計測自動制御学会東北支部 第163回研究集会（1996.10.18）
資料番号 163-3

確率変動パラメータを含む線形系の最適制御に関する一考察
Optimal Control of Linear Systems with Stochastic Parameters

○兼政賢一*，石原正*，猪岡光*
○Ken-ichi Kanemasa*, Tadashi Ishihara*, Hikaru Inooka*

*東北大学
*Tohoku University

キーワード： 自乗平均強可安定性（mean square strong stabilizability），自乗平均強可検出性（mean square strong detectability），確率変動パラメータシステム（stochastic parameter system），ロバスト制御（robust control），最適補償（optimal compensation）

連絡先： 〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉 東北大学工学部機械航空工学科 猪岡研究室
兼政賢一，Tel.: (022)217-7021, Fax.: (022)217-7019, E-mail: kanemasa@control.is.tohoku.ac.jp

1. 緒言

線形系の最適制御系設計法としてLQG手法が知られている．一般にLQG手法は時不変系を対象とする設計法である．そのため，パラメータ変動が存在する制御対象にこの設計手法を適用しても，安定性，最適性が保証されないことから，ロバスト制御系を構成することはできない．パラメータ変動に対してもロバストな制御系を構成するために，De Koningらは制御対象のパラメータを確率系列でモデル化した線形離散時間システムの最適補償問題[1)]を提案している．しかし，De Koningらは直達項を考慮していない．そこで，本報告では直達項まで考慮した最適補償問題を考える

本報告では，はじめに確率変動パラメータを含む線形系のモデルを示す．次に2次形式の評価関数を最小にするような最適補償器の存在の必要条件を導く．さらに，自乗平均強可安定および自乗平均強可検出の定義をし，最適補償器の唯一の存在の必要十分条件を示す．最後に数値例を示す．

2. 確率変動パラメータを含む線形系の最適補償問題

次の制御対象を考える．

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + \Gamma_i u_i + v_i \tag{1a}$$

$$y_i = C_i x_i + D_i u_i + w_i \tag{1b}$$

ここで，$x_i \in R^n$，$u_i \in R^m$，$y_i \in R^l$ はそれぞれ状態，入力，観測ベクトルであり，$v_i \in R^n$，$w_i \in R^l$ はそれぞれ外乱，観測雑音ベクトルである．$\Phi_i, \Gamma_i, C_i, D_i$ はそれそれ適当な次元の実行列で，$\{\Phi_i\}, \{\Gamma_i\}, \{C_i\}, \{D_i\}$ は定常な統計的性質を持つそれぞれ独立でランダムな行列の系列である．$\{v_i\}, \{w_i\}$ は定常な統計的性質を持つそれぞれ独立な確率変数を要素とするベクトルの系列で，平均はそれぞれ零，共分散行列はそれぞれ $E[v_i v_i^T] = V$，$E[w_i w_i^T] = W$ である．

(1)式の制御対象に動的補償器

$$\hat{x}_{i+1} = F\hat{x}_i + Ky_i \tag{2a}$$

$$u_i = -L\hat{x}_i \tag{2b}$$

を使用する．ここで，$\hat{x}_i \in R^n$ は補償器の状態であり，F, K, L は適当な次元の実行列である．

(1),(2)に対し，評価関数

$$\sigma_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i^T Q y_i + u_i^T R u_i\right)\right\} \tag{3}$$

を考える．ここで，$Q \geq 0$，$R \geq 0$ である．(3)式の評価関数を最小にする補償器 (F^*, K^*, L^*) を見つける問題，あるいは，評価関数の最小値 $\sigma_\infty^* = \sigma_\infty(F^*, K^*, L^*)$ を見つける問題を最適補償問題という．

(1),(2)式のシステムは

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_i & -\Gamma_i L \\ KC_i & F - KD_i L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ \hat{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i \\ Kw_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

