

ディスクリプタシステムに対するモデル追従形 制御系の内部安定性

A Design of Model Following Control System for Descriptor System with Disturbances

○唐 厚 君*,大久保 重 範*

○Houjun Tang, Shigenori Okubo

* Faculty of Engineering, Yamagata University, Jonan 4-3-16, Yonezawa 992, Yamagata, JAPAN

Abstract In this paper, a design of model following control system for linear descriptor system with disturbances is proposed. The features of this design method are that both the physical structure of the system and the physical system variables properties can be preserved because there is no necessary to make transformation of this system, and boundedness of internal states are proved by means of coprime factorization of descriptor system transfer function matrix. In order to prove the internal states stability, we use the coprime factorization of transfer function matrix and the controllability or observability etc., and give a concise proof about poles and zeros of a descriptor systems. The effectiveness of this method has been verified by practical system simulations.

キーワード: ディスクリプタシステム(descriptor system), モデル追従形制御系(model following control system), 極と
零点(poles and zeros), 内部状態(inner states), 有界性(boundedness), 外乱(disturbances)

連絡先: 〒992 山形県米沢市城南 4-3-19 山形大学工学部機械システム工学科 大久保研究室 唐 厚君
Tel: +81-238-26-3245; Fax: +81-238-24-6445; E-mail: toukou@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

ディスクリプタシステムはエンジニアリングシステム(例えば、電子回路網、パワーシステム、宇宙空間エンジニアリング及び化学プロセス)、社会システム、経済システム、知識システムネットワーク分析、時系列分析、大規模システムのモデリングなどに現れる¹⁾。このシステムは対象システムの動的な部分を記述する常微分方程式と、システムを構成する各要素間の総合関係を記述する代数方程式で構成され、かつ対象システム内の物理変数や定数、物理的構造を保存することができる数式表現である。前者に関しては、状態方程式で表せる制御対象より広いクラスのシステムを扱うという意味で重要であり、後者に関しては、制御対象の変動、特にパラメトリックな変動のより自然な表現式としてディスクリプタシステムを用いることができる。従って、この状態方程式よりディスクリプタシステムの高い表現能力に注目して、十数年前から数多くの研究が行われていた²⁾。ところが、著者が知る限り、ディスクリプタシステムのモデル追従形制御系の設計に関する研究はまだ少ない。本論文は大久

保³⁾が提案した状態方程式に基づくモデル追従形制御系の設計手法を拡張し、外乱を持つ線形ディスクリプタシステムに対するモデル追従形制御系の設計を考察する。

本論文では、第2章で問題の設定を行い、対象システムに対して、可制御かつ可観測、レギュラー性、インパルスフリー及び安定な不変零点を持つ条件を仮定する。第3章では、制御則の具体的な構成手順を示す。この手法は対象システムに対して座標変換を施す必要がないから、システムの物理変数や定数、物理的構造を保存することができる。第4章では、本手法の内部安定性を証明する予備知識として、ディスクリプタシステムの伝達極、伝達零点及びシステム極、不変零点の等価関係を証明する。W.L.Song⁴⁾らは伝達関数実現の手法、即ち伝達関数の実現を求め、これら表現式間の関係を利用し、具体的な数式計算を行って証明を与えた。ところが多変数システムに対して実現の記述はかなり複雑なので、計算や記述などが簡明ではない。本稿の証明方法は可制御性、可観測性と伝達関数分解の既約性との関係、ベズー等式などを用いて、煩雑な数式計算が必要なく、記述が簡潔で、証明過程が簡明である。第5章では、上述の結果を利用して

内部状態の安定性を証明する。最後に、実システムを用いて本設計法の有用性を示す。

2. 問題の設定

制御対象は(1)式、モデルは(2)式とする。モデルは安定で (A_m, B_m, C_m) は可制御、可観測とする。

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d(t) \quad (1.a)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (1.b)$$

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r_m(t) \quad (2.a)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (2.b)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は ディスクリプタ変数、 $u(t) \in R^l$ は制御入力、 $y(t) \in R^l$ は制御対象の出力、 $d(t) \in R^r$ 、 $d_0(t) \in R^l$ は有界な外乱である。 $E \in R^{n \times n}$ は一般に正則とは限らず、 $\text{rank } E = r (\leq n)$ とする。 $x_m(t) \in R^{n_m}$ 、 $r_m(t) \in R^{l_m}$ 、 $y_m(t) \in R^{l_m}$ 、 A 、 B 、 C 、 A_m 、 B_m 、 C_m は適合する次元の定数行列である。制御対象は次の条件を満たすとする。

