計測自動制御学会東北支部 第 164 回研究集会 (Nov. 22, 1996)
資料番号 164-3

整域上のフィードバック安定化のための Elementary factors 算出の改良

Improvement of the Computation of Elementary Factors for Feedback Stabilization over Integral Domains

○森 和好†, 阿部 健一‡
○ Kazuyoshi Mori†, Kenichi Abe‡
†,‡東北大学 工学部 電気工学科
†,‡Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Tohoku University

キーワード： フィードバック安定化 (Feedback stabilization), 一般化基本因子 (Generalized elementary factor), 環上システム (Systems over ring), 線形システム (Linear systems), 安定化可能性 (Stabilizability)

連絡先： 〒 980-77 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉
東北大学 工学部 電気工学科 阿部研究室 森 和好
Tel.: 022-217-7075, Fax.: 022-263-9290, E-mail: mori@abe.ecei.tohoku.ac.jp

1 はじめに

伝達関数が整域上でモデル化されている MIMO システムのフィードバック安定化問題について論じる. Shankar と Sule は整域上の SISO システムフィードバック安定化可能性必要十分条件をイデアルを用いて与えた [1, Theorem 2.1.1]. 彼らの安定化可能性理論のアプローチは, “coordinate-free approach” と呼ばれる. MIMO システムに関して, Sule[2] は環上システムのフィードバック安定化可能性必要十分条件 (Proposition 4) と, “基本因子 (elementary factor)” の概念の導入により一意分解整域上のフィードバック安定化可能性必要十分条件 (Theorem 4) とを与えた. 著者らは, 基本因子の概念より一般化基本因子 (generalized elementary factor) なる概念の導入を行ない, 整域上のフィードバック安定化可能性必要十分条件を与えた [3, 4].

Sule[2] や著者ら [3, 4] の結果は, 基本因子や一般化基本因子は 2 つ行列に対して定義されていたが, 本論では, それらの定義が 1 つの行列に対して行なえば十分であることを示す. そして, それを用いて, 整域上のフィードバック安定化可能性必要十分条件を示す (2 節).

さらに, 2 節の結果を用いて [2, 命題 1] を簡単化したフィードバック安定化可能性必要十分条件を与える (3 節).

本論では, 安定コーザル領域を整域とする. 著者らはそれを十分大きいと考え, [2] のように零因子は含まないとする. 記号 $\mathcal{A}$ を単位元をもつ整域とし, この $\mathcal{A}$ が安定コーザルな伝達関数の集合であるとする. $\mathcal{A}_f$ は分子が $\mathcal{A}$, 分母が f の巾である分数環 ($\{f^n \,|\, f \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{Z}^+\}$), $\mathcal{F}$ は $\mathcal{A}$ の分数体とする. $\mathcal{F}$ がすべての伝達関数の集合となる. $\mathcal{F}$ の要素からなる行列を伝達行列と呼ぶ. 制御対象の伝達行列を $P \in \mathcal{F}^{n\times m}$ により表す. ここで, P は, 適当な $N \in \mathcal{A}^{n\times m}$, $d \in \mathcal{A}$ が存在して $P = Nd^{-1}$ と表現される.

術語および, 安定化問題を以下に標準的に定義しよう. まず, $\widehat{F}_{ad}$ を

$$\widehat{F}_{ad} = \{(X, Y) \in \mathcal{F}^{n\times m} \times \mathcal{F}^{m\times n} \mid \det(E + XY) \neq 0\} \tag{1}$$

として定め, $H(P, C)$ を

$$H(P, C) = \begin{bmatrix} (E + PC)^{-1} & -P(E + CP)^{-1} \\ C(E + PC)^{-1} & (E + CP)^{-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

とする. 但し, E は単位行列. $H(P, C)$ は, Fig. 1 に示したフィードバックシステムの伝達行列を定式化したものである. 以下, R を $\mathcal{A}$ または $\mathcal{A}_f$ とする.

R-安定　伝達行列の全ての要素が R の要素である場合, その伝達行列は R-安定であるという. 伝達行列が $\mathcal{A}$-安定である場合, 単に安定ともいう.

