計測自動制御学会東北支部 第163回研究集会 (1996.10.18)
資料番号 163-2

ロバストモデルマッチング問題の一解法

A solution to the robust model-matching problem

○熊田 康一*, 渡部 慶二*, 山田 功*, 斎藤 周次*

○ K. Kumada*, K. Watanabe*, K. Yamada*, S. Saitoh*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード: モデルマッチング (model-matching problem), 内部モデル制御 (internal model macthing), ロバスト安定 (robust stability),

連絡先: 〒992 米沢市城南 4-3-16 山形大学 工学部 電子情報工学科
熊田 康一, Tel.: (0238)26-3326, Fax.: (0238)24-2752, E-mail: kumada@ewky.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

制御対象のモデルをもとに、制御対象をモデルに完全に一致させて目標入力に出力を近づけることを exact model matching という。しかし、実際の設計においては制御対象にモデルを完全に一致できない問題、外乱があった場合の問題, 不安定極についての安定性など様々な問題が生じる。

感度を下げるには制御器のゲインを大きくしてやれば良いが、モデルの誤差や制御対象の変動で制御系が不安定になる。つまり, モデル誤差のもとで、安定性を保って、いかに速く、誤差の小さい制御（ロバスト制御という）を実現するか課題となっている。

本報告ではモデル誤差があった場合においても安定性を保ちモデルに一致させさらに感度をできるだけおさえるロバストモデルマッチング問題について内部モデル制御を用いて考えていく。

2. ロバストモデルマッチング問題

Fig.1において $G_m(s)$ は規範モデル, $G(s)$ は制御対象である。$G(s)$ が安定で不安定零点を持たないとする。(ただし、$G_m(s)$ と $G(s)$ の相対次数は等しいとする。)

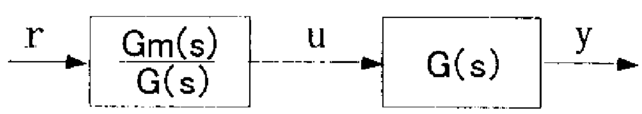

Fig. 1　Exact Model Macthing

入力 r から出力 y までの伝達関数は

$$\frac{y}{r} = \frac{G_m(s)}{G(s)} \cdot G(s) = G_m(s) \qquad (1)$$

となり入出力伝達関数を $G_m(s)$ に合わせることができる。しかし、$G(s)$ が不安定零点をも

つときは内部不安定になるので上記の方法は使えない。そこで $G(s)$ をインナアウタ分解すると

$$G(s)=G_i(s)\cdot G_o(s) \tag{2}$$

ただし，$G_i(s)$:インナ関数，$G_o(s)$:アウタ関数とする。

Fig.2を構成する。

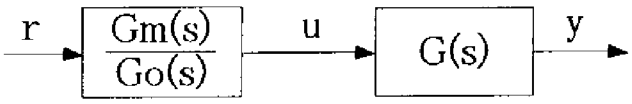

Fig. 2　Exact Model Macthing

入力 r から出力 y までの伝達関数は

$$\frac{y}{r}=\frac{G_m(s)}{G_o(s)}\cdot G(s)=G_m(s)\cdot G_i(s) \tag{3}$$

となる。$G_i(s)$ の部分は安定のためやむを得ない部分と考える。

しかし，外乱が入った場合や正確な制御対象のモデリングができない場合は $G_m(s)G_i(s)$ とはならない。

そこでFig.3の制御系を考える。$G(s)$ は制御対象、$C(s)$ は制御器である。

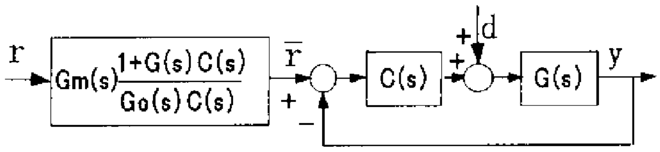

Fig. 3

入力 r から出力 y までの伝達関数は

$$\begin{aligned}\frac{y}{r} &= G_m(s)\cdot\frac{1+G(s)C(s)}{G_o(s)C(s)}\cdot\frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}\\ &= G_m(s)G_i(s)\end{aligned} \tag{4}$$