(1) 制御対象(1)には、解の一意性を保証するレギュラー条件及びインパルスフリー条件を仮定する。

$$\det(Ep - A) \neq 0 \quad (3)$$

$$\text{rank } E = \text{degree } \det(Ep - A) = r \quad (4)$$

(2) R-可制御かつ可観測⁽¹⁾、すなわち次の条件を満たす。

$$\text{rank}[Ep - A, B] = n, \quad \forall p \in C_z \quad (5)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Ep - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall p \in C_z \quad (6)$$

ただし、 C_z はすべての複素数の集合である。

(3) システムの不変零点は開左半平面に存在するものとする。

本稿では内部状態がすべて有界に保持され、 $e(t)$ が漸近的にゼロに収束するような線形ディスクリプタシステムのモデル追従形制御系の設計について述べる。

$$e(t) = y(t) - y_m(t), \quad e(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty) \quad (7)$$

3. 制御系の設計

$p = \frac{d}{dt}$ として、制御対象、モデルの入出力関係を求めれば、(8)、(9)式で与えられる。

$$C(Ep - A)^{-1}B = N(p) / D(p) \quad (8)$$

$$C_m(Ip - A_m)^{-1}B_m = N_m(p) / D_m(p) \quad (9)$$

ただし、 $D(p) = |Ep - A|$ 、 $D_m(p) = |Ip - A_m|$ である。

これより(10)、(11)及び(12)式が得られる。(12)式は外乱の項を表す。本設計法での $u(t)$ は初期値に無関係であり、後に閉ループ系の状態方程式で内部状態が任意の初期値に対して有界であることを示す。

$$D(p)y(t) = N(p)u(t) + w(t) \quad (10)$$

$$D_m(p)y_m(t) = N_m(p)r_m(t) \quad (11)$$

$$w(t) = C \text{adj}(Ep - A)d(t) + D(p)d_0(t) \quad (12)$$

$$N(p) = \text{diag}(p^{\sigma_i})N_r + \tilde{N}(p), \quad (i=1,2,\dots,l) \quad (13)$$

$$N_m(p) = \text{diag}(p^{\sigma_{m_i}})N_{m_r} + \tilde{N}_m(p), \quad (i=1,2,\dots,l) \quad (14)$$

ここで、 σ_i は $N(p)$ の各行の要素の最高次数であり、 σ_{m_i} は $N_m(p)$ の各行の要素の最高次数である。 $\tilde{N}(p)$ の各行の要素の最高次数は $\partial_{r_i}(\tilde{N}(p)) < \sigma_i$ 、 $\tilde{N}_m(p)$ の各行の要素の最高次数は $\partial_{r_i}(\tilde{N}_m(p)) < \sigma_{m_i}$ である。 $N(p)$ は行プロパー ($|N_r| \neq 0$) であるものとする。外乱 $d(t)$ 、 $d_0(t)$ は

$$D_d(p)d(t) = 0, D_d(p)d_0(t) = 0$$

を満たすとする。 $D_d(p)$ は既知のモニックな多項式であり、外乱のモードを与える。従って $w(t) = 0$ は次式を満たす。

$$D_d(p)w(t) = 0 \quad (15)$$

次に $T(p)$ を以下のように選ぶ。

1) 次数 ρ は $\rho \geq n_d + 2r - n_m - 1 - \sigma_i$

2) 最高次数項の係数は $D(p)$ のそれと同じである。

次式より $R(p)$ 、 $S(p)$ を求める。

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(p)R(p) + S(p) \quad (16)$$

各項式の次数は

$$\partial T(p) = \rho, \quad \partial D_m(p) = n_m, \quad \partial D_d(p) = n_d,$$

$$\partial D(p) = \text{deg}|Ep - A| = r, \quad \partial S(p) \leq n_d + r - 1,$$

$$\partial R(p) = \rho + n_m - n_d - r \text{ である。}$$

(7)、(10)、(11)、(16)より誤差 $e(t)$ は(17)式になる。

$$T(p)D_m(p)e(t) = \{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\}u(t) + Q(p)N_r u(t) + S(p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (17)$$

