計測自動制御学会東北支部 第163回研究集会 (1996.10.18~19)
資料番号 163-5

モデリングと制御の融合についての一考察

A study on a fusion of modeling and control

○小原 貴光*, 渡部 慶二*, 山田 功*, 斎藤 周次*

○ T. Obara*, K. Watanabe*, K. Yamada*, S. Saitoh*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： モデリング (modeling), ロバスト安定 (robust stability), 内部安定 (internal stability), 飽和要素 (the element with saturation), 自励振動 (limit cycle)

連絡先： 〒992 米沢市城南4-3-16 山形大学大学院 工学研究科 電子情報工学専攻 渡部研究室
小原 貴光, Tel.: (0238)26-3326, Fax.: (0238)24-2752, E-mail: obara@ewky.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

フィードバック制御系の設計の目的は、出力が安定でかつ、目標値に対して高速で小偏差に追従し、外乱に対しては高速に0に整定する制御系を設計することである。そのためには、感度関数 $S(s) \to 0$ にする必要がある。しかし、感度関数 $S(s) \to 0$ にすると、相補感度関数 $T(s) \to 1$ となり、モデル誤差 $\Delta G(s)$ に対して制御系が不安定になる。そこで、重み関数 $W_S(s), W_T(s)$ を導入し、感度仕様 $\| W_S(s)S(s) \|_\infty < 1$ と相補感度仕様 $\| W_T(s)T(s) \|_\infty < 1$ を満たすように設計することがS考えられた。これらのことを実現する方法として、H_∞ 制御や μ-解析などがある。これらの方法は、モデル誤差 $\Delta G(s)$ に基づいて重み関数 $W_T(s)$ が決まり、それから、重み関数 $W_S(s)$ が決めていた。そのために、パラメータ変動やモデル誤差 $\Delta G(s)$ に対してはロバスト安定にする良い方法であるが、モデル誤差 $\Delta G(S)$ が大きいと低感度にできる範囲が狭くなる。良好な制御特性を得るには、モデル誤差 $\Delta G(s)$ を小さくする必要がある。

このようにモデリングと制御は密接に関係しているが、従来はモデリングと制御は別々に検討されてきた。ここでは、モデリングと制御を融合する一つの方法を提案する。具体的には、重み関数 $W_S(s)$ だけを与え、次の感度仕様 $\| W_S(s)S(s) \|_\infty < 1$ を満たし、モデル誤差 $\Delta G(s)$ の影響下で不安定にならないようにモデル $G(s)$ を修正していく方法である。定位系においては文献1)で報告されているので、ここでは、1入力1出力、不安定零点を持たず、無定位系の制御対象に対して、相対次数および高周波ゲインが未知の場合に対するモデリングと制御の融合の方法を提案する。

2. コントローラパラメトリゼーション

制御対象 $G_p(s)$ を無定位系で、

$$G_p(s) = k_0 \frac{\prod_{i=1}^{n-q}(1+a_i s)}{s\prod_{i=2}^{n}(1+b_i s)} \tag{1}$$

とし、そのモデル $G(s)$ を

$$G(s) = \bar{k}_0 \frac{\prod_{i=1}^{\bar{n}-\bar{q}}(1+\bar{a}_i s)}{s\prod_{i=2}^{\bar{n}}(1+\bar{b}_i s)} \tag{2}$$

とする。ただし、n, qは $G_p(s)$ の分母の次数、相対次数で未知、$\bar{n}, \bar{q}$は $G(s)$ の分母の次数、相対次数であり、$q \geqq \bar{q}$とする。また、$\Re(a_i) > 0, \Re(b_i) > 0, \Re(\bar{a}_i) > 0, \Re(\bar{b}_i) > 0, k_0 \approx \bar{k}_0 > 0$ とする。

制御対象 $G_p(s)$ とモデル $G(s)$ の間に $G_p(s) = G(s)\{1+\Delta G(s)\}$ の関係があり、$\Delta G(s)$ はモデル誤差である。

