計測自動制御学会東北支部　第163回研究集会（1996.10.18,19）
資料番号 163-7

むだ時間を含む線形システムのモデル追従形制御について

Model-Following Control of the Linear System with Time Delays

○秋山 孝夫*，　大久保重範*
○Takao Akiyama * Shigenori Okubo*

＊山形大学

＊Yamagata University

キーワード：むだ時間系（Time delay system），モデル追従形制御（Model-following control），外乱（Disturbances）

連絡先：〒992 米沢市城南4-3-16　山形大学 地域共同研究センター　秋山孝夫，
Tel.:(0238)26-3025, Fax.:(0238)26-3409, E-mail:akiyama@ycrc.yz.yamagata-u.ac.jp

1．緒　言

入出力および状態にむだ時間を含む系に対する制御設計においては，これまでレギュレータ問題や状態予測サーボシステムが扱われている[1]．サーボシステム問題ではステップ目標入力，ステップ外乱に対する定常偏差を零にする制御系の設計法が提案されているが，外乱を考慮しつつ一般の目標信号に追従させるモデル追従形制御系（ＭＦＣＳ）の設計は未だ提案されてはいないようである．そこで，外乱を考慮した入出力と状態にむだ時間が含まれる線形系のＭＦＣＳの設計法を考察した．

2．問題の設定

入出力と状態に整数倍のむだ時間を含む制御対象および追従モデルをそれぞれ次式（１）と（２）で表す．

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\sum_{i=0}^{p}A_i x(t-ih)+\sum_{i=0}^{q}B_i u(t-ih)+d(t),\\ y(t)&=\sum_{i=0}^{r}C_i x(t-ih)+d_o(t),\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_m(t)&=A_m x_m(t)+B_m r_m(t),\\ y_m(t)&=C_m x_m(t)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

ここで，$x(t)\in R^n$は状態変数，$u(t)\in R^l$は制御入力，$y(t)\in R^l$は制御対象の出力，$d(t)\in R^n$，$d_0(t)\in R^l$は有界な外乱，ih（$h>0, i\geq 1$）はむだ時間，$x_m(t)\in R^{n_m}$，$r_m(t)\in R^{l_m}$，$y_m(t)\in R^l$はモデルに関する状態，A_i，B_i，C_i，A_m，B_m，C_mは適合する次元の定数行列であり，(A_i,B_i)Ｒ－可安定，(A_m,B_m)可制御，(C_i,A_i)Ｒ－可検出，(C_m,A_m)可観測，A_mは安定行列とする．制御対象で利用可能な状態は$y(t)$のみであり，内部状態$x(t)$は直接入手できないものとする．また，制御対象とモデルとの出力誤差$e(t)$は式（３）で与えられる．

$$e(t)=y(t)-y_m(t)\qquad(3)$$

本研究では，$t \to \infty$ で $e(t) \to 0$ にするようなモデル追従形制御系の設計を考える．

3．制御系の設計

式（1）の記述を簡単にするために，次のような時間遅れ作用素 σ を導入する．

$$\sigma z(t) = z(t-h) \tag{4}$$

式（4）を利用して状態方程式（1）を書換えれば，次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t) + d(t), \\ y(t) &= C(\sigma)x(t) + d_0(t) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ここで，

$$A(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} A_i\sigma^i,\ B(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} B_i\sigma^i,\ C(\sigma) = \sum_{i=0}^{r} C_i\sigma^i \tag{6}$$

$p = d/dt$ とすれば，$y(t)$ と $y_m(t)$ はそれぞれ次式のように表される．

$$\begin{aligned} y(t) &= C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B(\sigma)u(t) \\ &\quad + C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}d(t) + d_0(t) \end{aligned} \tag{7}$$

$$y_m(t) = C_m(pI - A_m)^{-1}B_m r_m(t) \tag{8}$$

式（7）と（8）において

$$\left.\begin{aligned} & C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B(\sigma) = N(\sigma,p)/D(\sigma,p), \\ & N(\sigma,p) = C(\sigma)adj[pI - A(\sigma)]B(\sigma) \\ & \quad \in R^{l\times l}[\sigma], \\ & D(\sigma,p) = |pI - A(\sigma)|, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} & C_m(pI - A_m)^{-1}B_m = N_m(p)/D_m(p), \\ & N_m(p) = C_m\, adj(pI - A_m)B_m \in R^{l_m \times l_m}, \\ & D_m(p) = |pI - A_m| \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