ここで、 $Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定多項式であるような多項式行列で、これを(18)式のように表す。

$$Q(p) = \text{diag}(p^{\rho+n_m-r+\sigma_i}) + \tilde{Q}(p), \quad (i=1,2,\dots,l) \quad (18)$$

ここで $\partial_{r_i}(Q(p)) = \rho + n_m - r + \sigma_i$ 、 $\Gamma_r(Q(p)) = I$ である。

$e(t) = 0$ にして、(17)式から制御則 $u(t)$ は次式のように求める。

$$u(t) = -N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\}u(t) - N_r^{-1}Q^{-1}(p)S(p)y(t) + N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (19)$$

ここで、 $u(t)$ の中に $y(t)$ 、 $r_m(t)$ の時間微分が含まれないようにするため、次数について次の条件が満たされているものとする。

(1) $n_m - \sigma_{m_i} \geq r - \sigma_i$, $(i=1,2,\dots,l)$

(2) $\rho \geq n_d + 2r - n_m - 1 - \sigma_i$, $(i=1,2,\dots,l)$

制御入力 $u(t)$ は内部状態を使ってまた次のように表せる。

$$u(t) = -H_1\xi_1(t) - E_2y(t) - H_2\xi_2(t) + E_3r_m(t) + H_3\xi_3(t) \quad (20)$$

ここで、

$$H_1(pI - F_1)^{-1}G_1 = N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\} \quad (21)$$

$$E_2 + H_2(pI - F_2)^{-1}G_2 = N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p) \quad (22)$$

$$E_3 + H_3(pI - F_3)^{-1}G_3 = N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p) \quad (23)$$

(21)式の右辺は厳密プロパー及び(22)、(23)式のそれはプロパーであるから、上のように置くことができる。(21)~(23)式の右辺の実現は(24)~(26)式で与えられる。

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1 \xi_1(t) + G_1 u(t) \quad (24)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2 \xi_2(t) + G_2 y(t) \quad (25)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3 \xi_3(t) + G_3 r_m(t) \quad (26)$$

(17)式の両側に $I = Q(p)N_r N_r^{-1} Q(p)^{-1}$ をかけて内部状態で表すと、 $e(t)$ は次式のように書き直すことができる。

$$e(t) = \frac{Q(p)N_r}{T(p)D_m(p)} \{ u(t) + H_1 \xi_1(t) + E_2 y(t) + H_2 \xi_2(t) - E_3 r_m(t) - H_3 \xi_3(t) \}$$

(19)式の $u(t)$ は $e(t) = 0$ にするから、制御系を構成する内部状態が有界であれば、モデル追従形制御系が実現できる。

$$T(p)D_m(p)e(t) = 0 \quad (27)$$

$$e(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty) \quad (28)$$

4. ディスクリプタシステムの極と零点

内部状態の有界性を証明する前に、ディスクリプタシステムの伝達極、伝達零点とシステム極、システムの不変零点との関係について考察する。そのために、まず状態方程式についていくつかの結果を導いておく。

[補題 1] 状態方程式(29)は可制御、可観測と仮定する。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (29)$$

この場合、 $D_L(p), \tilde{N}_L(p)$ は伝達関数の左既約分解で、次式を満足する。

$$\begin{aligned} C(Ip - A)^{-1}B &= D^{-1}_L(p)\Sigma_L(p)B \\ &= D^{-1}_L(p)\tilde{N}_L(p) \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、 $\tilde{N}_L(p) = \Sigma_L(p)B$ である。一般性を失うことなく、各ベクトルの次元は $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^l$, $y(t) \in R^m$ とする。□

[証明] システム(29)が可観測と等価な条件として、次式

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - Ip \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall p \in C_2$$

が知られている⁹⁾。これはまた $(A - Ip)$ と C が右既約であることを意味する。スミスマクミラン正準形から行列分解への手順を使えば、右既約な多項式マトリクス $C(Ip - A)^{-1}$ には必ず左既約な対 $D_L(p), \Sigma_L(p)$ が存在し、且つ

$$C(Ip - A)^{-1} = D^{-1}_L(p)\Sigma_L(p) \quad (31)$$

を満足する。よって、両辺に右から B をかけ

$$\begin{aligned} C(Ip - A)^{-1}B &= D^{-1}_L(p)\Sigma_L(p)B \\ &= D^{-1}_L(p)\tilde{N}_L(p) \end{aligned} \quad (32)$$