R-安定化補償器　$(P, C) \in \widehat{F}_{ad}$, $H(P, C) \in R^{(n+m)\times(n+m)}$ を満たす C ($\in \mathcal{F}^{m\times n}$) を P の R-安定化補償器と呼ぶ. $\mathcal{A}$-安定化補償器は単に補償器と呼ぶことがある.

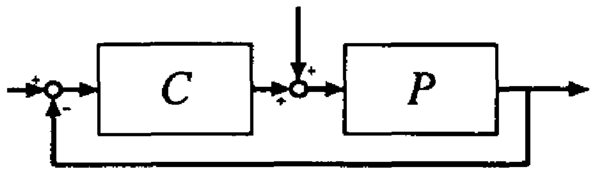

Fig. 1. Feedback system.

Sule[2] は以下のようなフィードバック安定化可能必要十分条件を与えた．

命題 1.1 [2, 命題1] 制御対象 $P = Nd^{-1}$ ($N \in \mathcal{A}^{n\times m}$, $d \in \mathcal{A}$) が安定化可能であるならば，そのときに限り適当な行列 $X \in \mathcal{A}^{n\times n}$, $A \in \mathcal{A}^{n\times m}$, $Y \in \mathcal{A}^{m\times n}$, $B \in \mathcal{A}^{m\times m}$ が存在して

$$XN = Ad,\ \ YN = Bd,\ \ NY = (E - X)d. \tag{3}$$

さらに，P が安定化可能ならば，任意の安定化補償器は式 (3) 中の X, Y を用いた $C = YX^{-1}$ なる形式をしている．

3節では，任意の P について命題1.1 中の X と Y が因子 (dE) を持つことが可能であることを示し，結果として，安定化可能必要十分条件について命題中の X と Y から (dE) を除くことが可能であることを論じる．

2 一般化基本因子によるフィードバック安定化可能性

この節では，1 つの安定化可能性必要十分条件を与える．まず，[3, 4] により導入された一般化基本因子の概念を示す．この概念は，2 つの行列 $[N^T\ dE]^T$, $[N\ dE]$ に基づく．しかし，それぞれの行列に関する一般化基本因子の集合が等しいことを示して，どちらか一つの行列に関する一般化基本因子を考えれば良いことを示す．最後に，その 1 つの一般化基本因子を用いて安定化可能性必要十分条件を与える．

この節で用いられる記号を定義しよう．$P = Nd^{-1}$ が成り立つとする．但し，$P = Nd^{-1} \in \mathcal{F}^{n\times m}$, $N \in \mathcal{A}^{n\times m}$, $d \in \mathcal{A}$ である．T, W は，$T = [N^T\ \ dE]^T$, $W = [N\ \ dE]$ とする[1]．また，行列 T の行により生成される $\mathcal{A}$-加群，行列 W の列により生成される $\mathcal{A}$-加群をそれぞれ $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$ として表す．特に，T の行，W の列により生成される $\mathcal{A}_f$-加群をそれぞれ $\mathcal{T}_f, \mathcal{W}_f$ と書く．加群については Kunz[5] や Atiyah[6] などのテキストを参照されたい． R を $\mathcal{A}$ または $\mathcal{A}_f$ として，I_{mR} は与えられた行列のサイズ $m\times m$ の小行列式の R 線形結合により生成されるイデアルを表す．

[1]記号 T が行列の superscript の場合，それは転置を表す．

$[\alpha,\beta]$ は α から β までの整数の集合とする．I (J) を要素数$\#I = m$ ($\#J = n$) なる $[1, n+m]$ の部分集合とする．さらに，$\{i_1,\dots,i_m\}$ ($\{j_1,\dots,j_n\}$) は I (J) の降順の要素の集合とする．$\Delta_{TI} \in \mathcal{A}^{m\times(n+m)}$ ($\Delta_{WJ} \in \mathcal{A}^{n\times(n+m)}$) は $i_l \in I$ ($j_l \in J$) なる (l, i_l) 要素 ((l, j_l) 要素) が 1 で，他は 0 である行列とする．$\mathcal{I}$ ($\mathcal{J}$) は，全ての I (全ての J) の集合，$\mathcal{I}^*$ ($\mathcal{J}^*$) は，$\mathcal{I}$ ($\mathcal{J}$) の部分集合で， $\det(\Delta_{TI}T)$ ($\det(\Delta_{WJ}W^T)$) が非零であるものの集合とする．それぞれの $I \in \mathcal{I}^*$, $J \in \mathcal{J}^*$ に対して，イデアル Λ_{TI}, Λ_{WJ} を