になり、$G_m(s)G_i(s)$ にできる。

外乱 d から出力 y までの伝達関数は

$$\frac{y}{d}=\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} \tag{5}$$

$|C(j\omega)\to\infty|$ にすれば$\frac{y}{d}\to 0$ にできる。

つぎに制御対象が変動したときの影響を考える。まず、変動がないときの$\bar{r}$から y までの伝達関数は

$$H=\frac{y}{\bar{r}}=\frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \tag{6}$$

制御対象 $G(s)$ が $G(s)(1+\Delta(s))$ に変動したとする。ただし、$\Delta(s)$ はモデル誤差で不安定極の数は変わらないとする。

$\bar{r}$から y までの伝達関数は

$$\begin{aligned}\overline{H}=\frac{y}{\bar{r}} &= \frac{G(s)C(s)(1+\Delta(s))}{1+G(s)C(s)(1+\Delta(s))}\\ &= \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}\frac{1+\Delta(s)}{1+\frac{G(s)C(s)\Delta(s)}{1+G(s)C(s)}}\end{aligned} \tag{7}$$

になる。

モデル誤差の入出力伝達特性への影響を示す尺度として制御系の感度関数 $S(s)$ を

$$S(s)=\frac{\frac{\overline{H}(s)-H(s)}{\overline{H}(s)}}{\frac{G(s)(1+\Delta(s))-G(s)}{G(s)(1+\Delta(s))}} \tag{8}$$

と定義すると

$\bar{r}$から y のフィードバック系の (8) 式は

$$S=\frac{1}{1+G(s)C(s)} \tag{9}$$

であり、

r から y までの伝達関数は

$$\begin{aligned}\frac{y}{r} &= \frac{G_m(1+G(s)C(s))}{G_o(s)C(s)}\cdot\frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}\\ &\cdot\frac{1+\Delta(s)}{1+(1-S)\Delta(s)}\end{aligned} \tag{10}$$

$S\to 0$ とすれば$\frac{y}{r}\to G_m(s)G_i(s)$ になりモデルマッチング可能である。

つぎに安定性について考える。$\bar{r}$から y までのナイキスト線図による安定判別法は以下

の通りである。$C(s)G(s)$ で $s=j\omega$ とおき、ω を$-\infty$ から$+\infty$ まで変化させ、s 平面でのナイキスト軌跡を描く。この軌跡が点 $(-1+j0)$ のまわりに反時計方向に R回回転したとする。$C(s)G(s)$ の極のうちで実数部が正になるのの数を Pとしたとき

$$R=P$$

のときのみ漸近安定となる。

(7) 式の分母は

$$\begin{aligned} & 1+G(s)C(s)(1+\Delta(s)) \\ &= (1+G(s)C(s))(1+T(s)\Delta(s)) \end{aligned} \tag{11}$$

ただし,$T(s)$（相補感度関数）を

$$T=\frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \tag{12}$$

とする。

$G(s)C(s)$ の不安定極数だけ点 $(-1+j0)$ を反時計方向に R回っている。そのために $T(s)\Delta(s)$ のナイキスト軌跡は点 (-1+j0) を反時計方向に回ってはならない。

$$||T(s)\Delta(s)||_\infty<1 \tag{13}$$

ならば安定である。ここで，摂動$\Delta(s)$ は重み関数 $W_T(s)$ でおさえられているとすると

$$|\Delta(s)|<|W_T(s)| \tag{14}$$

を満たす、すべての摂動$\Delta(s)$ に対し (13) 式を満たす必要十分条件は

$$||T(s)W_T(s)||_\infty<1 \tag{15}$$

である。相補感度関数のゲイン $|T(j\omega)|$ を小さくすると大きなモデル誤差に対しても安定性が保持できる。

ロバスト安定性には $T(s)$ を小さくする必要があり、モデル誤差の伝達特性への影響を小さくするには $S(s)$ を小さくする必要がある。しかし、(9), (12) 式の間には

