

一般的な非線形系に対するモデル追従形制御

The Model Following Control System for General Nonlinear Systems

○田中 正行, 大久保 重範

○Masayuki Tanaka, Shigenori Okubo

山形大学

Yamagata University

キーワード: モデル追従形制御系 (Model Following Control System), 非線形システム (Nonlinear System), 内部状態の有界性 (Boundedness Conditions of Internal States), 遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm)

連絡先: 〒992 山形県米沢市城南 4-3-16
山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室 田中正行

Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: tanaka@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

本稿では、一般的な非線形系に対するモデル追従形制御系の設計法を考察する。大久保¹⁾により線形系と非線形系が混在する形式の制御対象に対して内部状態が有界な制御系の設計法が開発された。今回は制御入力も非線形として含まれる一般的な非線形制御系を扱う。制御入力を新しい状態に含めることで、設計者が自由に決めることが可能な自由パラメータが生成され、それを使うことで内部状態が有界なモデル追従形制御系が設計可能になることを示す。

2. 制御系の設計

制御対象は次式で与える。これは、状態と制御入力の両者について非線形であるような一般的な

制御システムである。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

$$y = Cx + d_0(t) \quad (2)$$

x は内部状態、 u は制御入力、 y は出力、 $d_0(t)$ は有界な外乱である。(1),(2)式に対して次のような系を作る。これは、最初の制御入力 u を状態に含め、新たな制御入力 u_1 が形式的に線形になるような系に変換したものである。

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}u + f_1(x, u) \quad (3)$$

$$\dot{u} = A_{21}x + A_{22}u + g_1(x, u) + Bu_1 \quad (4)$$

$$y = Cx + d_0(t) \quad (5)$$

各状態、行列の次数は次のようにする。

$$x \in R^n, u \in R^l, y \in R^l,$$

$$B \in R^{l \times l}, C \in R^{l \times n},$$

$$A_{11} \in R^{n \times n}, A_{12} \in R^{n \times l},$$

$$A_{21} \in R^{l \times n}, A_{22} \in R^{l \times l}$$

この系は状態を以下のように採れば、(6),(7)式のようになる。これを S_1 の系と呼ぶことにする。

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + f_2(x_1) \quad (6)$$

$$y = C_1 x_1 + d_0(t) \quad (7)$$

ここで各ベクトルおよび行列は次のように与える。

$$x_1 = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, f_2(x_1) = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ g_1(x_1) \end{bmatrix}, \\ f_1(x_1) = f(x_1) - A_{11}x - A_{12}u \quad (8)$$

$f(x_1)$ は一般的な非線形関数である。 $g_1(x_1)$ は非線形関数の内積条件を満たすように選択される。

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, C_1 = [C \ 0] \quad (9)$$

なお、行列 A_1, B は全体を内部安定にするように設計する。 $p = d/dt$ として y は次のようになる。

$$y = C_1(pI - A_1)^{-1} B_1 u_1 \\ + C_1(pI - A_1)^{-1} f_2(x_1) + d_0(t) \quad (10)$$

よって、 S_1 系の伝達関数表示は次のようになる。

$$D(p)y = N(p)u_1 + N_f(p)f_2(x_1) \\ + D(p)d_0(t) \quad (11)$$

ここで、伝達関数行列と制御対象の各行列の関係は

$$N(p)/D(p) = C_1(pI - A_1)^{-1} B_1, \\ N_f(p) = C_1 \text{adj}(pI - A_1), D(p) = |pI - A_1| \quad (12)$$

である。ここで

$$N(p) = N_r p^{n+l-2} + N_1(p) \quad (13)$$

$$N_f(p) = C_1 p^{n+l-1} + N_{f_1}(p) \quad (14)$$

$$N_{f_1}(p) = C_1 \Gamma_{n+l-2} p^{n+l-2} + N_{f_2}(p) \quad (15)$$

として $N(p), N_f(p)$ よりそれぞれ次数の1つ低い $N_1(p), N_{f_1}(p)$ と、 $N_{f_1}(p)$ より次数の1つ低い $N_{f_2}(p)$