$$\begin{aligned}\Lambda_{TI} &= \{\lambda \in \mathcal{A} \,|\, \lambda T(\Delta_{TI}T)^{-1} \in \mathcal{A}^{(n+m)\times m}\},\\ \Lambda_{WJ} &= \{\lambda \in \mathcal{A} \,|\, \lambda W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1} \in \mathcal{A}^{(n+m)\times n}\},\end{aligned} \tag{4}$$

として定義する．全ての Λ_{TI} (全ての Λ_{WJ}) からなる集合を $\mathcal{L}_T$ ($\mathcal{L}_W$) と表す． $\mathcal{L}_T$ の要素が T に関する一般化基本因子，$\mathcal{L}_W$ の要素が W に関する一般化基本因子として定義される．後で示すように，$\mathcal{L}_T$ と $\mathcal{L}_W$ は一致するので，一致することを示した後は，両者とも単に P の一般化基本因子と呼ぶ．著者らは，[3, 4] において，フィードバック安定化可能性を論じるために Λ_{IJ} を$\Lambda_{IJ} = \Lambda_{TI} \cap \Lambda_{WJ}$ として定義したが，その必要は本論ではない．

一般化基本因子はイデアルであるが，その呼称は，Sule[2] により定義された基本因子を一般化したという意味で，名付けた．$\mathcal{A}$ が一意分解整域である場合，Λ_{ij} は単項イデアルとなり，その生成元が [2] で定義された基本因子である．

$\mathcal{L}_T$ と $\mathcal{L}_W$ が一致すること，つまりそれぞれの I には，対応する適当な J が存在して，Λ_{TI} と等しい Λ_{WJ} が存在することを示そう．そのために，まず，I から J への全単射である写像 τ を以下のように定義する．便宜的に，I_N と I_d を I の部分集合として

$$\begin{aligned}I_N &= \{i \,|\, i \le n, i \in I\},\\ I_d &= \{i \,|\, i > n, i \in I\}\end{aligned} \tag{5}$$

と定義する． I_N の要素数は k と考え，I_d の要素数は $m-k$ とする．I_N と I_d に対応して J_N と J_d を

$$\begin{aligned}J_N &= [1, m]\backslash\{i - n \,|\, i \in I_d\},\\ J_d &= \{i + m \,|\, i \in [1, n]\backslash I_N\}\end{aligned} \tag{6}$$

と定義する．ここで，J_N の要素は，m 以下，J_d の要素は m よりも大きい．また $\#J_N=k$, $\#J_d=n-k$. 写像 $\tau : I \to J$ を

$$\tau : I_N \cup I_d \mapsto J_N \cup J_d. \tag{7}$$

として定義する．容易に I_N と I_d は J_N と J_d とにより

$$\begin{aligned} I_N &= [1,n]\backslash\{j-m \mid j \in J_d\}, \\ I_d &= \{j+n \mid j \in [1,m]\backslash J_N\} \end{aligned} \tag{8}$$

として表現できるから，逆写像 $\tau^{-1} : J \to I$ は自明である．

部分行列の今後使う表記法を定義しよう．行列 $M_{\{i_1,\ldots,i_x\}\times\{j_1,\ldots,j_y\}}$ ($M^T_{\{i_1,\ldots,i_x\}\times\{j_1,\ldots,j_y\}}$) は M (M^T) の部分行列とし，その (u,v) 要素は，M (M^T) の (i_u,j_v) 要素とする．ここで，$\{i_1,\ldots,i_x\}$, $\{j_1,\ldots,j_y\}$ ともに降順である．(注意：$M^T_{\{i_1,\ldots,i_x\}\times\{j_1,\ldots,j_y\}}$ は $(M^T)_{\{i_1,\ldots,i_x\}\times\{j_1,\ldots,j_y\}}$ を意味し，$(M_{\{i_1,\ldots,i_x\}\times\{j_1,\ldots,j_y\}})^T$ ではないとする.)