が得られる。ここで、 $\tilde{N}_L(p) = \Sigma_L(p)B$ である。明らかに $D_L(p), \tilde{N}_L(p)$ は伝達関数 $C(Ip - A)^{-1}B$ の左分解である。ところが、対 $D_L(p), \tilde{N}_L(p)$ の既約性は自明ではない。よっ

て、次に背理法により $D_L(p), \tilde{N}_L(p)$ の既約性を証明する。

$D_L(p)$ と $\Sigma_L(p)B$ が左既約でない、すなわちある複素数 λ と零でないベクトル ξ が存在して、

$$\xi^T [D_L(\lambda), \Sigma_L(\lambda)B] = 0$$

が成立したとする。これより、

$$\xi^T D_L(\lambda) = 0 \quad (33)$$

$$\xi^T \Sigma_L(\lambda)B = 0 \quad (34)$$

が同時に満足しなければならない。ところで、(31)式より、 $D_L(p)$ と $\Sigma_L(p)$ が左既約で、すなわち任意な複素数 λ に対して、 $D_L(p)$ と $\Sigma_L(p)$ とから作られる合成行列のランクは

$$\text{rank} [D_L(\lambda)_{m \times m}, \Sigma_L(\lambda)_{m \times l}] = m$$

行フルランクであるから、 $\xi \neq 0$ (この ξ は(33), (34)式の ξ と同一である)に対して、

$$\xi^T [D_L(\lambda), \Sigma_L(\lambda)] \neq 0 \quad (35)$$

が得られる。これは次のようなケースしかない。

$$(a) \xi^T D_L(\lambda) \neq 0, \xi^T \Sigma_L(\lambda) = 0 \quad (36a)$$

$$(b) \xi^T D_L(\lambda) \neq 0, \xi^T \Sigma_L(\lambda) \neq 0 \quad (36b)$$

$$(c) \xi^T D_L(\lambda) = 0, \xi^T \Sigma_L(\lambda) \neq 0 \quad (36c)$$

ケース (36a), (36b)では

$$\xi^T D_L(\lambda) \neq 0$$

であるから、仮定の(33)式と違反する。よって、ただちに仮定が真ではないことは分かる。

ケース(36c)では、第一式が

$$\xi^T D_L(\lambda) = 0$$

であり、この式の両辺に右から C をかけ、

$$\xi^T D_L(\lambda)C = 0 \quad (37)$$

となる。一方、(31)式より、

$$D_L(\lambda)C = \Sigma_L(\lambda)(\lambda I - A) \quad (38)$$

である。(38)式に左から ξ^T をかけ、(37)式に代入すると、

$$\xi^T D_L(\lambda)C = \xi^T \Sigma_L(\lambda)(\lambda I - A) = 0 \quad (39)$$

が成立する。これと(34)式を合わせて、

$$\xi^T \Sigma_L(\lambda)[(\lambda I - A), B] = 0 \quad (40)$$

が得られる。ところが、(36c)式の第二式より、

$$\xi^T \Sigma_L(\lambda) \neq 0 \quad (41)$$

であるから、(40)式は

$$\text{rank} [\lambda I - A, B] < n \text{ (フルランクでない)}$$

と等価である。一方、 A, B が可制御であるから、次式

$$\text{rank} [\lambda I - A, B] = n \text{ (任意の複素数 } \lambda \text{ に対して)}$$

が知られている。よって $D_L(p), \Sigma_L(p)B$ が左既約でないという仮定は真でない。従って、補題 1 は証明された。

(証明終)

[補題 2]¹⁾ ディスクリプタシステム(42)において、

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (42)$$

(E, A)がレギュラー(すなわち(3)式を満足する)である必要十分条件は

$$P(Ep - A)Q = \begin{bmatrix} Ip - A_1 & 0 \\ 0 & Jp - I \end{bmatrix} \quad (43)$$

となる正則な行列 P, Q が存在することである。ここで、 $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t) \in \mathbf{R}^l, y(t) \in \mathbf{R}^m, E \in \mathbf{R}^{n \times n}, A \in \mathbf{R}^{n \times n}, n_1 + n_2 = n, A_1 \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}, J \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$ はベキゼロ行列である。□