を用いると (11) 式の伝達関数表示は次のようになる。

$$D(p)y = p^{n+l-2} N_r v_z + N_1(p)u_1 \\ + N_{f_2}(p)f_2(x_1) + D(p)d_0(t) \quad (16)$$

ただし、

$$\Gamma_r(N(p)) = N_r, N_r = C_1 A_1 B_1, |N_r| \neq 0 \quad (17)$$

$$f_4(x_1) = C \left\{ \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial x^T} - T_r(A_1)I \right) f(x_1) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} \right) g_1(x_1) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} - A_{12} \right) (A_{21}x + A_{22}u) \right. \\ \left. + (T_r(A_1)I - A_{11}) \right. \\ \left. (A_{11}x + A_{12}u) \right\} \quad (18)$$

$$N_r v_z = \left(C \frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} B \right) u_1 + f_4(x_1) \quad (19)$$

である。なお、 S_1 系の伝達関数表示を (11) 式から (16) 式のように変形したのは、非線形関数の微分を使わないためである。つまり、(11) 式を用いると次数の高い $N_f(p)$ を用いることになり、それが非線形関数 $f_2(x_1)$ に係ってきて、 $f_2(x_1)$ の微分の項がでてきてしまい設計が不可能になるからである。

またモデルは次のようにする。

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r_m(t) \quad (20)$$

$$y_m = C_m x_m \quad (21)$$

x_m は内部状態、 r_m は参照入力、 y_m は出力である。また各ベクトルの次元は次のようにする。

$$x_m \in R^{n_m}, r_m \in R^{l_m}, y_m \in R^l$$

y_m は次のようになる。

$$y_m = C_m(pI - A_m)^{-1} B_m r_m \quad (22)$$

よって、モデルの伝達関数表示は次式で与えられる。

$$D_m(p)y_m = N_m(p)r_m(t) \quad (23)$$

ここで、伝達関数行列とモデルの各行列の関係は

$$\begin{aligned} N_m(p)/D_m(p) &= C_m(pI - A_m)^{-1}B_m \\ D_m(p) &= |pI - A_m| \end{aligned} \quad (24)$$

である。また、外乱 $d_0(t)$ は、

$$D_d(p)d_0(t) = 0, \quad \partial D_d(p) = n_d \quad (25)$$

を満たすとする。 $D_d(p)$ は既知のモニックな多項式であり、外乱のモードを与える。

安定多項式 $T(p)D_m(p)$ の多項式演算の関係式を次式で与える。

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(p)R(p) + S(p) \quad (26)$$

出力誤差は次式で与える。

$$e = y - y_m \quad (27)$$

(26),(27)式より、次の関係が成立する。

$$T(p)D_m(p)e = 0 \quad (28)$$

よって

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p)e &= D_d(p)R(p)\{p^{n+l-2}N_r v_z \\ &\quad + N_{f_2}(p)(B_1 u_1 + f_2(x_1))\} \\ &\quad + S(p)y - T(p)N_m(p)r_m \end{aligned} \quad (29)$$

となる。よって、(28)式の関係を使って制御入力 u_1 の構成ベクトルである v_z は次のように計算される。

$$\begin{aligned} v_z &= -N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)p^{n+l-2} \\ &\quad - Q(p)\}N_r v_z \\ &\quad - N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_{f_2}(p) \\ &\quad \{B_1 u_1 + f_2(x_1)\} \\ &\quad - N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p)y + v_m \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、

$$v_m = N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (31)$$

である。 $T(p)$, $D_m(p)$, $Q(p)$ は安定な多項式であり、各多項式の次数には次の関係がある。

$$\begin{aligned} \partial_{r_i} N(p) &= \sigma_i, \quad \partial_{r_i} N_f(p) = \sigma_{f_i}, \\ \partial_{r_i} N_m(p) &= \sigma_{m_i}, \quad n_m - \sigma_{m_i} \geq 2 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Gamma_r(T(p)) = 1, \quad \Gamma_r(Q(p)) = 1,$$