$$S(s)+T(s)=1 \tag{16}$$

の関係があり両者を同時に小さくできない。そこでモデル誤差は一般に低周波で誤差の絶対値を 1 より小さくすることは可能であるが、高周波では難しい。したがって低周波で感度を小さくすることを考え、重み関数 $W_S(s)$ を導入し

$$|S(s)|<\frac{1}{|W_S(s)|} \tag{17}$$

を満たすことを考える。(17) 式は H_∞ノルムを用いて

$$||S(s)W_S(s)||_\infty<1 \tag{18}$$

となる。

3. 内部モデル制御法

モデル誤差に対しロバスト安定性を保ちつつ感度を小さくする設計を考える。感度，相補感度と制御器の関係が見やすい内部モデル制御を考える。すなわち、制御器 $C(s)$ を

$$C=\frac{Q}{1-QG} \tag{19}$$

としてパラメトリゼーションする。ただし、$Q(s)$ は自由パラメータとする。Fig.3を等価変換すると Fig.4になる。

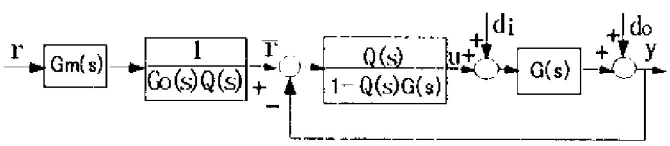

Fig. 4

入力 rから出力 yの伝達関数は

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= G_m(s)\cdot\frac{1}{G_o(s)Q(s)}\cdot G(s)Q(s) \\ &= G_m(s)G_i(s) \end{aligned} \tag{20}$$

で前と同じである。Fig.4の安定性を考える。$\overline{r}, d_i$からy, u までの伝達関数は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GQ & (1-GQ)G \\ Q & -GQ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{r} \\ d_i \end{bmatrix} \tag{21}$$

(21) 式のすべての要素が安定のとき閉ループ系は安定となる。また、フィードフォワード部分 $1/G_oQ$ の安定のため Q は不安定零点を持たないことが必要となる。(12) 式の相補感度関数は

$$T(s) = G(s)Q(s) \tag{22}$$

(9) 式の感度関数は

$$S(s) = 1 - G(s)Q(s) \tag{23}$$

である。(23) 式は出力側の外乱 d_oに対する伝達関数であり、入力側外乱 d_iに対して，

$$\frac{y}{d_i} = (1 - G(s)Q(s))G(s) \tag{24}$$

となる。例えば $G(s)$ が原点に極を持つ場合，

$$G(s) = \frac{k}{s(s+\alpha)} \tag{25}$$

入力外乱 $d_i(s)$ を

$$d_i(s) = \frac{1}{s} \tag{26}$$

とする。

$Q(s)$ を

$$Q(s) = \frac{s(s+\alpha)}{k(1+\tau s)^2} \tag{27}$$

とすると

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sy(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\{1 - Q(s)G(s)\}G(s)d_i(s) \\ &= \lim_{s\to 0}\{1 - \frac{1}{(1+\tau s)^2}\}\frac{k}{s(s+\alpha)} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{\tau(s+2)}{(1+\tau s)^2}\frac{k}{s+\alpha} && (28) \\ &= \frac{2\tau k}{\alpha} && (29) \end{aligned}$$