とおけば，式（7）と（8）は式（11）と（12）のようになる．外乱はまとめて式（13）のようになる．

$$D(\sigma,p)y(t) = N(\sigma,p)u(t) + w(t) \tag{11}$$

$$D_m(p)y_m(t) = N_m(p)r_m(t) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} w(t) &= C(\sigma)adj[pI - A(\sigma)]d(t) \\ &\quad + D(\sigma,p)d_0(t) \end{aligned} \tag{13}$$

$N(\sigma,p)$ と $N_m(p)$ をそれぞれ式（14）と（15）の形式で表す．

$$\left.\begin{aligned} N(\sigma,p) &= diag(p^{\eta_i})N_r(\sigma) + \tilde{N}(\sigma,p), \\ N_r(\sigma) &= \overline{N}_r(\sigma) + \hat{N}_r, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$N_m(p) = diag(p^{\eta_m})N_{m_r} + \tilde{N}_m(p) \tag{15}$$

ここで，$\partial_{r_i}\tilde{N}(\sigma,p) < \eta_i$，$\partial_{r_i}\tilde{N}_m(p) < \eta_{m_i}$（$\partial_{r_i}(\bullet)$ は $(\bullet)$ の各行の p に関する次数を表す），$\partial_\sigma\overline{N}_r(\sigma) \geq 1$（$\partial_\sigma(\bullet)$ は $(\bullet)$ の σ に関する次数を表す）である．$\hat{N}_r$ は $l\times l$ の定数行列であり，$|\hat{N}_r| \neq 0$ であるとする．また，外乱 $d(t)$，$d_0(t)$ は

$$\left.\begin{aligned} & D_d(p)d(t) = 0,\ D_d(p)d_0(t) = 0, \\ & \partial D_d(p) = n_d \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

を満たすものとする．$D_d(p)$ は既知のモニックで安定な多項式であり，外乱のモードを与える．従って，$w(t)$ は次式を満足する．

$$D_d(p)w(t) = 0 \tag{17}$$

次に，ρ 次（$\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i$）のモニックで安定な多項式 $T(p)$ を選び，次式より $R(\sigma,p)$ と $S(\sigma,p)$ を求める．

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p) + S(\sigma,p) \tag{18}$$

ここで，各 p に関する多項式の次数は $\partial T(p) = \rho$，$\partial D_m(p) = n_m$，$\partial D_d(p) = n_d$，$\partial D(\sigma,p) = n$，$\partial R(\sigma,p) = \rho + n_m - n_d - n$，$\partial S(\sigma,p) \leq n_d + n - 1$ である．$e(t)$ は次のように求められる．

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p)e(t) &= D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p)y(t) \\ &\quad + S(\sigma,p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \\ &= \{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) - Q(p)N_r(\sigma)\}u(t) \\ &\quad + Q(p)N_r(\sigma)u(t) + S(\sigma,p)y(t) \\ &\quad - T(p)N_m(p)r_m(t) \end{aligned} \tag{19}$$

ここで，$Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定多項式であるような多項式行列であり，次式のように表す．

$$Q(p) = diag(p^{\rho + n_m - n + \eta_i}) + \bar{Q}(p) \tag{20}$$

ただし，$\partial_{r_i}\bar{Q}(p) < \rho + n_m - n + \eta_i$ である．式（19）において $T(p)D_m(p)e(t) \to 0$ であるならば，次式を得る．

$$\begin{aligned} u(t) &= -\hat{N}_r^{-1}\overline{N}_r(\sigma)u(t) - \hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1} \\ &\quad \cdot\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) - Q(p)N_r(\sigma)\}u(t) \\ &\quad - \hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}S(\sigma,p)y(t) \\ &\quad + \hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \end{aligned}$$

(21)

式（21）の各行列要素の分数式がproperであるためには，次の条件① $\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i$，② $n_m - \eta_{m_i} \geq n - \eta_i$ を満足しなければならない．

さらに，次の関係式

$$\left.\begin{array}{l}
\hat{N}_r^{-1}\overline{N}_r(\sigma) = E_0(\sigma), \\
\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) - Q(p)N_r(\sigma)\} \\
\quad = H_1(\sigma)(pI - F_1)^{-1}G_1, \\
\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}S(\sigma,p) \\
\quad = E_2(\sigma) + H_2(\sigma)(pI - F_2)^{-1}G_2, \\
\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p) \\
\quad = E_3 + H_3(pI - F_3)^{-1}G_3,
\end{array}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t), \\
|pI - F_i| = |Q(p)|,\ (i = 1,2,3)
\end{array}\right\} \tag{23}$$