$$\partial T(p) = \rho \geq n_d + n + l - n_m + 1,$$

$$\partial_{r_i} Q(p) = \rho + n_m - 2 \quad (33)$$

制御入力 u_1 は内部状態を使って表せる。

$$u_1 = (C \frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} B)^{-1} [N_r v_z - f_4(x_1)] \quad (34)$$

$$\begin{aligned} v_z &= -H_1 \xi_1 - E_2 y - H_2 \xi_2 \\ &\quad - H_3 \xi_3 + v_m \end{aligned} \quad (35)$$

$$\dot{\xi}_1 = F_1 \xi_1 + G_1 v_z \quad (36)$$

$$\dot{\xi}_2 = F_2 \xi_2 + G_2 y \quad (37)$$

$$\dot{\xi}_3 = F_3 \xi_3 + G_3 \{B_1 u_1 + f_2(x_1)\} \quad (38)$$

また次の関係がある。

$$|Ip - F_i| = |Q(p)| \quad (i = 1, 2, 3) \quad (39)$$

ここで、状態空間表示で使われている行列と伝達関数行列には次の関係がある。

$$\begin{aligned} N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)p^{n+l-2} - Q(p)\}N_r \\ = H_1(pI - F_1)^{-1}G_1 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p) \\ = E_2 + H_2(pI - F_2)^{-1}G_2 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_{f_2}(p) \\ = H_3(pI - F_3)^{-1}G_3 \end{aligned} \quad (42)$$

(34)式の制御入力 $u_1(t)$ を使うと(28)式より出力誤差 $e(t)$ はゼロに収束するので、制御系を構成する内部状態が有界であれば、モデル追従形制御系が実現できる。

3. 大域的有界性の証明

本章では一般的な非線形系に対するモデル追従形制御系ですべての内部状態が有界になる条件

を導く。

制御系全体の状態方程式は z を (43) 式のように取れば (44) 式で表される。

$$z = (x_1^T, \xi_1^T, \xi_2^T, \xi_3^T)^T \quad (43)$$

$$\dot{z} = A_s z + B_s \{f_2(x_1) - B_1 (C \frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} B)^{-1} W(x_1) v_z - B_1 (C \frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} B)^{-1} f_4(x_1)\} + d_s(t) \quad (44)$$

$$x_1 = C_s z \quad (45)$$

A_s, B_s, C_s は以下のように $A_1, B_1, C_1, E_i, H_i, F_i, G_i$ によって確定的に書ける。 $d_s(t)$ は $d_0(t), y_m$ から構成されており、有界な信号である。

$$A_s = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 E_2 C_1 & -B_1 H_1 \\ -G_1 E_2 C_1 & F_1 - G_1 H_1 \\ G_2 C_1 & 0 \\ -G_3 B_1 E_2 C_1 & -G_3 B_1 H_1 \\ -B_1 H_2 & -B_1 H_3 \\ -G_1 H_2 & -G_1 H_3 \\ F_2 & 0 \\ -G_3 B_1 H_2 & F_3 - G_3 B_1 H_3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$C_s = [I \ 0 \ 0 \ 0] \quad (48)$$

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} B_1 \{v_m(t) - E_2 d_0(t)\} \\ G_1 \{v_m(t) - E_2 d_0(t)\} \\ G_2 d_0 \\ G_3 B_1 \{v_m(t) - E_2 d_0(t)\} \end{bmatrix} \quad (49)$$

ただし、

$$C \frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} B = N_r + W(x_1) \quad (50)$$