$G_p(s) = G(s)$ としたときの系に $Fig.1$ のフィードバック制御を行う。

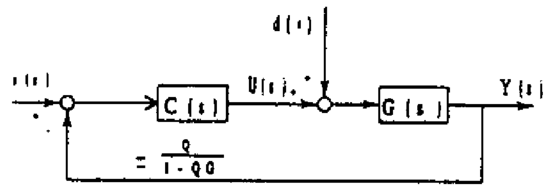

Fig. 1 Controller parametrization

コントローラ $C(s)$ を

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1-Q(s)G(s)} \tag{3}$$

と自由パラメータ $Q(s)$ を用いてパラメータ化する。

$Fig.1$ の制御系の安定性を考える。

内部安定性

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QG & \{1-QG\}G \\ Q & -QG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} \tag{4}$$

(4) 式のすべての要素が安定なときに内部安定と呼ぶ。

$$\begin{cases} 1.Q(s) \text{ が安定} \\ 2.Q(s)G(s) \text{ が安定} \Rightarrow \\ \quad G(s) \text{ の不安定極を } Q(s) \text{ の零点で消去} \\ 3.\{1-Q(s)G(s)\}G(s) \text{ が安定} \Rightarrow \\ \quad G(s) \text{ の不安定極を } \{1-Q(s)G(s)\} \text{ の零点} \\ \quad \text{で消去} \end{cases}$$

1.2.3.を満たすときに限って、制御系を内部安定にできる。

$G_p(s) \neq G(s)$ のときの感度関数 $S(s)$ は

$$S(s) = 1 - Q(s)G(s) \tag{5}$$

と表せる。相補感度関数 $T(s)$ は

$$T(s) = Q(s)G(s) \tag{6}$$

と表せる。

以下では、重み関数 $W_S(s)$ を

$$W_S(s) = \frac{K}{s} \qquad K > 0 \tag{7}$$

で与えたとき、感度仕様 $\| W_S(s)S(s) \|_\infty < 1$ を満たし、ロバスト安定な制御系の構成を考える。

補償器 $Q(s)$ を $Q(s) = Q_a(s) \cdot Q_b(s)$ とすると、$Q_a(s)$ は条件 1.と 2.より、

$$Q_a(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{(1+\tau s)^{\bar{q}}} = \frac{f(s)}{G(s)} \quad f(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^{\bar{q}}} \tag{8}$$

に選ぶ。$f(s)$ はプロパーにするためのフィルタであり、時定数τは調節パラメータ（正）である。

$Q_b(s)$ は条件 3.と感度仕様 $\| W_S(s)S(s) \|_\infty < 1$ を満たすために $W_S(s)\{1-Q_a(s)Q_b(s)G(s)\}G(s)$ が安定になるように決めると、

$$Q_b(s) = \frac{1+(\bar{q}+1)\tau s}{1+\tau s} \tag{9}$$

となる。ただし、$\bar{q}$は$G(s)$の相対次数とする。

以上より、補償器$Q(s)$は、

$$\begin{aligned} Q(s) &= Q_a(s) \cdot Q_b(s) \\ &= \frac{1}{G(s)} \frac{1}{(1+\tau s)^{\bar{q}}} \cdot \frac{1+(\bar{q}+1)\tau s}{(1+\tau s)} \\ &= \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1+(\bar{q}+1)\tau s}{(1+\tau s)^{\bar{q}+1}} \qquad (10) \end{aligned}$$

とする。(5) 式と (6) 式と (10) 式から

$$S(s) = 1 - \frac{1+(\bar{q}+1)\tau s}{(1+\tau s)^{\bar{q}+1}} \qquad (11)$$

$$T(s) = \frac{1+(\bar{q}+1)\tau s}{(1+\tau s)^{\bar{q}+1}} \qquad (12)$$

となる。

$\| W_S(s)S(s) \|_\infty < 1$を満たすように$Q(s)$を決定する。

このとき、*Fig.*1 の制御系の安定性について、次の定理がある。

定理 2.1 *Fig.*1 の制御系において、制御対象$G_p(s)$とモデル$G(s)$はいずれも無定位系とする。モデル誤差$\Delta G(s)$は$\dfrac{G_p(s)}{G(s)} - 1$で、補償器$Q(s)$は (10) 式で与えられるとする。$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$のベクトル軌跡が点$(-1, j0)$の左側を回らないとき、そのときに限って*Fig.*1 の制御系は内部安定である。