ここで，$\Delta_{TI}T$の逆行列の存在するならば，かつその時に限り，$\Delta_{W\tau(I)}W^T$ の逆行列の存在すること，つまり，$\tau(\mathcal{I}^*)=\mathcal{J}^*$ を示す．それらの行列式を考えた場合，(1) $\det(\Delta_{TI}T)$ は $\det(N_{I_N\times J_N})d^{m-k}$ に符号の違いを除き等しく，また (2) $\det(\Delta_{W\tau(I)}W^T)$ は $\det(N^T_{J_N\times I_N})d^{n-k}$ ($=\det(N_{I_N\times J_N})d^{n-k}$) に符号の違いを除き等しい．このことから，$\tau(\mathcal{I}^*)=\mathcal{J}^*$ を得る．また，τ は$\mathcal{I}^*$ から $\mathcal{J}^*$ への全単射でもあることも分かる．

次に，$I \in \mathcal{I}^*$ に関して，$T(\Delta_{TI}T)^{-1}$ と $W^T(\Delta_{W\tau(I)}W^T)^{-1}$ の関係を調べる．$J=\tau(I)$ とする．容易に

$$\begin{aligned} (T(\Delta_{TI}T)^{-1})_{I\times[1,m]} &= E, \\ (W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1})_{J\times[1,n]} &= E \end{aligned} \tag{9}$$

なる関係は確認できる．$T(\Delta_{TI}T)^{-1}$ の I に含ない列や $W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1}$ の J に含まれない列を調べるために I_N, I_d, J_N, J_d の補完的な集合$\overline{I_N}$, $\overline{I_d}$, $\overline{J_N}$, $\overline{J_d}$ を定義する：

$$\begin{aligned} &\overline{I_N}=[1,n]\backslash I_N, \overline{I_d}=[n+1,n+m]\backslash I_d, \\ &\overline{J_N}=[1,m]\backslash J_N, \overline{J_d}=[m+1,n+m]\backslash J_d. \end{aligned} \tag{10}$$

それらを用いて X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} を

$$\begin{aligned} X_{11} &= (T(\Delta_{TI}T)^{-1})_{\overline{I_N}\times[1,k]}, \\ X_{12} &= (T(\Delta_{TI}T)^{-1})_{\overline{I_N}\times[k+1,m]}, \\ X_{21} &= (T(\Delta_{TI}T)^{-1})_{\overline{I_d}\times[1,k]}, \\ X_{22} &= (T(\Delta_{TI}T)^{-1})_{\overline{I_d}\times[k+1,m]} \end{aligned} \tag{11}$$

とし，Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22} を

$$\begin{aligned} Y_{11} &= (W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1})_{\overline{J_N}\times[1,k]}, \\ Y_{12} &= (W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1})_{\overline{J_N}\times[k+1,n]}, \\ Y_{21} &= (W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1})_{\overline{J_d}\times[1,k]}, \\ Y_{22} &= (W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1})_{\overline{J_d}\times[k+1,n]} \end{aligned} \tag{12}$$

とする．行列 $T(\Delta_{TI}T)^{-1}$ は式 (9) の最初の行列，式 (11) の全ての X_{ij} からなる．同様に，W_J^T は式 (9) の 2 つ目の行列，式 (12) の全ての Y_{ij} からなる．付録に示したような単純な計算を行なうと

$$\begin{aligned} X_{11} &= -Y_{22}^T, \quad X_{12}=Y_{12}^T, \\ X_{21} &= Y_{21}^T, \quad X_{22}=-Y_{11}^T \end{aligned} \tag{13}$$

なる関係を得る．つまり $T(\Delta_{TI}T)^{-1}$ から $i \in I$ について i 列を除いた行列の要素の集合と，$W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1}$ から $j \in J$ について j 列を除いた行列の要素の集合とは等しいことが分かる．さらに，式 (9) より，行列 $T(\Delta_{TI}T)^{-1}$ の $i \in I$ なる i 列と，$W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1}$ なる $j \in J$ の j 列とは，0 と 1 だけからなる．結果的に，$T(\Delta_{TI}T)^{-1}$ の要素の集合と $W^T(\Delta_{WJ}W^T)^{-1}$ の要素の集合は等しい．

以上より，式 (4) の Λ_{TI} と Λ_{WJ} の定義より，以下の命題を得る．

命題 2.1 $\mathcal{L}_T$ は $\mathcal{L}_W$ に一致する．特に，Λ_{TI} は Λ_{WJ} に等しい．但し $I \in \mathcal{I}^*$, $J \in \mathcal{J}^*$, $J=\tau(I)$.