証明は文献(1)に記されているので省略する。

行列 P, Q を使ってディスクリプタ変数 x を $x(t) = Q\bar{x}(t)$ と変換すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [C_1 \quad C_2] \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、

$$\bar{x}(t)^T = [\bar{x}_1(t)^T, \bar{x}_2(t)^T], \quad (45)$$

$PB = [B_1, B_2], CQ = [C_1, C_2]$ である。

【補題 3】 ディスクリプタシステム(42)はレギュラー、かつ可制御、可観測である。すなわち

$$\text{rank}[Ep - A, B] = n, \quad \forall p \in C_2 \quad (49.a)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Ep - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall p \in C_2 \quad (49.b)$$

$$\text{rank}[E, B] = n, \quad (50.a)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n, \quad (50.b)$$

を満たすと仮定する。この場合、伝達関数マトリクスは次式のように

$$\begin{aligned} G(p) &= C_1(Ip - A_1)^{-1}B_1 + D + C_2(Jp - I)^{-1}B_2 \\ &= D^{-1}_L(p)N_L(p) \end{aligned} \quad (51)$$

既約分解できる。ここで、 $D_L(p), N_L(p)$ は左既約な対である。□

【証明】 ディスクリプタシステム(42)に対して、(43)式より、

$$\begin{aligned} G(p) &= C(Ep - A)^{-1}B + D \\ &= [C_1 \quad C_2]Q^{-1} \left(P^{-1} \left(\begin{bmatrix} Ip & \\ & Jp \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & \\ & I \end{bmatrix} \right) Q^{-1} \right)^{-1} \\ &\quad \cdot P^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = C_1(Ip - A_1)^{-1}B_1 + C_2(Jp - I)^{-1}B_2 + D \\ &= \tilde{G}_1(p) + \tilde{G}_2(p) + D \end{aligned} \quad (52)$$

が得られる。ここで、 $\tilde{G}_1(p)$ は厳密プロパーな有理関数マトリクスであり、 $\tilde{G}_2(p)$ は多項式マトリクスである。(49)式より、 (A_1, B_1, C_1) が可制御、可観測⁽¹⁾であるから、 $\tilde{G}_1(p)$ に対し、補題1を使って、(52)式から、

$$G(p) = D^{-1}_L(p)\tilde{N}_L(p) + D + \tilde{G}_2(p) = D^{-1}_L(p)[\tilde{N}_L(p)$$

$$+ D_L(p)(D + \tilde{G}_2(p))] = D^{-1}_L(p)N_L(p) \quad (53)$$

が得られる。ここで、 $N_L(p) = \tilde{N}_L(p) + D_L(p)(D + \tilde{G}_2(p))$ である。 $D_L(p), N_L(p)$ の既約性について、次式

$$\begin{aligned} & \left[D_L(p)_{m \times m} \quad [\tilde{N}_L(p) + D_L(p)(D + \tilde{G}_2(p))]_{m \times l} \right] \cdot \\ & \begin{bmatrix} I_m & -(D + \tilde{G}_2(p)) \\ 0 & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_L(p)_{m \times m} & \tilde{N}_L(p)_{m \times l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

の左辺の第二行列はユニモデュラ、 $D_L(p), \tilde{N}_L(p)$ が左既約であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \text{rank} \left[D_L(p)_{m \times m} \quad [\tilde{N}_L(p) + D_L(p)(D + \tilde{G}_2(p))]_{m \times l} \right] \\ = \text{rank} \left[D_L(p)_{m \times m} \quad \tilde{N}_L(p)_{m \times l} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

が分かる。よって $D_L(p), N_L(p)$ の既約性と $D_L(p), \tilde{N}_L(p)$ の既約性とは一致する。 (証明終)

【定理 1】 多変数線形ディスクリプタシステム(42)において、(E, A)がレギュラー、かつシステムが可制御、可観測ならば、重複度構造も含めて、伝達極及び伝達零点はそれぞれシステム極及びシステムの不変零点に等しい。□

【証明】 (E, A)がレギュラーであるから、(43)式より、

$$\begin{aligned} \det(Ep - A) &= \alpha \det \begin{bmatrix} Ip - A_1 & 0 \\ 0 & Jp - I \end{bmatrix} \\ &= \alpha \det(Ip - A_1) = \alpha \det D_L(p) \end{aligned} \quad (56)$$

