forall \alpha \in (sup\mu_{B^k}(y), 1]$に対して，

$$B_\alpha^k=[\,inf(B_\alpha^k), sup(B_\alpha^k)] := [sup\mu_{B^k}(y), sup\mu_{B^k}(y)] \tag{9}$$

とする．

Step 3：合成定理（分解定理とも呼ばれる）により，(10)式で推論結果Bを求める．

$$B=\cup\alpha\cdot B_\alpha \tag{10}$$

以上，距離型ファジィ推論法について述べた．通常のファジィ推論法では，前件部はファジィ集合でなければ推論はできない．これに対して本推論法は距離という概念に基づいているので，前件部がシングルトンである場合においても適切な推論結果を得ることができる．この場合前件部のファジィ集合をシングルトンに簡略化した意味で，前件部を簡略化した距離型ファジィ推論法と呼ぶことにする．

４．距離型ファジィ推論法の特徴

本章では３章で提案した距離型ファジィ推論法の特徴について述べる．ただし，これらの特徴についての証明は省略する．

以下では混乱を起こさない限り集合A_αの上限$supA_\alpha$を$\overline{A_\alpha}$に，A_αの下限$infA_\alpha$を$\underline{A_\alpha}$に書くことがある．

定理１：距離型ファジィ推論法による推論結果Bが有界である．具体的には，$\forall\alpha$に対して，$B_{\alpha min}:=min\{\underline{B_\alpha^1}, \underline{B_\alpha^2}, \cdots, \underline{B_\alpha^n}\}$，$B_{\alpha max}:=max\{\overline{B_\alpha^1}, \overline{B_\alpha^2}, \cdots, \overline{B_\alpha^n}\}$とすれば，(11)式が成立する．

$$B_\alpha \subseteq [B_{\alpha min}, B_{\alpha max}] \tag{11}$$

定理２：もし，$\exists q \in \{1,2,\cdots,n\}$，$\forall j \in \{1,2,\cdots,m\}$に対し

て$A^j=A^{qj}$であれば，推論結果について$B=B^q$が成立する．すなわち本推論法は分離規則を満たしている．

定理 3：$B^k \subset \overline{F}_n(R)$を満たす$k$の集合を$P$と書き，次のように定義する．

$$P:=\{k \mid , B^k \subset \overline{F}_n(R)\} \tag{12}$$

もし$\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}-P$に対して，$d_i \neq 0$であれば推論結果$B$が正規である．ただし，$\{1,2,\cdots,n\}-P$は集合$\{1,2,\cdots,n\}$から$P$の要素を除いた集合を表わす．

定理 4：距離型ファジィ推論法による推論結果Bが凸なファジィ集合である．

定理 5：推論結果について，$\exists q \in \{1,2,\cdots,n\}$，$B=B^q$である場合，もし$\forall \alpha \in [0,1]$に対して次の二つの等式を同時に満たす定数$d_1, d_2, \cdots, d_{q-1}, d_{q+1}, \cdots, d_n$が存在しなければ，事実について$A^k=A^{qk}$でなければならない．ただし，$k=1,2,\cdots,m$．

$$\underline{B_\alpha^q} = \frac{\sum_{i=1,\, i\neq q}^{n}\left[\underline{B_\alpha^i}\prod_{j=1,\, j\neq i,q}^{n} d_j\right]}{\sum_{i=1,\, i\neq q}^{n}\prod_{j=1,\, j\neq i,q}^{n} d_j} \tag{13}$$

$$\overline{B_\alpha^q} = \frac{\sum_{i=1,\, i\neq q}^{n}\left[\overline{B_\alpha^i}\prod_{j=1,\, j\neq i,q}^{n} d_j\right]}{\sum_{i=1,\, i\neq q}^{n}\prod_{j=1,\, j\neq i,q}^{n} d_j} \tag{14}$$

定理 6：Bは距離が$d_1, d_2, \cdots, d_q, \cdots, d_n$である時の推論結果を，$B'$は距離が$d_1, d_2, \cdots, d'_q, \cdots, d_n$である時の推論結果を表わす．

もし$d_q < d'_q$であれば，$d(B, B^q) < d(B', B^q)$が成立する．ただし，B^qは$d_q=0$のときの推論結果である．

定理 7：$\exists k \in \{1,2,\cdots,m\}$，$d_{qk}(A^{qk}, A^k) \to \infty$とすれば，後件部$B^q$は推論結果$B$には影響を与えない．つまり$q$番目のルールは推論には参加しない．ただし，$q=1,2,\cdots,n$．

定理 8：$\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$に対して，後件部$B^i \subset \overline{F}_n(R_B)$が三角型ファジィ集合であれば，推論結果$B \subset \overline{F}_n(R_B)$も三角型ファジィ集合となる．