となり、定常偏差が残る。

4. インナアウタ分解の内部モデル制御

(21) 式より定常偏差を 0 にするためには

$$N(s) = (1 - G(s)Q(s)) \tag{30}$$

が $G_o(s)$ の不安定極 $(s = p_1, p_2, \cdots, p_x)$ と重み関数 $W_S(s)$ の不安定極 $(s = \overline{p}_1, \overline{p}_2, \cdots, \overline{p}_y)$ を零点に持てばよい。

そのために$r = x + y$を考慮して $Q(s)$ を

$$Q(s) = \frac{1}{G_o} \cdot f(s) \tag{31}$$

$$f(s) = f_a(s)f_b(s) \tag{32}$$

$$f_a(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^q} \tag{33}$$

$$f_b(s) = \frac{C_1 + C_2 s + \cdots + C_r s^{r-1}}{(1+\tau s)^{r-1}} \tag{34}$$

のように分割する。ただし、qは $Q(s)$ をプロパにするのに必要な整数，rは重み関数 $W_s(s)$ と $G_o(s)$ 不安定極数の和とする。

(34) 式のパラメータ $C_1, C_2, \cdots, C_{r-1}$は

$$N(s)|_{s=p_i,\overline{p}_j} = 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \cdots, x \\ j = 1, 2, \cdots, y \end{cases} \tag{35}$$

を満たすように選ぶ。

$f_b(s)$ が不安定零点をもたなければ安定な Fig.5の系を構成する。

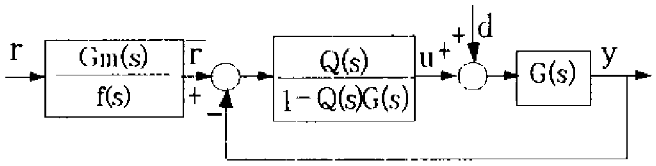

Fig. 5

相補感度関数は

$$T(s) = G(s)Q(s) = f(s) \cdot G_i(s) \tag{36}$$

感度関数は

$$S(s) = 1 - G(s)Q(s) = 1 - f(s) \cdot G_i(s) \quad (37)$$

入出力伝達関数は

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= G_m(s) \cdot \frac{1}{f(s)} \cdot f(s)G_i(s) \\ &= G_m(s)G_i(s) \end{aligned} \quad (38)$$

となる。

5. 設計

次の手順で設計を行う。

step1 摂動$\Delta(j\omega)$を見積もり重み関数$W_T(j\omega)$を決める。

step2 ボード線図上に $1/|W_s(s)|$, $1/|W_T(s)|$ を描く。$1/|W_s(s)|$, $1/|W_T(s)|$ の 0db 周波数をそれぞれω_S, ω_T とする。

step3 制御対象モデル$G(s)$をG_i, G_oにインナアウタ分解する。

step4 時定数τを$\tau = 2/(\omega_S + \omega_T)$を満たすように決定する。

step5 f_a/G_oがプロパーになるようにf_aの相対次数qを決める。

step6 W_sの不安定極数とG_oの極数の和が$1 - G_i(s)f_a(s)f_b(s)$の零点と等しくなるようにf_bを求め, $Q(s)$を$Q(s) = 1/G_o(s) \cdot f_a(s)f_b(s)$とする。

step7 ボード線図上に感度関数$S(s)$と相補感度関数$T(s)$を描き、それぞれの重み関数の下側になっていることを確認する。$\|W_T(s)T(s)\|_\infty < 1$を満たさない場合は$\tau$を大きく、$\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1$を満たさない場合は$\tau$を小さく調整して step5 からやり直す。

6. 数値例

制御対象に台車を選んだ数値例をあげる。Fig.6にシステムの概略図を示す。

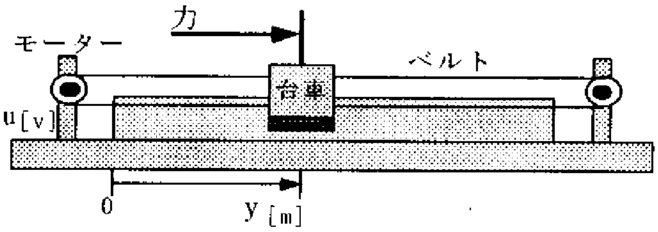

Fig. 6　台車の概略図

右側の車輪には直流サーボモーターが取り付けられてあり、コンピュータからのデジタルコードをアナログ電圧に変換して出力する。また、ベルトを介してプーリに接続されており台車が移動するとプーリが回転しパルスエンコーダに伝わり台車の位置が測定できる。