が得られる。つまり、ディスクリプタシステムの伝達極はシステム極に等しい。ここで、 α は定数であり、 $(Jp - I)$ はユニモデュラである。

システムが可制御、可観測であるから、(31)式より、ベズー等式

$$\begin{bmatrix} X_R(p) & Y_R(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ip - A_1 & -\hat{Y}_L(p) \\ C_1 & \hat{X}_L(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (57)$$

が得られる⁹⁾。ベズー等式の性質より、(57)式左辺の第一行列はユニモデュラである。以下に「 \sim 」で等価関係を表す。(43)、(53)及び $\tilde{N}_L(p) = \sum_L(p)B_1$ に注意すると、次のような関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= \begin{bmatrix} A - Ep & B \\ C & D \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_1 - Ip & 0 & B_1 \\ 0 & I - Jp & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} A_1 - Ip & 0 & B_1 \\ 0 & I & B_2 \\ C_1 & C_2(I - Jp)^{-1} & D \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & Ip - A_1 & -B_1 \\ 0 & C_1 & D + G_2(p) \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -X_R(p)B_1 + Y_R(p)[D + \tilde{G}_2(p)] \\ 0 & 0 & \tilde{N}_L(p) + D_L(p)[D + \tilde{G}_2(p)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sim \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_L(p) \end{bmatrix} \quad (58)$$

よって、ディスクリプタシステムの伝達零点とシステムの不変零点とは、その重複度構造も含めて、完全に一致することが分かる。(証明終)

【系 1】 入出力の次元が等しい場合、 $N_L(p)$ は正方行列であるから、(58)式からただちに

$$\det \Pi(s) = \beta \det N_L(p) \quad (59)$$

が得られる。ただし、 β は定数である。□
(59)式はある側面から不変零点と伝達零点の関係を示した。

【系 2】 システムがインパルスモードを持たない場合、定理 1 の結果は(50)式の条件がなくても成り立つ。□

【証明】 (50)式の条件はそれぞれ

$$\text{rank}(J, B_2) = n_2, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} J \\ C_2 \end{bmatrix} = n_2$$

と等価¹⁾、すなわち (J, B_2, C_2) が可制御、可観測であることと等価である。一般に言えば、 (J, B_2, C_2) から作られる伝達関数

$$\tilde{G}_2(p) = C_2(Jp - I)^{-1}B_2$$

はただシステム (J, B_2, C_2) の可制御、可観測な部分を表し、可制御だが不可観測な部分、可観測だが不可制御な部分、不可制御かつ不可観測な部分を含まない。従って伝達零点とシステムの不変零点は一般に一致するとは限らない。ところがインパルスモードを持たない場合、 $J = 0$ ⁰⁾であるから、これを(52)式に代入すると、

$$\tilde{G}_2(p) = C_2(Jp - I)^{-1}B_2 = -C_2B_2 \quad (63)$$

は定数行列となる。従って、 $\tilde{G}_2(p)$ に含まれる項式と不変零点の表現式に含まれる項式は恒等的に一致する。

(49)式のもとで、 (A_1, B_1, C_1) が可制御、可観測であるから、定理 1 と同じように系 2 は証明できる。(証明終)

5. 内部状態の有界性の証明

制御系に対し外部から入る信号は参照入力 $r_m(t)$ と外乱 $d(t)$ 、 $d_0(t)$ であるが、これらはすべて有界であるものとする。外乱の特性多項式 $D_d(p)$ は一般に右辺平面に根を有するが、(15)式は時間の有限区間で成り立つものであり、 $d(t)$ 、 $d_0(t)$ は有界である。(1)、(24)~(26)式から $u(t)$ を消去すると、系全体の挙動は次のように記述される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BE_2C & -BH_1 & -BH_2 \\ -G_1E_2H_3 & F_1 - G_1H_1 & -G_1H_1 \\ G_2C & 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BH_3 \\ G_1H_3 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_3(t) + \begin{bmatrix} BE_3 \\ G_1E_3 \\ 0 \end{bmatrix} r_m(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} d(t) - BE_2d_0(t) \\ -G_1E_2d_0(t) \\ G_2d_0(t) \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t) \quad (65)$$

$$u_m(t) = E_3r_m(t) + H_3\xi_3(t) \quad (66)$$

$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} + d_0(t) \quad (67)$$

(64)式では、 $|Ip - F_3| = |Q(p)|$ が安定な多項式であり、且つ $r_m(t)$ が有界であるから、 $\xi_3(t)$ は有界である。 $z(t)$ 、 \tilde{E} を