(証明) ナイキストの安定判別法から、明らかである。□

$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$のベクトル軌跡が*Fig.*2 のように点$(-1, j0)$を回らない場合は安定である。$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$のベクトル軌跡が*Fig.*3 のように点$(-1, j0)$を回る場合は不安定である。

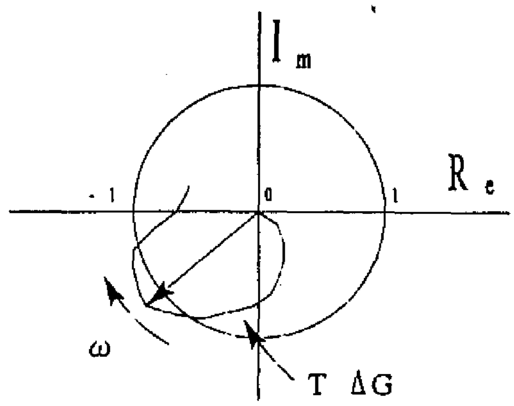

Fig. 2 Nyquist curve of $T\Delta G$

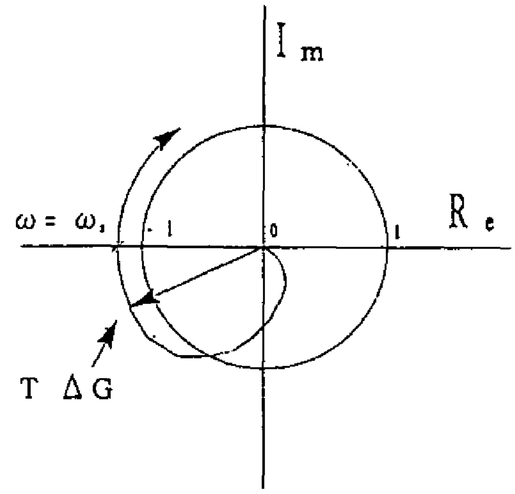

Fig. 3 Nyquist curve of $T\Delta G$

$\| W_S(s)S(s) \|_\infty < 1$を満たす補償器$Q(s)$に対し、ロバスト安定条件が満たされないときロバスト安定になるようにモデル$G(s)$の修正を行う。

3. モデルと制御の融合の原理

$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$のベクトル軌跡が*Fig.*4 のような場合には、$\omega = \omega_2$の近くのベクトルを*Fig.*5 のように位相を進ませてやれば安定化の可能性がでてくる。