台車のモーターの入力電圧から台車の出力位置までの制御対象と制御対象のモデルをそれぞれ

$$G_p(s) = \frac{1764}{s(s^2 + 59s + 9801)} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= G_i(s) \cdot G_o(s) \\ &= 1 \cdot \frac{27}{s(s+113)} \end{aligned} \quad (40)$$

とする。

規範モデル$G_m(s)$を入力を力、出力を位置としたインピーダンスモデルに選び

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \quad (41)$$

とする。

摂動$|\Delta(s)|$をおさえるように重み関数$|W_T(s)|$を

$$W_T(s) = \frac{s + 30}{70} \quad (42)$$

とする。

$|\Delta(j\omega)|,|W_T(j\omega)|$ を Fig.7に示す。

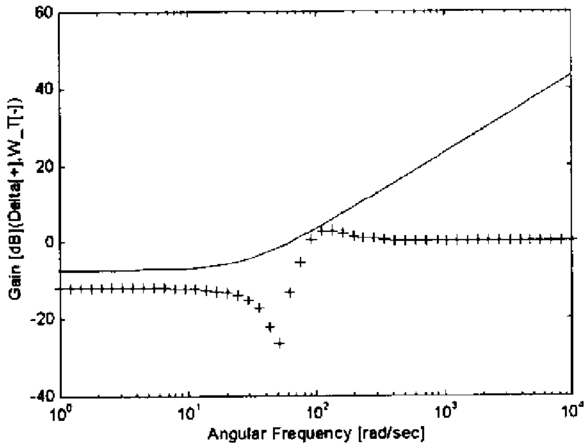

Fig. 7　$|\Delta|,|W_T|$

ただし、+を摂動 $|\Delta(j\omega)|$, −を $|W_T(j\omega)|$ とする。$|\Delta(j\omega)| < |W_T(j\omega)|$ を満たしている。