と表すことができる．ここで，

$$x_i' = \begin{bmatrix} x_i \\ \hat{x}_i \end{bmatrix},\quad v_i' = \begin{bmatrix} v_i \\ Kw_i \end{bmatrix},$$

$$\Phi_i' = \begin{bmatrix} \Phi_i & -\Gamma_i L \\ KC_i & F - KD_i L \end{bmatrix},$$

$$V' = \begin{bmatrix} V & \Theta \\ \Theta & KWK^T \end{bmatrix}$$

と定義すると，(4)式を，

$$x_{i+1}' = \Phi_i' x_i' + v' \tag{5}$$

と表すことができる．ただし，Θ は適当な次元の零行列をあらわす．

ここで，$P_i' = \overline{x_i' x_i'^T}$ と定義すると，(5)式より，

$$P_{i+1}' = \overline{\Phi' P_i' \Phi'^T} + V' \tag{6}$$

が得られる．もし，補償器 (F, K, L) が制御対象を自乗平均安定化するなら，Φ_i' は自乗平均安定であり，$P' = \lim_{i\to\infty} P_i'$ が存在する．ここで，P' は，

$$P' = \overline{\Phi' P' \Phi'^T} + V' \tag{7}$$

の唯一の解であり，$P' \geq 0$ である．さらに(3)式の評価関数の値が存在し，

$$\sigma_\infty(F, K, L) = \mathrm{tr}(Q'P') \tag{8}$$

となる．ここで，Q' は

$$Q' = \begin{bmatrix} \overline{C^T Q C} & -\overline{C^T Q D} L \\ -L^T \overline{D^T Q C} & L^T \overline{D^T Q D} L + L^T R L \end{bmatrix}$$

と定義される．

3. 最適補償器の存在の必要条件

最初に補償器 (F, K, L) を最適にするための必要条件を求める．ハミルトニアン H を，

$$H(F, K, L, P', S') = \mathrm{tr}\left[Q'P' + \left(\overline{\Phi' P' \Phi'^T} + V' - P'\right)S'\right] \tag{9}$$

と定義する．ここで $S' \in S^{2n}$ はラグランジュ乗数である．そうすると補償器 (F, K, L) が最適であるための必要条件は，

$$\frac{\partial H}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\mathrm{tr}\left(\overline{\Phi' P' \Phi'^T} S'\right) = 0 \tag{10a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\mathrm{tr}\left(\overline{\Phi' P' \Phi'^T} S' + V'S'\right) = 0 \tag{10b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\mathrm{tr}\left(\overline{\Phi' P' \Phi'^T} S' + Q'P'\right) = 0 \tag{10c}$$

$$\frac{\partial H}{\partial P'} = \overline{\Phi'^T S' \Phi'} + Q' - S' = 0 \tag{11a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial S'} = \overline{\Phi' P' \Phi'^T} + V' - P' = 0 \tag{11b}$$

となる．ここで，$S' \geq 0$，$P' \geq 0$ である．

ここで，S' と P' を Φ' にあわせて，

$$S' = \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ S_{21} & S_2 \end{bmatrix}, P' = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{21} & P_2 \end{bmatrix}$$

と分割する，また，

$$\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i,$$

$$P = \lim_{i\to\infty}\overline{\tilde{x}_i \tilde{x}_i^T},\quad \hat{P} = \lim_{i\to\infty}\overline{\hat{x}_i \hat{x}_i^T},$$

$$S = S_1 - S_2,\quad \hat{S} = S_2,$$

$$P = P_1 - P_2,\quad \hat{P} = P_2,$$

$$\tilde{\Phi}_i = \Phi_i - \overline{\Phi},\quad \tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i - \overline{\Gamma},$$

$$\tilde{C}_i = C_i - \overline{C},\quad \tilde{D}_i = D_i - \overline{D}$$

と定義する．ここで，$S \geq 0$，$S_{12} = S_{21} = -\hat{S}$，$P \geq 0$，$P_{12} = P_{21} = \hat{P}$，$\hat{S} > 0$，$\hat{P} > 0$ を仮定すると，(10)式は，

$$F = \overline{\Phi} - \overline{\Gamma}L - K\overline{C} + K\overline{D}L \tag{12a}$$

$$K = \overline{\Phi}P\overline{C}^T(\overline{CPC^T} + \overline{\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^T} + W)^+ \tag{12b}$$

$$L = (\overline{\Gamma^T S \Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}^T \hat{S} \tilde{\Gamma}} + R + \overline{D^T Q D})^+ \times(\overline{\Gamma}^T S\overline{\Phi} + \overline{D}^T Q\overline{C}) \tag{12c}$$