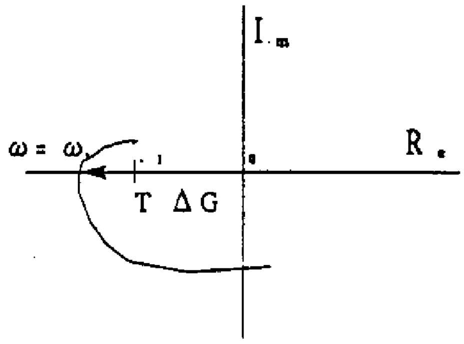

Fig. 4　Nyquist curve of $T\Delta G$

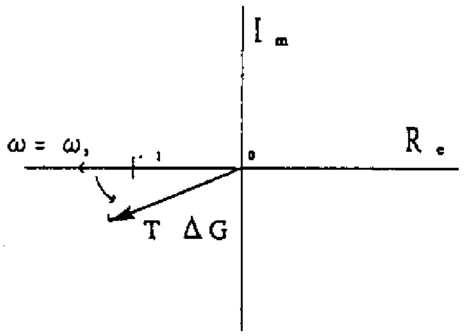

Fig. 5　Nyquist curve of $T\Delta G$

相補感度関数を$T(s)\approx 1$とすると、$Fig.5$は$Fig.6$となる。

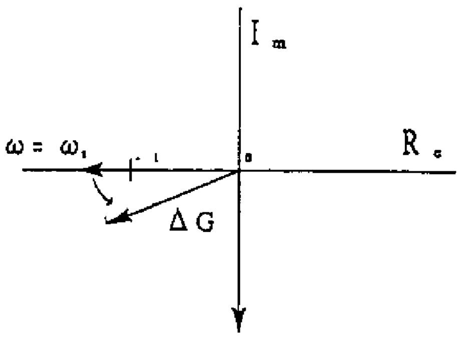

Fig. 6　nyquist curve of $T\Delta G(T\approx 1)$

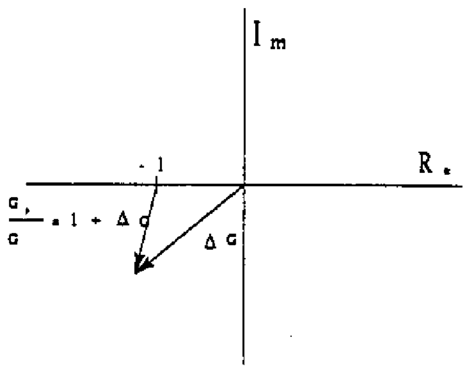

Fig. 7　phase-lead compensation

$Fig.7$より、モデル誤差$\Delta G(s)$の位相を進めてやるには、$1+\Delta G(s)$の位相を進めてやればよいことがわかる。よって、位相を$\frac{G_p(s)}{G(s)}\times(1+\bar{b}_i s)=\frac{G_p(s)}{G(s)\times\frac{1}{(1+\bar{b}_i s)}}$と進み補償してやればよい。

以上から、実際にモデル$G(s)$を

$$G(s)\times\frac{1}{1+\bar{b}_i s} \tag{13}$$

$$\bar{b}_i=\frac{1}{\alpha\omega_2}\quad(0<\alpha\leq 1) \tag{14}$$

に修正すればよい。1個で足りないときは、2個、3個と増やせばよい。ただし、$q<\bar{q}$になると、$\frac{G_p(j\infty)}{G(j\infty)}\to\infty$になり、そこが補償の限界である。

振動角周波数ω_2を安定に測定するため$Fig.8$の系を考える。

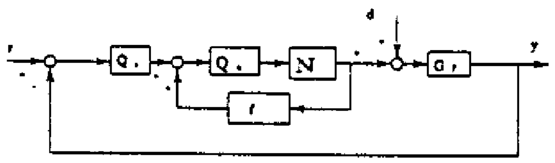

Fig. 8　Nonlinear system

ただし、$N(,)$は$Fig.9$のような飽和要素（リミッター）である。

$$N(x,D)=\begin{cases} DL & x\geqq D\\ xL & |x|<D\\ -DL & x\leqq -D\end{cases} \tag{15}$$

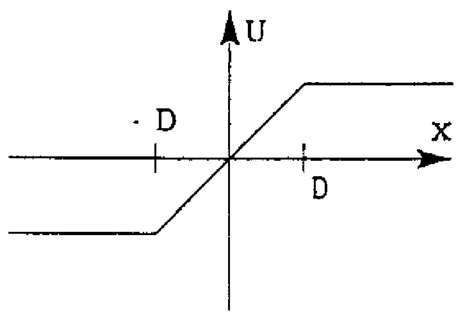

Fig. 9　the element with saturation

Lは傾斜で、Dはしきい値、xは入力である。ここで、$L=1$とする。

$N=1$のとき$Fig.8$の系は$Fig.1$の系と等価である。

飽和要素の記述関数は次式で与えられる。

$$N_f = \frac{2}{\pi}[\sin^{-1}(\frac{D}{x})+\frac{D}{x}\sqrt{1-(\frac{D}{x})^2}] \qquad x \geqq D \tag{16}$$