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (68)$$

のように置くと、この系で有界性の解析に必要な部分をまとめれば、(69)、(70)式になる。

$$\tilde{E} \dot{z}(t) = A_s z(t) + d_s(t) \quad (69)$$

$$y(t) = C_s z(t) + d_0(t) \quad (70)$$

ただし

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} BH_3 \\ G_1H_3 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_3(t) + \begin{bmatrix} BE_3 \\ G_1E_3 \\ 0 \end{bmatrix} r_m(t) + \begin{bmatrix} d(t) - BE_2d_0(t) \\ -G_1E_2d_0(t) \\ G_2d_0(t) \end{bmatrix} \quad (71)$$

は有界な部分を表す。 A_s 、 C_s は(64)、(67)及び(69)式からその内容は明白である。内部状態の有界性は $z(t)$ の有界性を示すことである。即ち $|\tilde{E}p - A_s|$ が安定な多項式であれば十分である。定理 1 より

$$C(Ep - A)^{-1}B = N(p)/D(p) = D^{-1}L(p)N_L(p) \quad (72)$$

である。従って、(69)式の特性多項式は次式のように計算される。

$$\begin{aligned} |\tilde{E}p - A_s| &= T(p)^t D^t_m(p) |Q(p)| \frac{|N(p)||N_r^{-1}|}{D(p)^{t-1}} \\ &= \alpha |N_r^{-1}| T(p)^t D^t_m(p) |Q(p)| |N_L(p)| \quad (73) \end{aligned}$$

(73)式で $|N_L(p)|$ は $C(Ep - A)^{-1}B$ の伝達零点多項式であり、仮定により安定である。 $T(p)$ 、 $D_m(p)$ 、 $|Q(p)|$ はすべて安定な多項式であるように選ばれたから、 A_s は安定なシステム行列である。よって $z(t)$ の有界性が証明された。

以上の論議をまとめると次の定理を得る。

【定理 2】 可制御、可観測なモデルに対して、外乱を持つ線形ディスクリプタシステムは、次の条件

(1) $\det(Ep - A) \neq 0, \forall p \in C_z$ (すべての複素数の集合)

$$\text{rank } E = \text{degree } \det(Ep - A)$$

(2) $\text{rank}[Ep - A, B] = n, \forall p \in C_z$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Ep - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall p \in C_z$$

(3) $C(Ep - A)^{-1}B$ の不変零点は安定である。

を満たせば、内部状態がすべて有界でかつ出力誤差 $e(t) = y(t) - y_m(t)$ が漸近的にゼロに収束するようなモデル追従形制御系が実現できる。 □

6. シミュレーション

制御対象は図1に示すような電気回路網である。ここで、 u_e は電源電圧で、制御入力である。ディスクリプタ変数は次のように

$$x(t) = [u_{c1} \quad u_{c2} \quad I_2 \quad I_1]^T$$

選ぶと、キルヒホッフの第2法則を用いてシステム方程式が(74)式で与える¹⁾。ただし、 u_{c1} 、 u_{c2} 、 I_2 、 I_1 はそれぞれキャパスタ電圧及び電流である。(74)式では外乱の影響も考慮に入れており、より現実なシステムである。モデルは(75)式で与える。シミュレーションの目的はこれについてモデル追従形制御系を設計し、制御対象(74)の測定出力 $y(t)$ をモデル(75)の出力 $y_m(t)$ に追従させることである。シミュレーション結果を 図2 に示す。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) + d_1(t) \\ d(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (74.a)$$

$$y(t) = u_{c2} + d_0(t) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] x(t) + d_0(t) \quad (74.b)$$

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & -24 & -26 & -8 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m(t) \quad (75.a)$$

$$y_m(t) = [5 \quad 1 \quad 0 \quad 0] x_m(t) \quad (75.b)$$

$$r_m(t) = 3\sin t + 4 \quad (75.c)$$

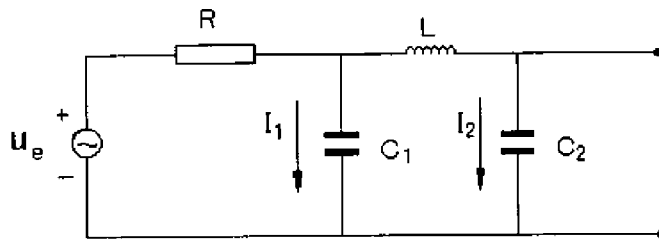


図1 制御対象の電気回路網
Fig.1 controlled object

この例では、 $T(p) = (p+2)^4(8p+10)$ 、 $Q(p) = (p+4)^6$ 、 $D_d(p) = p^2(p^2+1)$ 、 $L=2$ 、 $C_2=2$ 、 $C_1=1$ 、 $R=2$ である。実システムのシミュレーションより、次のことが確認される。