命題2.1 が得られたので，今後，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_T$ (または $\mathcal{L}_W$) として用い，また Λ_I を Λ_{TI} (または $\Lambda_{W\tau(I)}$) として用いる．

以下で，フィードバック安定化可能性の必要十分条件 (定理2.1) を示すが，その前に補助的な結果として命題2.2, 2.3 を示す．これらは，本質的に [3, 4] で示したものと同じであるが，議論において Λ_{IJ} を使わずに，Λ_I (または Λ_J) を用いる．

最初の命題は，[2, 命題6] の一般形である．安定コーザル領域は，一意分解整域に限らず任意の整域である．

命題 2.2 [4, 補助定理3.1] Λ_I の任意の非零要素 λ_I に関して，$\mathcal{T}_{\lambda_I}$ ($\mathcal{W}_{\lambda_I}$) は階数 m (n) の自由 $\mathcal{A}_{\lambda_I}$-加群である．

証明. λ_I を Λ_I の非零要素とする. Λ_I の定義より K を $K = \lambda_I T(\Delta_{TI}T)^{-1}$ とする. T の $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上の因数分解形として

$$T = (\lambda_I^{-1}K)(\Delta_{TI}T) \tag{14}$$

を得る. 但し, $\lambda_I^{-1}K$ の全要素は $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ に属す. $\lambda_I^{-1}\Delta_{TI}K$ は $\mathcal{A}_{\lambda_I}^{m\times m}$ の単位行列 /*/ であるから, サイズ $m \times m$ の$\lambda_I^{-1}K$ の小行列は, $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ を生成する. $(\Delta_{TI}T)$ の任意の要素は, $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ に属し, かつ $\det(\Delta_{TI}T) \neq 0$ を満たす. つまり, $\mathcal{T}_{\lambda_I}$ は階数 m の自由 $\mathcal{A}_{\lambda_I}$-加群である.

$\mathcal{W}_{\lambda_I}$ についても同様. □

次の命題は, P の $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 安定可能性を与える. 但し, λ_I は Λ_I の非零要素.

命題 2.3 [4, 補助定理3.2] 1 つの一般化基本因子 Λ_I を考え, その任意の非零要素を λ_Iとする. P は $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上で, 2 重既約分解 (Doubly Coprime Factorization) が存在する. また, P は $\mathcal{A}_{\lambda_I}$-安定化可能.

証明. 命題2.2 より $\mathcal{T}_{\lambda_I}$, $\mathcal{W}_{\lambda_I}$ はそれぞれ階数 m, n の自由 $\mathcal{A}_{\lambda_I}$-加群である. つまり, [2, 補題3] より, 2 重既約分解が存在する. そのときの $\mathcal{A}_{\lambda_I}$-安定化可能性は自明. □

命題1.1, 2.3 より命題1.1 中の X, Y, A, B を $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上で N と d から得ることができる.

定理 2.1 P が安定化可能であるならば, またそのときに限り $\mathcal{L}$ は以下の条件を満たす:

$$\sum_{\Lambda_I \in \mathcal{L}} \Lambda_I = \mathcal{A}. \tag{15}$$

証明. (Only If). 安定化可能より, [2, 定理1] から, 加群 $\mathcal{T}$ は, 階数 m の射影加群 (projective module) である. また [7, 定理1(p.109)] より, 適当な集合 F が存在して, それらはそれぞれ $\mathcal{A}$ を生成し, 任意の $f \in F$ について, $\mathcal{T}_f$ は自由 $\mathcal{A}_f$-加群となる.