となる．$^+$ は Moore-Penrose の擬似逆行列をあらわす．これら F, K, L を計算し，系(4)式を自乗平均安定化する補償器を求めることにな

るが，(12)式は必要条件であるので F,K,L が存在したとしても，それらが系(4)式を自乗平均安定化する補償器であるとは限らない．

線形変換 $A':S^{2n}\to S^{2n}$，$B':S^{2n}\to S^{2n}$ を

$$A'X=\overline{\Phi'^{T}X\Phi'},\quad X\in S^{2n} \tag{13a}$$

$$B'X=\overline{\Phi'X\Phi'^{T}},\quad X\in S^{2n} \tag{13b}$$

と定義すると，(11)式は，

$$S'=A'S'+Q' \tag{14a}$$

$$P'=B'P'+V' \tag{14b}$$

と書き表すことができる．

(12a)式を使うと(14)式は，

$$\begin{aligned}S&=\overline{(\Phi-\Gamma L)^{T}S(\Phi-\Gamma L)}\\&\quad+\overline{(\tilde{\Phi}-K\tilde{C})^{T}\hat{S}(\tilde{\Phi}-K\tilde{C})}\\&\quad+\overline{(C-DL)^{T}Q(C-DL)}\\&\quad+L^{T}(R+\overline{\tilde{\Gamma}^{T}\hat{S}\tilde{\Gamma}})L\end{aligned} \tag{15a}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}&=(\overline{\Phi}-K\overline{C})^{T}\hat{S}(\overline{\Phi}-K\overline{C})\\&\quad+L^{T}(\overline{\Gamma^{T}S\Gamma}+\overline{\tilde{\Gamma}^{T}\hat{S}\tilde{\Gamma}}+R\\&\quad+\overline{D^{T}QD})L\end{aligned} \tag{15b}$$

$$\begin{aligned}P&=\overline{(\Phi-KC)P(\Phi-KC)^{T}}\\&\quad+\overline{(\tilde{\Phi}-\tilde{\Gamma}L)\hat{P}(\tilde{\Phi}-\tilde{\Gamma}L)^{T}}+V\\&\quad+K(W+\overline{\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^{T}})K^{T}\end{aligned} \tag{15c}$$

$$\begin{aligned}\hat{P}&=(\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L)\hat{P}(\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L)^{T}\\&\quad+K(\overline{CPC^{T}}+W+\overline{\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^{T}})K^{T}\end{aligned} \tag{15d}$$

となる．

$F=\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L-K\overline{C}+K\overline{D}L$ を使うと，動的補償器(2)式は，

$$\hat{x}_{i+1}=\overline{\Phi}\hat{x}_i+\overline{\Gamma}u_i+K\{y_i-(\overline{C}\hat{x}_i+\overline{D}u_i)\} \tag{16a}$$

$$u_i=-L\hat{x}_i \tag{16b}$$

と書き換えられる．ここで，$\hat{x}_i$ は状態量 x_i の最適推定値であり，$\hat{x}_i$ の共分散行列は $\hat{P}$，推定誤差 $\tilde{x}_i$ の共分散行列は P である．

この結果は，制御対象のパラメータの変動がない場合，つまり，$\tilde{\Phi}_i=0$，$\tilde{\Gamma}_i=0$，$\tilde{C}_i=0$，$\tilde{D}_i=0$ のとき，時不変系の LQG 制御の結果と一致する．(12), (15)式が Riccai 方程式に相当する．また，直達項 $D_i=0$ の場合は，De Koning[1]の結果と一致する．