5．距離型ファジィ推論に基づく関数型推論法と簡略型推論法

本章では3章で提案した距離型ファジィ推論法の特例として，後件部を関数とする関数型推論法と後件部を実数に簡略化した簡略型推論法について述べる．

まず，図2に示すような関数型推論を説明する．

$$\begin{array}{lllll}
R^1: & x_1=A^{11}, & x_2=A^{12}, \cdots, & x_m=A^{1m} & \Rightarrow y=f_1(x_1,\cdots,x_m) \\
R^2: & x_1=A^{21}, & x_2=A^{22}, \cdots, & x_m=A^{2m} & \Rightarrow y=f_2(x_1,\cdots,x_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
R^i: & x_1=A^{i1}, & x_2=A^{i2}, \cdots, & x_m=A^{im} & \Rightarrow y=f_i(x_1,\cdots,x_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
R^n: & x_1=A^{n1}, & x_2=A^{n2}, \cdots, & x_m=A^{nm} & \Rightarrow y=f_n(x_1,\cdots,x_m) \\
 & x_1=A^1, & x_2=A^2, \cdots, & x_m=A^m & \\
\hline
 & & & & y=y_0
\end{array}$$

図2　m入力nルールの関数型推論

ただし，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$．A^{ij}，f_i，A^j，y_0はそれぞれ前件部，後件部及び与えられた事実および推論結果を表わし，A^{ij}，$A^j \subset F(R_A)$，$y_0, f_i(x_1,\cdots,x_m) \in R$とする．また，3章に述べた距離型ファジィ推論法では二つの仮定があったが，ここでは，矛盾しているルールがないという条件だけを仮定する．

推論過程は具体的に次の二つのステップからなる．

Step 1：まず3章の推論法と同じようにA^{ij}とA^jとの距離$d_{ij}(A^{ij}, A^j)$を計算し，(5)式により$d_1 \sim d_n$を計算する．

Step 2：次に推論結果y_0は(15)式で求める．x_j^0はA^jの重心座標である．

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} d_j\right]}{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} d_j} \tag{15}$$

つづいて，図3に示すように，前件部と事実はファジィ集合ではなく，実数である場合を考える．

$$\begin{array}{lllll}
R^1: & x_1=x^{11}, & x_2=x^{12}, \cdots, & x_m=x^{1m} & \Rightarrow y=f_1(x_1,\cdots,x_m) \\
R^2: & x_1=x^{21}, & x_2=x^{22}, \cdots, & x_m=x^{2m} & \Rightarrow y=f_2(x_1,\cdots,x_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
R^i: & x_1=x^{i1}, & x_2=x^{i2}, \cdots, & x_m=x^{im} & \Rightarrow y=f_i(x_1,\cdots,x_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
R^n: & x_1=x^{n1}, & x_2=x^{n2}, \cdots, & x_m=x^{nm} & \Rightarrow y=f_n(x_1,\cdots,x_m) \\
 & x_1=x^1, & x_2=x^2, \cdots, & x_m=x^m & \\
\hline
 & & & & y=y_0
\end{array}$$

図3　実数前件部の関数型推論

ただし，$x^{ij} \in R$，$x^j \in R$とする．

事実$x^j \in R$が与えられるとき，まず次のようにユークリッド距

離を計算しておく．

$$d_i = \left[\sum_{j=1}^{m} \left(x^{ij} - x^{j} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{16}$$

そして，(15)式により推論結果y_0が求められる．

また，図2と図3における後件部は$f_i(x_1, \cdots, x_m)$ではなく具体的な実数c_iである場合，距離についてはもし前件部がファジィ集合であれば(5)式により計算する．もし前件部が実数であれば(16)で計算する．そして推論結果y_0は(17)で与えられる．(17)式を距離型簡略化推論法と呼ぶことにする．

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[c_i \prod_{j=1, j \neq i}^{n} d_j \right]}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} d_j} \tag{17}$$

以上距離型関数推論法と簡略化推論法について述べた．この二つの推論法は従来の関数型推論法及び簡略化推論法とは異なり，前件部が実数である場合においても適切な推論結果が得られる．またこの二つの推論法は3章に述べた距離型推論法の特例になっているので，3章に述べた定理1～7による特徴を持っていることを容易に証明することができる．

6．例題

本章では具体的な例題を用いて3章の推論法による推論結果を示す．次の1入力2ルールの場合を考える．

$$R^1: \ \ if \ \ x = A^1 \ \ then \ \ y = B^1$$
$$R^2: \ \ if \ \ x = A^2 \ \ then \ \ y = B^2$$
$$x = A,\ A',\ A'',\ A^1,\ A^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$y = ?$$