を利用すれば，式（21）は次のように書き換えられる．

$$\begin{array}{l}
u(t) = -E_0(\sigma)u(t) - H_1(\sigma)\xi_1(t) - E_2(\sigma)y(t) \\
\quad - H_2(\sigma)\xi_2(t) + u_m(t)
\end{array} \tag{24}$$

ここで，

$$u_m(t) = E_3r_m(t) + H_3\xi_3(t) \tag{25}$$

であり，（F_i，G_i）可制御，（$H_i(\sigma)$，F_i）R－可検出である．また，$\partial_o E_0(\sigma) \geq 1$である。式（24）の$u(t)$は$e(t) \to 0$（$t \to \infty$）を満足するから，制御系を構成する内部状態が有界であれば，モデル追従形制御系が実現できる．

4．内部状態の安定性の解析

制御系全体の挙動をまとめると次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}
\dot{x}(t) = A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t) + d(t), \\
\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t), \\
u(t) = -E_0(\sigma)u(t) - H_1(\sigma)\xi_1(t) \\
\quad - E_2(\sigma)y(t) - H_2(\sigma)\xi_2(t) + u_m(t), \\
u_m(t) = E_3r_m(t) + H_3\xi_3(t), \\
y(t) = C(\sigma)x(t) + d_0(t), \\
\dot{x}_m(t) = A_mx_m(t) + B_mr_m(t), \\
y_m(t) = C_mx_m(t)
\end{array}\right\} \tag{26}$$

式（26）から$y(t)$を消去するとともに$z(t)^T = [x(t)^T,\ \xi_1(t)^T,\ \xi_2(t)^T, u(t)^T]$とおけば，内部状態に関する方程式は次のようになる．

$$E\dot{z}(t) = A_s(\sigma)z(t) + d_s(\sigma,t) \tag{27}$$

ここで，

$$\left.\begin{array}{l}
E = \begin{bmatrix} I & O & O & O \\ O & I & O & O \\ O & O & I & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}, \\
A_s(\sigma) = \\
\begin{bmatrix} \{A(\sigma) - B(\sigma)E_2(\sigma)C(\sigma)\} & -B(\sigma)H_1(\sigma) \\ -G_1E_2(\sigma)C(\sigma) & \{F_1 - G_1H_1(\sigma)\} \\ -G_1E_2(\sigma)C(\sigma) & O \\ -E_2(\sigma)C(\sigma) & -H_2(\sigma) \end{bmatrix} \\
\quad \begin{bmatrix} -B(\sigma)H_2(\sigma) & -B(\sigma)E_0(\sigma) \\ -G_1H_2(\sigma) & -G_1E_0(\sigma) \\ F_2 & O \\ -H_2(\sigma) & -\{I + E_0(\sigma)\} \end{bmatrix}, \\
d_s(\sigma,t) = \\
\begin{bmatrix} B(\sigma) \\ G_1 \\ O \\ I \end{bmatrix} u_m(t) + \begin{bmatrix} d(t) - B(\sigma)E_2(\sigma)d_0(t) \\ -G_1E_2(\sigma)d_0(t) \\ G_2d_0(t) \\ -E_2(\sigma)d_0(t) \end{bmatrix}
\end{array}\right\} \tag{28}$$

式（27）の安定性を論ずるために，特性多項式$|pE - A_s(\sigma)|$を計算れば、次のようになる．

$$\begin{array}{l}
|pE - A(\sigma)| = |Q(p)|\left|\hat{N}_r^{-1}\overline{N}_r(\sigma) + 1\right| \\
\quad \cdot T(p)^l D_m(p)^l V_r(\sigma,p)
\end{array} \tag{29}$$

ここで、$V_r(\sigma,p)$は$C(\sigma)\{pI - A(\sigma)\}^{-1}B(\sigma)$の零

点の多項式である。いま、$V_s(\sigma,p)$が$V_s(\sigma,p)$ $=|V_{s1}(\sigma)|V_{s2}(p)$と分解でき、

①$|\hat{N}_r^{-1}\overline{N}_r(\sigma)+1|=0$および$|V_{s1}(\sigma)|=0$の根$\sigma$がすべて$|\sigma|>1$および

②$V_{s2}(p)$が安定多項式

ならば、制御系は安定となる。$V_s(\sigma,p)$の分解の方法については、今後の課題としたい。

参考文献

1）渡部　慶二：むだ時間システムの制御、計測自動制御学会（1993）

2）大久保　重範：外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計、計測自動制御学会論文集、21-8、792/799（1985）

2）