4. 最適補償器の存在の十分条件

次に，補償器 (F,K,L) が最適となるための十分条件を求めるのに必要となる定義や補題の証明を行う．$\Phi_i^\alpha,\Gamma_i^\alpha,C_i^\alpha,D_i^\alpha,\Phi_i'^\alpha$ を，

$$\Phi_i^\alpha=\overline{\Phi}+\alpha\tilde{\Phi}_i \tag{17a}$$

$$\Gamma_i^\alpha=\overline{\Gamma}+\alpha\tilde{\Gamma}_i \tag{17b}$$

$$C_i^\alpha=\overline{C}+\alpha\tilde{C}_i \tag{17c}$$

$$D_i^\alpha=\overline{D}+\alpha\tilde{D}_i \tag{17d}$$

$$\Phi_i'^\alpha=\begin{bmatrix}\Phi_i^\alpha & -\Gamma_i^\alpha L\\ KC_i^\alpha & F-KD_i^\alpha L\end{bmatrix} \tag{17e}$$

で定義する．また，評価関数の重みに関する行列を

$$\begin{bmatrix}C_i^{\alpha T}QC_i^\alpha & C_i^{\alpha T}QD_i^\alpha\\ D_i^{\alpha T}QC_i^\alpha & R+D_i^{\alpha T}QD_i^\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_{1i}^{\alpha T}\\ V_{2i}^{\alpha T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{1i}^\alpha & V_{2i}^\alpha\end{bmatrix} \tag{17f}$$

と分解する．

Kucera により得られた結果[7]を用いると，(17)式において $\alpha=0$，つまり，パラメータ変動のない制御対象の最適補償に関して次の補題が得られる．

補題１：　次の制御対象

$$x_{i+1}=\overline{\Phi}x_i+\overline{\Gamma}u_i+v_i \tag{18a}$$

$$y_i=\overline{C}x_i+\overline{D}u_i+w_i \tag{18b}$$

に対し，動的補償器，

$$\hat{x}_{i+1}=F\hat{x}_i+Ky_i \tag{19a}$$

$$u_i=-L\hat{x}_i \tag{19b}$$

を用いる．また，評価関数を

$$\sigma_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i^TQy_i+u_i^TRu_i\right)\right\} \tag{20}$$

とする．ここで，評価関数の重み行列に関連した行列を次のように分解する．

$$\begin{bmatrix}\overline{C}^T Q\overline{C} & \overline{C}^T Q\overline{D}\\ \overline{D}^T Q\overline{C} & R+\overline{D}^T Q\overline{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_1^T\\ V_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1 & V_2\end{bmatrix} \tag{21}$$

$(\overline{\Phi},\overline{\Gamma})$ が可安定，かつ，$(\overline{\Phi}-K\overline{C},V^{\frac{1}{2}}-KW^{\frac{1}{2}})$ が任意の K について可安定であり，また，$(\overline{\Phi},\overline{C})$ が可検出，かつ，$(\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}\Lambda,V_1-V_2\Lambda)$ が任意の Λ について可検出であるとする．このとき，

$$K=\overline{\Phi}P\overline{C}^T(\overline{CPC^T}+W)^+ \tag{22a}$$

$$L=\left(\overline{\Gamma}^T S\Gamma^T+R+\overline{D}^T Q\overline{D}\right)^+ \times\left(\overline{\Gamma}^T S\overline{\Phi}+\overline{C}^T Q\overline{D}\right) \tag{22b}$$

は σ_∞ を最小にし，かつ，$\overline{\Phi}-K\overline{C}$, $\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L$ を安定にする唯一のフィードバックゲインである．

ここで，自乗平均強可安定性と自乗平均強可検出性の定義をする．

定義 1：　$(\Phi_i-KC_i,\Gamma_i-KD_i)$ が任意の K に対して自乗平均可安定であるなら，$(\Phi_i,\Gamma_i,C_i,D_i)$ は自乗平均強可安定であるという．

定義 2：　$(\Phi_i-\Gamma_i L,C_i-D_i L)$ が任意の L に対して自乗平均可検出であるなら，$(\Phi_i,\Gamma_i,C_i,D_i)$ は自乗平均強可検出であるという．

また，自乗平均可安定性，自乗平均可検出性に関して次の補題が得られる．

補題 2：　(Φ_i,Γ_i) が自乗平均可安定であるならば，$\alpha\in[0,1]$ に対して $(\Phi_i^\alpha,\Gamma_i^\alpha)$ は自乗平均可安定となる．