$Fig.8$の入出力伝達関数は

$$G_{yr}(s) = \frac{NQ(s)G_p(s)}{1+NT(s)\Delta G(s)} \tag{17}$$

となる。特性方程式は

$$1+NT(s)\Delta G(s) = 0 \tag{18}$$

である。ナイキストの安定判別法から$Fig.10$に示すように$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$のベクトル軌跡が、$-\dfrac{1}{N(x)}$と交点を持てば、振幅$x=x_0$、角周波数$\omega=\omega_2$の安定な自励振動が発生する。

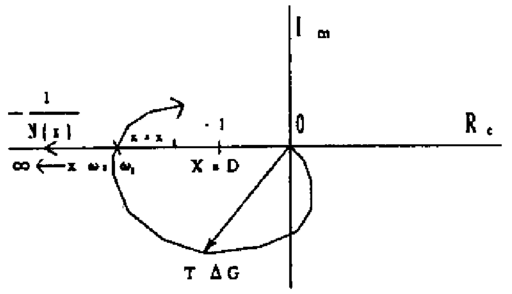

Fig. 10　Nyquist curve of $-\frac{1}{N(x)}$ and $T\Delta G$

$-\dfrac{1}{N(x)}$は、$x=D$で-1なり、$x\to\infty$にすると、$-\dfrac{1}{N(x)}\to-\infty$になる。したがって、$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$のベクトル軌跡が点$(-1,j0)$を回らなければ、交点を持たず、自励振動が生じない。

$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$のベクトル軌跡が点$(-1,j0)$の左側を回ると、必ず$-\dfrac{1}{N(x)}$と交点を持ち、自励振動が生じる。$T(j\omega)\Delta G(j\omega)$の軌跡から実軸と交叉する角周波数$\omega=\omega_2$がわかる。この$\omega_2$を用いて、(13)式,(14)式でモデル$G(s)$を調整すればよい。

4. 調整アルゴリズム

制御対象は無定位系とする。

ステップ1：ステップ応答や周波数応答等から、初期モデル$G(s)$を$sG(0)=sG_p(0)$となるように決める。(不安定零点を持たないとする。)

ステップ2：重み関数$W_S(s)$を決定する。

ステップ3：モデル$G(s)$の相対次数の補正の最大値$\bar{q}_{max}$を決定する。

ステップ4:$S_{max}(s) = 1-\dfrac{1+(\bar{q}_{max}+1)\tau s}{(1+\tau s)^{\bar{q}_{max}+1}}$が条件$\| W_S(s)S(s) \|_\infty < 1$を満たすように時定数$\tau$を決定する。

ステップ5:$f(s)=\frac{1}{(1+\tau s)^{\bar{q}}}, Q_a(s)=\frac{1}{G(s)}\frac{1}{(1+\tau s)^{\bar{q}}}$, $Q_b(s)=\frac{1+(\bar{q}+1)\tau s}{1+\tau s}$とする。

ステップ6：しきい値Dを一定値に固定し、図.11の系を構成する。

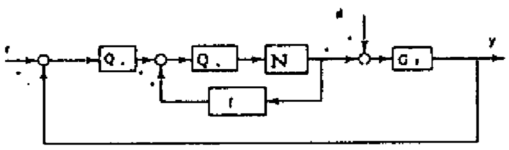

Fig. 11　Nonlinear system

ステップ7：ステップ関数を入力し、図.11の系で自励振動が発生しなければ、ステップ8へ。図.11の系で自励振動が発生すれば、振動角周波数を測定し、$G(s)\to G(s)\times\frac{1}{1+\bar{b}_i s}(\bar{b}_i=\frac{1}{\alpha\omega_2}(0<\alpha\leq 1))$になるようにモデル$G(s)$を修正して、ステップ5へ。ただし、モデル$G(s)$の相対次数$\bar{q}$がモデル$G(s)$の相対次数の補正の最大値$\bar{q}_{max}$より大きくなったら、相対次数の補正の最大値$\bar{q}_{max}$を変えステップ4へ。