- (1) 微分方程式と代数方程式は統一手法で取り扱えるから、大規模システムなどを対象にする場合に非常に便利である。
- (2) 多種類、高幅値外乱を除去することができる。 $d(t)$ 、 $d_1(t)$ 、 $d_0(t)$ はそれぞれ正弦波外乱、ステップ外乱、ランプ外乱である。正弦波外乱の振幅値はモデルの振幅値の 70% に近く、わりあい強い外乱である。それに振動周期も参照入力 $r_m(t)$ のそれと違う。外乱が入っている区間でも出力誤差が漸近的にゼロに収束することができ、実用性の高い制御系である。

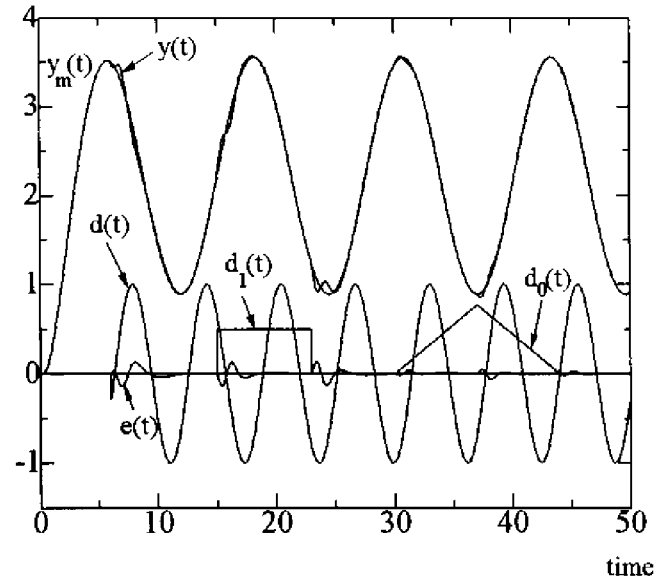


図2 ディスクリプタシステムの応答
Fig.2 System responses of descriptor system

7. あとがき

本稿では、外乱が入る場合の線形ディスクリプタシステムのモデル追従形制御系の設計法を提案し、実システムを用いてその有効性を示した。この手法は対象システムに対して座標変換を施す必要がなく制御入力を構成することができるから、システムの物理変数や定数、物理的構造がそのまま保存される。制御系を構成する内部状態の有界性を証明するにはディスクリプタシステムの極と不変零点はそれぞれ伝達零点、伝達極と一致することを示した。本稿の方法は可制御性、可観測性と伝達関数分解の既約性との関係を用いて具体的な伝達関数行列の実現記述を避けたため、証明過程は簡潔である。本稿で述べた方法は E が正則のときも適用でき、状態方程式について論議した結果はすべて含んでいる。ディスクリプタシステムは状態方程式で表せる制御対象より広いクラスのシステムを扱うことができるから、本手法の応用範囲が広い。今後の課題としては非線形ディスクリプタシステム、外乱モードが未知の場合、及びインパルスモードを有するシステムのモデル追従形制御系の設計に拡張することである。

文 献

- 1) L.Dai: "Singular Control Systems", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, p.v&p7,pp29-39 (1989)
- 2) Lewis, F.L, "A survey of linear singular systems", Circuit Systems signal process, Vol.5, No.1, pp.3-36 (1986)
- 3) 大久保 重範: 「外乱を考慮した非線型モデル追従形制御系の設計」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 21, No 8, pp.792-799 (1985)
- 4) W.L.Song and B.P.Wan and N.Suda, "On Poles and Zeros of Singular Systems", 20 th SICE Symposium on Control Theory, pp. 83-88, Kariya, pp.29-31 (1991.5)
- 5) 須田 信英: 「線形システム理論」, 朝倉書店, p142&p.76 (1993)
- 6) 池田 雅夫: 「descriptor システムに基づくシステム理論」, 計測と制御 V01.24, No 7, pp.597-604 (1985)