以下, 任意の $f \in F$ を固定して考える. $\mathcal{T}_f$ には, m 個の $\mathcal{A}_f$ 線形独立なベクトルが存在し, それらが行となる行列 V_f $(\in \mathcal{A}^{m\times m})$ が存在する. つまり, 適当な正整数 ν と行列 K_f が存在して

$$T = f^{-\nu}K_f V_f \tag{16}$$

が成り立つ. ここで, $K_f \in \mathcal{A}^{(n+m)\times m}, I_{m\mathcal{A}_f}(f^{-\nu}K_f) = \mathcal{A}_f$.

一般化基本因子の定義中の Δ_{TI} を用いて T_I と K_{fI} とを $T_I = \Delta_{TI}T$ と $K_{fI} = \Delta_{TI}K_f$ とする. このとき

$$TT_I^{-1} = K_f K_{fI}^{-1} \tag{17}$$

が成り立つ. よって, $TT_I^{-1}\det K_{fI} \in \mathcal{A}^{(n+m)\times m}$ より $\det K_{fI} \in \Lambda_I$ である. $I_{m\mathcal{A}}(K_f)$ は, このような $\det K_{fI}$ の $\mathcal{A}$ 線形結合なので $I_{m\mathcal{A}}(K_f) \subset \sum_{\Lambda_I\in\mathcal{L}}\Lambda_I$ となる. 一方, $I_{m\mathcal{A}_f}(f^{-\nu}K_f) = \mathcal{A}_f$ より, 十分に大きな正整数 ξ に対して

$$(f^{\xi}) \subset I_{m\mathcal{A}}(K_f) \tag{18}$$

となる. ただし, (f^{ξ}) は f^{ξ} が生成元である $\mathcal{A}$ 上の単項イデアル. よって $\sum_{f\in F}(f^{\xi}) \subset \sum_{\Lambda_I\in\mathcal{L}}\Lambda_I$ となる. さらに $\sum_{f\in F}(f^{\xi}) = \mathcal{A}$ より

$$\sum_{\Lambda_I\in\mathcal{L}} \Lambda_I = \mathcal{A} \tag{19}$$

となる.

(If). 実際に補償器を構成して安定化可能を示す.

$\sum_{\Lambda_I\in\mathcal{L}}\Lambda_I = \mathcal{A}$ より, $\sum_I \lambda_I = 1$ なる, $\lambda_I \in \Lambda_I$ が存在する. そのような λ_I に関する $\lambda_I \neq 0$ なる I の集合を $\mathcal{I}^+$ とする. [2, 補題3] より, $I \in \mathcal{I}^+$ について, $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上, P には2重既約分解が存在する. よって, P は $\mathcal{A}_{\lambda_I}$-安定化可能であり, 個々の非零な λ_I について定理1.1 より $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上の X_I, Y_I, A_I, B_I が存在して

$$\begin{aligned} X_I N = A_I d,\ \ Y_I N = B_I d,& \\ N Y_I = (E - X_I)d& \end{aligned} \tag{20}$$

が成り立つ. また, 任意の正整数 ν について, それに対応した適当な $a_I \in \mathcal{A}$ が存在して $\sum_I a_I \lambda_I^{\nu} = 1$ を得る. 十分に大きな ν をとることにより, $\sum_I$ 内は全て $\mathcal{A}$ の要素であるような

$$\sum_{I\in\mathcal{I}^+}(a_I\lambda_I^{\nu}X_I)N = \sum_{I\in\mathcal{I}^+}(a_I\lambda_I^{\nu}A_I)d, \tag{21}$$

$$\sum_{I\in\mathcal{I}^+}(a_I\lambda_I^{\nu}Y_I)N = \sum_{I\in\mathcal{I}^+}(a_I\lambda_I^{\nu}B_I)d, \tag{22}$$

$$N\sum_{I\in\mathcal{I}^+}(a_I\lambda_I^{\nu}Y_I)$$

/*/ ※雑記帳 Vol.1, p.30

$$= \sum_{I\in\mathcal{I}^+}(a_I\lambda_I^{\nu}(E-X_I))d$$
$$= (E - \sum_{I\in\mathcal{I}^+}(a_I\lambda_I^{\nu}X_I))d \quad (23)$$