である。ここで、(50) 式において

$$W(x_1) = 0 \quad (51)$$

となるシステムを考える。すると、制御系全体の状態方程式 (44) 式は以下のようになり非線形部は x_1 のみの関数となる。

$$\dot{z} = A_s z + B_s \{f_2(x_1) - B_1 N_r^{-1} f_4(x_1)\} + d_s(t) \quad (52)$$

$$= A_s z + B_s \psi(x_1) + d_s(t) \quad (53)$$

$$\psi(x_1) = f_2(x_1) - B_1 N_r^{-1} f_4(x_1) \quad (54)$$

A_s の特性多項式は次式で与えられ安定である。

$$|pI - A_s| = |Q(p)|^2 V_s(p) T(p)^l D_m(p)^l \quad (55)$$

$V_s(p)$ は $C_1(pI - A_1)^{-1} B_1$ の不変零点多項式であり、これが安定になるように A_1, B を選ぶ。

ここで制御系全体の伝達関数 $H(p) = C_s(pI - A_s)^{-1} B_s$ が正実であると仮定すると以下の式が成立する。

$$P_s A_s + A_s^T P_s = -Q_s \quad (56)$$

$$P_s B_s = C_s^T, \quad P_s > 0, Q_s \geq 0 \quad (57)$$

リヤプノフ関数の候補として z の 2 次形式を扱う。

$$V = \frac{1}{2} z^T P_s z \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T P_s \dot{z} \\ &= -\frac{1}{2} z^T Q_s z + x_1^T \psi(x_1) + z^T P_s d_s(t) \end{aligned} \quad (59)$$

ここで、 $\psi(x_1)$ について以下の式が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned} x_1^T \psi(x_1) &\leq \alpha - \beta \|x_1\|^\gamma \\ (\alpha \geq 0, \beta > 0, \gamma > 0) \end{aligned} \quad (60)$$

すると、以下のような不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_s)}{2} \|z\|^2 + \alpha - \beta \|x_1\|^\gamma \\ &\quad + \|z\| \|P_s\| \|d_s\| \\ &\leq \alpha_1 - \beta_1 \|x_1\|^\gamma \\ (\alpha_1 \geq 0, \beta_1 > 0, \gamma > 0) \end{aligned} \quad (61)$$

$\lambda_{\min}(Q_s)$ は行列 Q_s の最小固有値である。よって、 x_1 は有界である^{1),2),3),4)}。有界な場合、 $\psi(x_1)$ は有界な非線形関数より、全状態 z は有界である。

4. $H(p)$ の正実条件

制御系全体の伝達関数 $H(p)$ が正実伝達関数であるための条件は (56)(57) 式に示したが、これについて解析する。 P_s, Q_s は以下のように表せる。

$$P_s = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} & P_{34} \\ P_{14}^T & P_{24}^T & P_{34}^T & P_{44} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$Q_s = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{14}^T & Q_{24}^T & Q_{34}^T & Q_{44} \end{bmatrix} \quad (63)$$

(62)(63) 式を使い、(57) 式を計算すると次のようになる。

$$P_{11} = I + G_3^T P_{44} G_3 \quad (64)$$

$$P_{12} = -G_3^T P_{24} \quad (65)$$

$$P_{13} = -G_3^T P_{34} \quad (66)$$

$$P_{14} = -G_3^T P_{44} \quad (67)$$

これらを (62) 式に代入し (56) 式を計算した式に対して、 $Q_s \geq 0$ となるような $A_1, P_s > 0$ を遺伝的アルゴリズム (GA) を用いて探索することを考えている。

5. シミュレーション結果

本シミュレーションでは、次のような 2次元 1 入出力 ($n=2, l=1$) の制御対象を考える。

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} -x_{s_2}^3 + u_{s_1}^2 \\ -2u_{s_1}^2 + 5u_{s_1} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ x_{s_2} \end{bmatrix}, u = u_{s_1}$$