証明　自乗平均可安定性の定義 [1]より簡単に証明できる．

$$\Phi_i^\alpha-\Gamma_i^\alpha L=\left(\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L\right)+\alpha\left(\tilde{\Phi}_i-\tilde{\Gamma}_i L\right) \tag{23}$$

であるから，(Φ_i,Γ_i) が自乗平均可安定，つまり，$\alpha=1$ のとき $(\Phi_i^\alpha-\Gamma_i^\alpha L)$ が自乗平均安定であるならば，$\alpha\in[0,1]$ に対して $(\Phi_i^\alpha-\Gamma_i^\alpha L)$ は自乗平均安定となる．ゆえに $(\Phi_i^\alpha,\Gamma_i^\alpha)$ は自乗平均可安定である．　□

補題 3：　(Φ_i,C_i) が自乗平均可検出であるならば，$\alpha\in[0,1]$ に対して $(\Phi_i^\alpha,C_i^\alpha)$ は自乗平均可検出となる．

証明　自乗平均可検出性の定義 [1]より簡単に証明できる．

$$\overline{\left\|y_i^\alpha\right\|^2}=\overline{x_i^{\alpha T}C^T C x_i^\alpha}+\alpha\overline{x_i^{\alpha T}\tilde{C}_i^T\tilde{C}_i x_i^\alpha} \tag{24}$$

であるから，(Φ_i,C_i) が自乗平均可検出であるならば，$\alpha\in[0,1]$ に対して $\overline{\left\|y_i^\alpha\right\|^2}=0$ は，$i\to\infty$ で $\overline{\left\|x_i^\alpha\right\|^2}=0$ を意味する．ゆえに，$(\Phi_i^\alpha,C_i^\alpha)$ は自乗平均可検出である．　□

非線形変換 $C_{K,L}:S^n\times S^n\times S^n\times S^n\to S^n\times S^n\times S^n\times S^n$ を

$$\begin{aligned}C_{K,L}=\Big(&\overline{(\Phi-\Gamma L)^T X_1(\Phi-\Gamma L)}\\&+\overline{(\tilde{\Phi}-K\tilde{C})^T X_2(\tilde{\Phi}-K\tilde{C})}\\&+\overline{(C-DL)^T Q(C-DL)}\\&+L^T(R+\overline{\tilde{\Gamma}^T X_2\tilde{\Gamma}})L,\\&\left(\overline{\Phi}-K\overline{C}\right)^T X_2\left(\overline{\Phi}-K\overline{C}\right)\\&+L^T\Big(\overline{\Gamma^T X_1\Gamma}+R+\overline{\tilde{\Gamma}^T X_2\tilde{\Gamma}}\\&\overline{D^T QD}\Big)L,\\&\overline{(\Phi-KC)X_3(\Phi-KC)^T}\\&+\overline{(\tilde{\Phi}-\tilde{\Gamma}L)X_4(\tilde{\Phi}-\tilde{\Gamma}L)^T}\\&+K(W+\overline{\tilde{C}X_4\tilde{C}^T})K^T+V,\\&\left(\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L\right)X_4\left(\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L\right)^T\\&K\left(\overline{CX_3C^T}+W+\overline{\tilde{C}X_4\tilde{C}^T}\right)K^T\Big)\end{aligned} \tag{25}$$

で定義する．ここで，$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)$，$X_1,X_2,X_3,X_4\in S^n$ である，また，

$$F_X=\overline{\Phi}-\overline{\Gamma}L-K\overline{C}+K\overline{D}L, \tag{26a}$$

$$K_X = \overline{\Phi X_3 C^T}(\overline{CX_3C^T} + \overline{\tilde{C}X_4\tilde{C}^T} + W)^+ \tag{26b}$$

$$L_X = (\overline{\Gamma^T X_1 \Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}^T X_2 \tilde{\Gamma}} + R + \overline{D^T QD})^+ \times (\overline{\Gamma}^T X_1 \overline{\Phi} + \overline{D}^T Q\overline{C}) \tag{26c}$$