ステップ8：図.12の系を構成する。

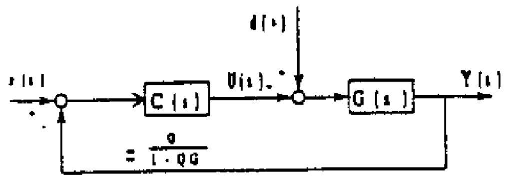

Fig. 12 feedback control system

5. 数値例

制御対象

$$G_p(s) = \frac{2.1639}{s^3 + 1.5012s^2 + 7.7284s} \qquad (19)$$

とする。

次に、重み関数 $W_S(s)$ を

$$W_S(s) = \frac{10}{s} \qquad (20)$$

とする。

1 回目

制御対象のステップ応答を $Fig.13$ に示す。

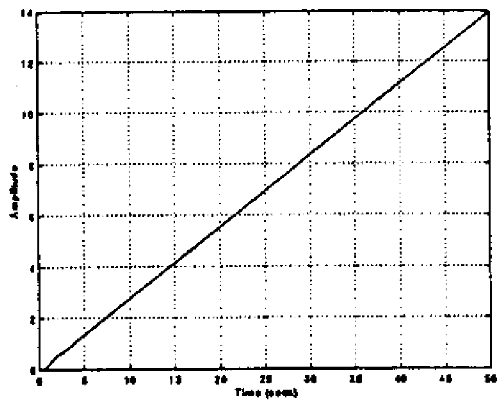

Fig. 13 unit step response of $G_p(s)$

上図より、初期モデル $G(s)$ を

$$G(s) = \frac{0.28}{s} \qquad (21)$$

と決定する。

モデル $G(s)$ の相対次数の最大値 $\bar{q}_{max}$ を $\bar{q}_{max} = 3$ とする。

重み関数 $|1/W_S(s)|$ と感度関数 $|S(s)|$ を $Fig.14$ に示す。下図より、時定数 τ を $\tau = 0.05$ と決定した。

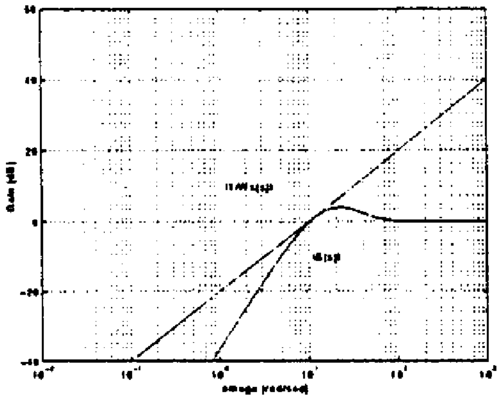

Fig. 14 weighting function $|1/W_S(s)|$ and sensitivity function $|S(s)|$

(8), (9) 式から、フィルタ $f(s)$ 補償器 $Q_a(s), Q_b(s)$ は以下のようになる。

$$f(s) = \frac{1}{1+0.05s} \qquad (22)$$

$$Q_a(s) = \frac{s}{0.28(1+0.05s)} \qquad (23)$$

$$Q_b(s) = \frac{1+0.1s}{1+0.05s} \qquad (24)$$

ただし、しきい値 D を 0.1 とする。

$Fig.11$ の系のステップ応答を $Fig.15$ に示す。

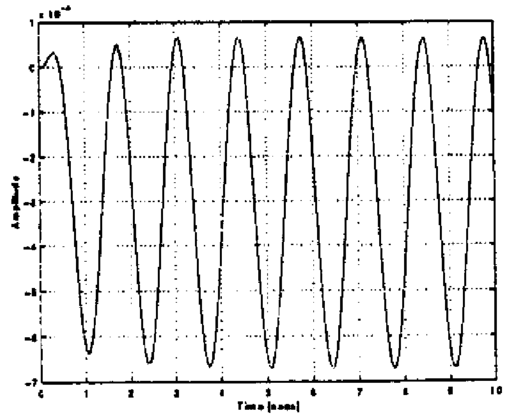

Fig. 15 unit step response of Fig.11 in $\bar{q} = 1$

自励振動を発生し、振動角周波数は $\omega_2 = 4.7872$ である。

２回目

$\bar{b}_2 = \frac{1}{\alpha\omega_2} = \frac{1}{0.5\omega_2} = 0.4178$ に選ぶ。(13),(14) 式より、新たなモデル $G(s)$ は次のように