を得る．よって，$X=\sum_I(a_I\lambda_I^{\nu}X_I), Y=\sum_I(a_I\lambda_I^{\nu}Y_I)$ として $C=YX^{-1}$ なる補償器を得る． □

3 安定化可能性必要十分条件の簡単化

この節では，フィードバック安定化可能性の必要十分条件を１つ示す．基本的に，まず命題1.1 中の X, Y が任意の P に関して因子 (dE) を持ち得ることを示す．そしてそれを除いた形式で安定化可能必要十分条件を表す．そのために，まず $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上の二重既約分解について述べ，$\mathcal{A}_{\lambda_I}$-安定化補償器を構成し，命題1.1 に適用する．そしてそれらの補償器より，$\mathcal{A}$-安定化補償器を構成する．

この節においてもの２節で用いた記号を使う．１つの集合 $I\in\mathcal{I}^*$ を固定する．$T_I=\Delta_{TI}T$, $J=\tau(I)$, $W_J^T=\Delta_{WJ}W^T$とする．I と J は $\{i_1,\ldots,i_m\}$, $\{j_1,\ldots,j_n\}$ であるとし，それらは降順であるとする．サイズ $m\times(n+m)$ 行列 U は，$i_l\in I$ に対して，その i_l 列は T_I^{-1} の l 列からなり，他の列は全て 0 とする．加えて，サイズ $n\times(n+m)$ の行列 V^T は，$j_l\in J$ に対して，j_l 列は $W_J^{T^{-1}}$ の l 列からなり，他の列は全て 0 とする．そのとき，$UT=E$, $WV=E$ を得る．

$X'_{I0}, Y'_{I0}, \widetilde{Y'_{I0}}, \widetilde{X'_{I0}}$をそれぞれ $X'_{I0}=U_{[1,m]\times[n+1,n+m]}$, $Y'_{I0}=U_{[1,m]\times[1,n]}$, $\widetilde{Y'_{I0}}=V_{[1,m]\times[1,n]}$, $\widetilde{X'_{I0}}=V_{[m+1,n+m]\times[1,n]}$, とすると，

$$\begin{bmatrix} X'_{I0} & Y'_{I0} \\ -N & dE \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dE & -\widetilde{Y'_{I0}+K_0d} \\ N & \widetilde{X'_{I0}+NK_0} \end{bmatrix} = E \quad (24)$$

を得る．但し，$K_0=X'_{I0}\widetilde{Y'_{I0}}-Y'_{I0}\widetilde{X'_{I0}}$ である．これは，$\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上の２重既約分解である．よって $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上の任意の２重既約分解は

$$\begin{bmatrix} X'_{I0}-KN & Y'_{I0}+Kd \\ -N & dE \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dE & -\widetilde{Y'_{I0}}+(K+K_0)d \\ N & \widetilde{X'_{I0}}+N(K+K_0) \end{bmatrix} = E \quad (25)$$

として与えられる．ここで K は $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ のサイズ $m\times n$ であるパラメータ行列である (cf. [8, 9])．X'_I, Y'_I, $\widetilde{X'_I}$, $\widetilde{Y'_I}$ を $X'_I=X'_{I0}-KN$, $Y'_I=Y'_{I0}+Kd$, $\widetilde{X'_I}=\widetilde{X'_{I0}}+N(K+K_0)$, $\widetilde{Y'_I}=\widetilde{Y'_{I0}}+(K+K_0)d$ とする．$\mathcal{A}_{\lambda_I}$ 上の任意の補償器は

$$\widetilde{Y'_I}\widetilde{X'_I}^{-1} \quad (26)$$

(or $=X'_IY_I'^{-1}$) として与えられる (但し，$\det(\widetilde{X'_I})\neq 0$)．

この事実を領域を $\mathcal{A}_{\lambda_I}$ として命題1.1 に適用すれば，以下の関係を得る：

$$X=\widetilde{X'_I}d, \quad (27)$$
$$Y=\widetilde{Y'_I}d=Y'_Id, \quad (28)$$
$$A=NX'_I=\widetilde{X'_I}N, \quad (29)$$
$$B=E-X'_Id=Y'_IN=\widetilde{Y'_I}N. \quad (30)$$