とし，非線形変換 $C: S^n \times S^n \times S^n \times S^n \to S^n \times S^n \times S^n \times S^n$ を

$$CX = C_{K_X, L_X} X \tag{27}$$

とする．方程式 $(S, \hat{S}, P, \hat{P}) = C(S, \hat{S}, P, \hat{P})$ は式(15)と等価である．

以上より確率変動パラメータを含む線形系の最適補償問題に関して，次の定理が得られる．

定理 1： 評価関数の重み行列に関する行列を，

$$\begin{bmatrix} C_i^T QC_i & C_i^T QD_i \\ D_i^T QC_i & R + D_i^T QD_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1i}^T \\ V_{2i}^T \end{bmatrix} [V_{1i} \quad V_{2i}] \tag{28}$$

と分解する．(Φ_i, Γ_i) が自乗平均可安定，かつ，(Φ_i, C_i) が自乗平均可検出であるとする．また，$(\Phi_i, V^{\frac{1}{2}}, C_i, W^{\frac{1}{2}})$ が自乗平均強可安定，かつ，$(\Phi_i, \Gamma_i, V_{1i}, V_{2i})$ が自乗平均強可検出であると仮定する．このとき $X = CX$ の唯一の非負定解 $Y = \lim_{i \to \infty} C^i(\Theta, \Theta, \Theta, \Theta)$ が存在する．また，

$$\left(F^*, K^*, L^*\right) = \left(F_Y, K_Y, L_Y\right) \tag{29}$$

$$\sigma_\infty^* = \mathrm{tr}\left[\overline{C^T QC}Y_3 + L^T RLY_4 + \left(\overline{C} - \overline{D}L\right)^T Q\left(\overline{C} - \overline{D}L\right)Y_4\right] \tag{30}$$

である．ただし $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$，$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in S^n$ である．

証明　$\alpha \in [0,1]$ に対して，補題 2 より，(Φ_i, Γ_i) が自乗平均可安定ならば，$(\Phi_i^\alpha, \Gamma_i^\alpha)$ も自乗平均可安定である．また，補題 3 より (Φ_i, C_i) が自乗平均可検出であるならば，$(\Phi_i^\alpha, C_i^\alpha)$ も自乗平均可検出である．さらに，$(\Phi_i, V^{\frac{1}{2}}, C_i, W^{\frac{1}{2}})$ が自乗平均強可安定であるならば $(\Phi_i^\alpha, V^{\frac{1}{2}}, C_i^\alpha, W^{\frac{1}{2}})$ も自乗平均強可安定であり，$(\Phi_i, \Gamma_i, V_{1i}, V_{2i})$ が自乗平均強可検出であるならば $(\Phi_i^\alpha, \Gamma_i^\alpha, V_{1i}^\alpha, V_{2i}^\alpha)$ も自乗平均強可検出である．(25), (26), (27), 式の $\Phi_i, \Gamma_i, C_i, D_i, \Phi_i'$ を $\Phi_i^\alpha, \Gamma_i^\alpha, C_i^\alpha, D_i^\alpha, \Phi_i'^\alpha$ で置き換えたときの非線形変換 C を C^α であらわす．位相次元理論の結果 [3) 4)]を用いると，$X = C^\alpha X$ の解 Y^α の個数は $\alpha \in [0,1]$ において一定であることが示される．補題 3 より Y^0 は唯一の存在が示されているので，$\alpha \in [0,1]$ において Y^α は 1 つだけ存在する．したがって，Y^1 つまり Y は唯一存在し，制御対象(1), (2)式を自乗平均安定化し，評価関数(3)式を最小とする補償器 (F^*, K^*, L^*) が唯一存在する

4. 数値例

次の制御対象を考える．

$$\overline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.7092 & 0.3017 \\ 0.1814 & 0.9525 \end{bmatrix} \tag{31a}$$

$$\overline{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.7001 \\ 0.1593 \end{bmatrix} \tag{31b}$$

$$\overline{C} = [0.3088 \quad 0.5735] \tag{31c}$$

$$\overline{D} = 0.015 \tag{31d}$$

$$\overline{\tilde{\Phi} \otimes \tilde{\Phi}} = \beta(\overline{\Phi} \otimes \overline{\Phi}) \tag{32a}$$

$$\overline{\tilde{\Gamma} \otimes \tilde{\Gamma}} = \beta(\overline{\Gamma} \otimes \overline{\Gamma}) \tag{32b}$$

$$\overline{\tilde{C} \otimes \tilde{C}} = \beta(\overline{C} \otimes \overline{C}) \tag{32c}$$

$$\overline{\tilde{D} \otimes \tilde{D}} = \beta(\overline{D} \otimes \overline{D}) \tag{32d}$$