$$G(s) = \frac{0.28}{s(1+0.4178s)} \tag{25}$$

となる。

(8),(9) 式から、フィルタ $f(s)$,補償器 $Q_a(s), Q_b(s)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{(1+0.05s)^2} && (26) \\ Q_a(s) &= \frac{s(1+0.4178s)}{0.28(1+0.05s)^2} && (27) \\ Q_b(s) &= \frac{1+0.15s}{1+0.05s} && (28) \end{aligned}$$

Fig.11 の系の単位ステップ応答を *Fig*.16 に示す。

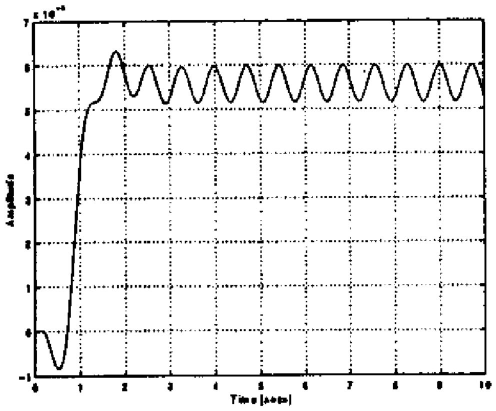

Fig. 16　unit step response of Fig.11 in $\bar{q} = 2$

自励振動を発生し、振動角周波数は$\omega_2 = 9.1392$ である。

３回目

$\bar{b}_3 = \frac{1}{\alpha\omega_2} = \frac{1}{0.5\omega_2} = 0.2188$ に選ぶ。(13),(14) 式より、新たなモデル $G(s)$ は次のように

$$G(s) = \frac{0.28}{s(1+0.4178s)(1+0.2188s)} \tag{29}$$

となる。

(8),(9) 式から、フィルタ $f(s)$,補償器 $Q_a(s), Q_b(s)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{(1+0.05s)^3} && (30) \\ Q_a(s) &= \frac{s(1+0.4178s)(1+0.2188s)}{0.28(1+0.05s)^3} && (31) \\ Q_b(s) &= \frac{1+0.2s}{1+0.05s} && (32) \end{aligned}$$