また、重み関数 $|W_S(s)|$ を

$$W_s(s) = \frac{4}{s} \tag{43}$$

とする。

時定数τ, フィルター $f_a(s), f_b(s)$ を

$$\tau = 0.05 \tag{44}$$

$$f_a(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^2} \tag{45}$$

$$f_b(s) = \frac{3\tau s + 1}{\tau s + 1} \tag{46}$$

のように決める。

$1/|W_T(s)|, 1/|W_S(s)|, T(s), S(s)$ を Fig.8に示す。

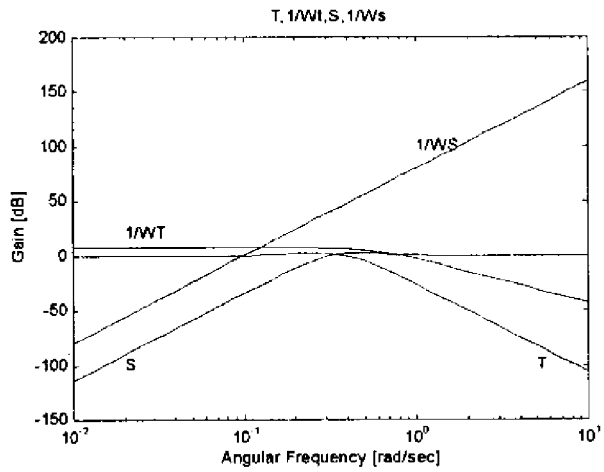

Fig. 8　$1/|W_T(s)|, 1/|W_S(s)|, T(s), S(s)$

$||W_S(s)S||_\infty < 1, ||W_T(s)T||_\infty < 1$ を満たし設計仕様を満たしている。

$G_m(s)$, y/rの応答を Fig.9に示す。

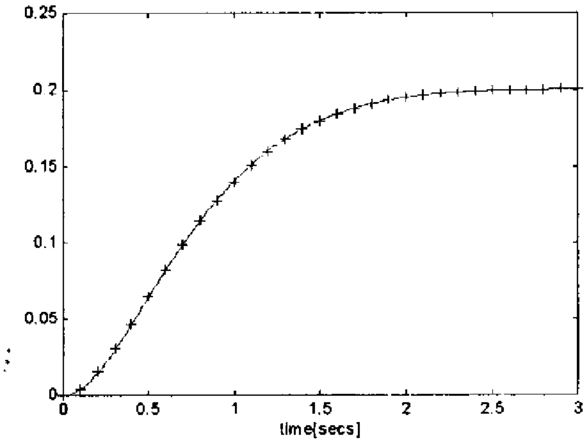

Fig. 9　step response of Gm and control system

+は規範モデルの応答で実線は制御系の応答である。追従していることがわかる。

また、ステップ外乱が入ったステップ応答を Fig.10に示す。

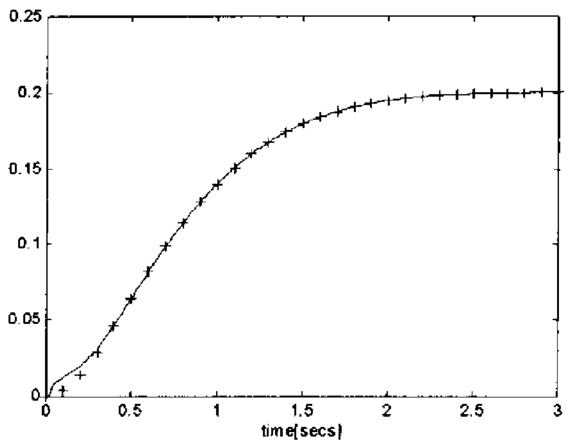

Fig. 10　step response of Gm and control system with disturbance

+は規範モデルのステップ応答，実線はステップ外乱が入ったステップ応答である。外乱を除去していることがわかる。

つぎに，ステップ外乱に対してのシステムの応答を Fig.11に示す。

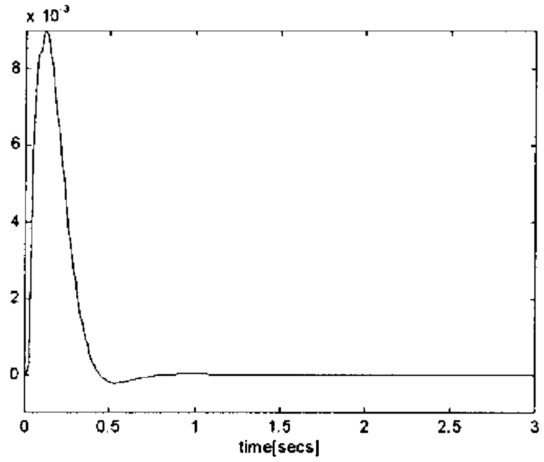

Fig. 11　step response of disturbance

外乱の影響も受けないことがわかる。

7. おわりに

本報告ではロバストモデルマッチング問題を低感度でロバスト安定な制御系を構成するために制御対象をインナアウタ分解し内部モデル原理を用いた設計法を提案した。良好なモデル追従特性をもつ制御系を構成することができた。

参考文献

1) 舒，渡部: 内部モデル制御系のモデルと補償器の一体化, 計測自動制御学会予稿集,43/44(1994)

2) 美多 勉: 制御基礎理論, 昭晃堂 (1982)

3) 伊藤正美： システム制御理論, 昭晃堂 (1973)