ここで，$\otimes$ はクロネッカー積をあらわす．β が大きくなるほど，パラメータの変動が大きいことを意味する．また，

$$V = \begin{bmatrix} 0.5627 & 0 \\ 0 & 0.7357 \end{bmatrix} \tag{33a}$$

$$W = 0.2588 \tag{33b}$$

$$Q = 0.7350 \tag{34a}$$

$$R = 0.6644 \tag{34b}$$

とする．

β を 0 から 0.5 まで変化させた場合について，

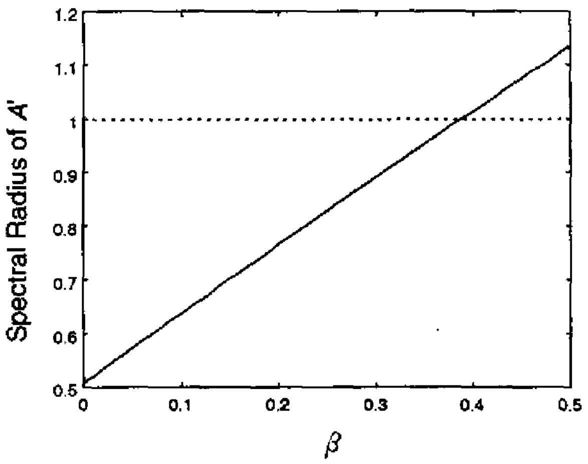

Fig. 1　Spectral Radius of *A'*

定理 1 の結果に従い補償器の計算を行なう．ただし，制御対象が自乗平均可安定性，自乗平均可検出性を満たしているかどうかの判定を行なっていないので，補償器の最適性は保証されない．

結果を Fig. 1 に示す．横軸は β．縦軸は(13a)式の A' のスペクトル半径である．このスペクトル半径が 1 以下であれば，系は自乗平均安定である [1]．Fig. 1 より，β が大きくなるに連れてスペクトル半径も大きくなり，β が 0.4 程度より大きくなると系が不安定になることがわかる．

5. おわりに

本報告では，制御対象のパラメータが確率系列である線形離散時間システムに対し，最適な補償器の唯一の存在の必要十分条件を示した．その条件として，自乗平均強可安定性，自乗平均強可検出性という概念を定義した．

今後は，自乗平均強可安定性，自乗平均強可検出性の判定方法について検討していきたい．

参考文献

1) Willem L. De Koning: Compensatability and Opimal Compensation of System with White Parameters,IEEE Trans. Automat. Contr., vol.37, No. 5, May 1992.

2) Dennis S. Bernstein, Wassim M. Haddad: Optimal projection equations for discrete-time fixed order dynamic compensation of linear systems with multiplicative white noise, Int. J. Contr., vol. 46, pp. 65-73, 1987.

3) S Richter: Continuation methods: theory and applications, IEEE Trans, Automat. Contr. , vol AC-28, pp. 660-665, 1983.

4) Mariton and P. Bertrand: A homotopy algorithm for solving coupled Riccati equations, Opt. Contr. Appl. Meth., vol. 6, pp. 351-357, 1985.

5) T. Ishihara, K. Abe, H. Takeda: A Note on Modeling Error of Linear Stochastic Systems with a White Coefficient, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, pp. 733-736, 1982.

6) Tadashi Ishihara, Ken-ichi Abe, Hiroshi Takeda: Stability analysis of an optimal linear system with white coefficients: the influence of an incorrect covariance of the coefficients, Int. J. Contr., vol. 42, pp. 449-456, 1985.

7) V.Kucera: Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

8) 児玉慎三, 須田信英: システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会，1978.