Fig.11 の系の単位ステップ応答を *Fig*.17 に示す。

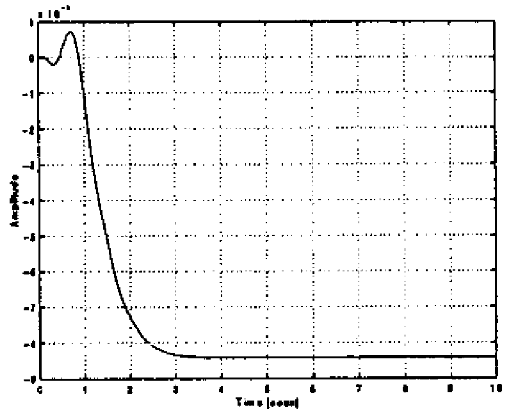

Fig. 17　unit step response of Fig.11 in $\bar{q} = 3$

上図より、制御系が安定なった。ここで、*Fig*.18 の系を構成する。

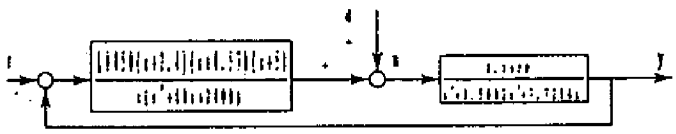

Fig. 18　feedback control system

Fig.18 の系の単位ステップ応答を *Fig*.19 に示す。

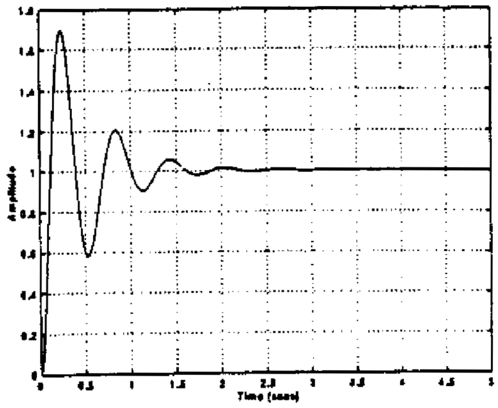

Fig. 19 output response of unit step function

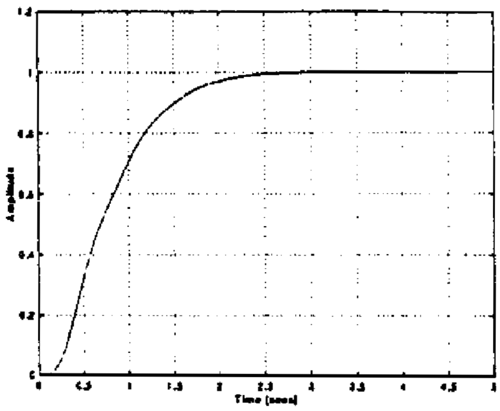

Fig. 22 output response of unit step function

$Fig.18$ の系の単位ステップ外乱応答を $Fig.20$ に示す。

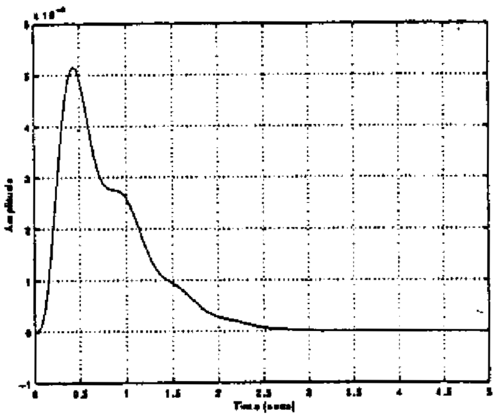

Fig. 20 output response of unit step function with disturbance

$Fig.18$ の系の零点を考慮に入れてつぎのように変形する。

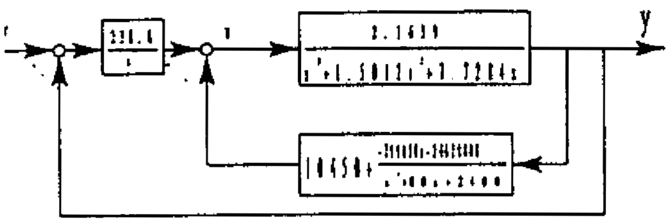

Fig. 21 trnsformed feedback control system

このときのステップ応答を $Fig.22$ に示す。

6. おわりに

本報告では、1入力1出力、不安定零点を持たず、無定位系の制御対象の相対次数、高周波ゲインが未知の場合のモデリングと制御の融合の方法を提案した。この方法は、リミッターを利用することにより制御対象とモデルの相対次数がずれている場合に出力が過度に大きくなることを抑制し、制御対象を壊すことなく、モデルの相対次数を調整する方法であり、これによって、制御系の内部安定性とロバスト安定性を保証しながら、制御系の低感度を実現できるようになった。

参考文献

1) Z.B.Shu, G.R.Izuta, K.Watanabe and K.Yamada : Unification of Modeling and Control for Desired Control Performances,IEEE CDC96,(to appear)

2) 平井、池田: 非線形制御システムの解析,59/80, オーム社,(1986)

3) Morari,M. and Zafiriou E.: Robust Process Control,85/112,Prentice Hall,(1989)

4) Doyle,J.C and Francis,B.A and Tannenbaun,A.R: Feedback Control Theory,66/68,Macmillan Publishing,(1992)