$$y = Cx + d_0(t), C = [2 \ 1] \quad (69)$$

各行列は次のように決める。これは、(55) 式の $V_s(p)$ が安定な多項式になるように決める。

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = [2 \ 1 \ 0] \quad (70)$$

よって、各パラメータは以下のように決まる。

$$N(p) = 5p + 5, N_r = 5,$$

$$N_f(p) = [2p^2 + 2p \ p^2 + p \ 5p + 5],$$

$$f_4(x_1) = 12x_{s_2}^2 u_{s_1}^2 - 4x_{s_2}^3 - 30x_{s_1}^2 u_{s_1}$$

$$+ 2.5x_{s_1}^2 - 2x_{s_1} + x_{s_2} + 5u_{s_1},$$

$$u_1 = 0.2\{5v_z - f_4(x_1)\},$$

$$D(p) = p^3 + 2p^2 - 4p + 5 \quad (71)$$

$V_s(p)$ 同様、以下の 3 つの多項式も安定になるように決める。

$$T(p) = (p + 5)^3 \quad (72)$$

$$Q(p) = (p + 6)^3 \quad (73)$$

$$D_m(p) = (p + 5)^2 \quad (74)$$

よって、(24) 式より A_m は次のようになる。

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} \quad (75)$$

また、以下のように B_m, C_m を決めると $N_m(p)$ は次のようになる。

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_m = [5 \ 0] \quad (76)$$

$$N_m(p) = 5 \quad (77)$$

また、(39) 式より

$$F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -216 & -108 & -18 \end{bmatrix} \quad (78)$$

となる。さらに、

$$F_3 = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 \\ 0 & 0 & F_1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & G_1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

である。(40)~(42) 式より、以下のように各行列が決定する。

$$H_1 = [-216 \ -108 \ 5],$$

$$H_2 = [-8360.6 \quad -3844.8 \quad -479.4],$$

$$H_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 23 \quad 1],$$

$$E_2 = 41.6 \quad (81)$$

参照入力 r_m は次のようにした。

$$r_m = 3 \sin(t) + 4.5 \quad (82)$$

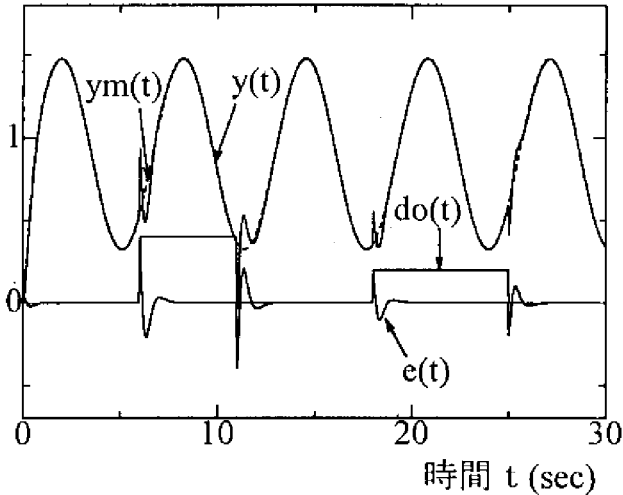


Fig.1 Output response of nonlinear model following control system

6. おわりに

状態、制御入力の両者について非線形であるような一般的な非線形制御対象に対しても、内部状態が有界なモデル追従形制御系の設計が可能であることが確認された。この際、設計パラメータは内部安定になるように決める。ここで内部状態が有界になるための条件をまとめると以下のようになる。

- $C \frac{\partial f(x_1)}{\partial u^T} B = N_r$ (50),(51)
- $V_s(p)$ が安定 (55)
- (56),(57) の正実条件
- (60) 式の内積条件

参考文献

- 1) 大久保 重範: 外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, 21-8, 792/799 (1985)
- 2) 大久保 重範: 零点の安定配置を使った非線形モデル追従形制御系, 計測自動制御学会論文集, 28-8, 939/946 (1992)
- 3) 大久保 重範: 一般的な非線形系のモデル追従形制御系, 第2回制御理論応用シンポジウム前刷, 37/40(1994)
- 4) S. Okubo: The Model Following Control System for the General Nonlinear Systems, Preprint of SICE '94, 527/528(1994)
- 5) 北野 宏明: 遺伝的アルゴリズム, 産業図書 (1993)