図4　1入力2ルールのファジィ推論

前件部（A^1，A^2）と後件部（B^1，B^2）を図5(a),(b)に示す三角型ファジィ集合とする．与えられた事実はそれぞれA，A'，A''，A^1，A^2であるとして，各事実に対応する推論結果はB，B'，B''，$B^{1\prime}$，$B^{2\prime}$で表わし，図5(b)に示す．図5に示した推論結果により，本推論法は3章に述べた定理1～8による特徴を持っていることが分かる．

7．まとめ

本論文は，ファジィ集合間の距離に基づいて提案している距離型ファジィ推論法及びその特徴を説明した．また，本推論法の特殊な場合として距離型関数推論法及び簡略化推論法についても述べた．本推論法は，ファジィ集合の共通集合の高さを利用した*Mamdani*型の推論法とは根本的には異なり，ファジィ集合間の距離を用いて推論を行っているので，*Mamdani*型の推論法の諸問題点を解決することができた．また，従来のファジィ推論法では前件部が実数の場合推論することができない．そのような場合でも

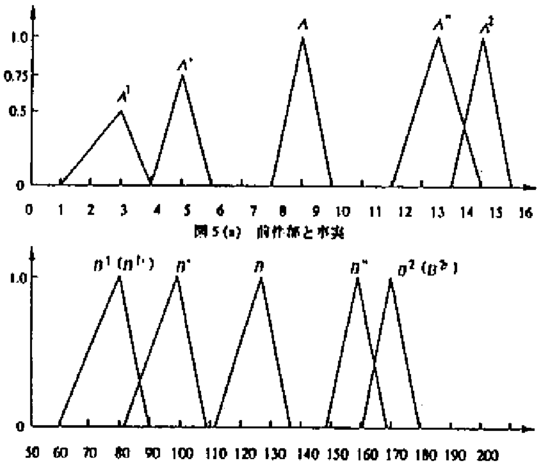

図5(a)　前件部と事実

図5(b)　後件部と推論結果

図5　距離型ファジィ推論法による推論結果

本推論法を用いれば，適切な推論結果を得られる．最後に具体的な例題により4章に述べた本推論法の特徴を示した．

本論文では，直接法の枠内で議論しているので，本推論法は命題の真理値を取り扱っていない．したがって，厳密に言えば，本推論法は2値論理における推論を特殊な場合とする推論法とはなっていない．文献[2]ではこの問題を扱い，2値論理中における推論を特殊な場合として含めれるように命題の真理値を考慮した距離型ファジィ推論法を提案している．また距離型多重多段ファジィ推論法も提案している[3]．

参考文献

[1] 王，土谷：距離型ファジィ推論法Part1---距離型ファジィ推論法の提案---，12th Fuzzy System Symposium講演論文集，pp.9-12(1996.6)

[2] 王，土谷：距離型ファジィ推論法Part2---真理値を考慮した距離型ファジィ推論法の提案---，12th Fuzzy System Symposium講演論文集，pp.13-16(1996.6)

[3] 王，土谷：距離型ファジィ推論法Part3---距離型多重多段ファジィ推論法の提案---，12th Fuzzy System Symposium講演論文集，pp.17-20(1996.6)

[4] 水本：ファジィ推論(1)，日本ファジィ学会誌，Vol.4, No.2, pp.256-264，ファジィ推論(2)，日本ファジィ学会誌，Vol.4, No.3, pp.433- 444 (1992)

[5] 塚本: ファジィ推論(3), 日本ファジィ学会誌, Vol.4, No.4, pp.676-684 (1992)

[6] E. H. Mamdani : Applications of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant, Proc. IEE, Vol.121, No.12, pp.1585-1588(1974)

[7] T. Takagi and M. Sugeno : Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, IEEE Transaction on SMC, Vol.15, No.1, pp.116-132(1985)

[8] 市橋，渡辺：簡略ファジィ推論を用いたファジィモデルによる学習型制御，日本ファジィ学会誌，Vol.2, No.3, pp.429-437(1990)

[9] L. T. Koczy and K. Hirota : Approximate Reasoning by Linear Rule Interpolation and General Approximation, International Joural of Approximate Reasoning, Vol. 9, No.3, pp.197-225(1993)

[10] Y. Shi and M. Mizumoto : Some Considerations on Koczy's Fuzzy Interpolative Reasoning Method, Proceedings of Fourth IEEE International Conference on Fuzzy System, pp.2117-2122(1995)

[11] 石岩，水本：ファジィルールベースが疎なである場合の線形補間型推論法の適用条件，11th Fuzzy System Symposium講演論文集，pp.59-62(1995)