新しいフィードバック安定化可能性の必要十分条件をここで示そう．

命題 3.1 プラント $P=Nd^{-1}$ $(N\in\mathcal{A}^{n\times m}, d\in\mathcal{A})$ が安定化可能であるならば，またその時に限り行列 $\widetilde{X'}\in\mathcal{A}^{n\times n}$, $A'\in\mathcal{A}^{n\times m}$, $\widetilde{Y'}\in\mathcal{A}^{m\times n}$, $B'\in\mathcal{A}^{m\times m}$ が存在して

$$\widetilde{X'}N=A',\ \widetilde{Y'}N=B',\quad N\widetilde{Y'}=E-\widetilde{X'}d \quad (31)$$

を満たす．P が安定化可能である場合，$C=\widetilde{Y'}\widetilde{X'}^{-1}$ を満たす補償器が存在する．

証明． 証明中，$\mathcal{I}^+$ と λ_I は，定理2.1のものとする．すなわち $\sum_{I\in\mathcal{I}^+}\lambda_I=1$ となる．
(Only if)．十分に大きな正整数 ν_I について$\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{X'_I}$, $\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{Y'_I}$の全ての要素は $\mathcal{A}$ に属す．$\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}=1$ が適当な a_I's $(\in\mathcal{A})$ について成り立つこと，また式(27)–(30) より $\mathcal{A}$-安定化補償器は

$$(\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{Y'_I})(\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{X'_I})^{-1} \quad (32)$$

として得られる．ここで，命題1.1 について以下の関係を適用した：

$$X=\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{X'_I}d, \quad (33)$$
$$Y=\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{Y'_I}d, \quad (34)$$
$$A=\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{X'_I}N, \quad (35)$$
$$B=\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{Y'_I}N. \quad (36)$$

$\widetilde{X'}$ と $\widetilde{Y'}$ をそれぞれ$\widetilde{X'}=(\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{X'_I})$, $\widetilde{Y'}=(\sum_{I\in\mathcal{I}^+}a_I\lambda_I^{\nu_I}\widetilde{Y'_I})$, として命題中の A と B を $A'=A$, $B'=B$ とすれば，直ちに式 (31) を得る．

(If). X, Y, A, B を $X = \widetilde{X'}d$, $Y = \widetilde{Y'}d$, $A = A'$, $B = B'$ とすれば，式 (31) より式 (3) を得る． □

今回得られたフィードバック安定化可能性必要十分条件は，Sule の結果よりも因子 (dE) がないという意味で簡単である．しかし，Sule の結果は全ての安定化補償器の特徴付けを行なっているのに対して，今回の結果では，全ての安定化補償器の特徴付けを与えない．今回の結果は，安定化可能であるか否かだけを与える．この点に関しては我々の結果の短所であると考えられる．

命題3.1 は補償器$\widetilde{Y'}\widetilde{X'}^{-1}$ に関するものであると考えられ，$X'^{-1}Y'$ なる形式の補償器に関する命題は，以下のように与えられる．証明は略した．

命題 3.2 プラント $P = Nd^{-1}$ $(N \in \mathcal{A}^{n\times m},\ d \in \mathcal{A})$ が安定化可能であるならば，またその時に限り行列 $X' \in \mathcal{A}^{m\times m}$, $A'' \in \mathcal{A}^{n\times m}$, $Y' \in \mathcal{A}^{m\times n}$, $B \in \mathcal{A}^{n\times n}$ が存在して

$$\begin{aligned} NX' = A'',\quad NY' = B'', \\ Y'N = E - X'd \end{aligned} \tag{37}$$

を満たす．P が安定化可能である場合，$C = X'^{-1}Y'$ を満たす補償器が存在する．

参考文献

[1] S. Shankar and V. R. Sule. Algebraic geometric aspects of feedback stabilization. *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 30, No. 1, pp. 11–30, 1992.

[2] V. R. Sule. Feedback stabilization over commutative rings: The matrix case. *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 32, No. 6, pp. 1675–1695, 1994.

[3] K. Mori and K. Abe. Feedback stabilization and robustness of stabilizability over integral domains. In *MTNS'96*, 1996.

[4] 森和好, 阿部健一. 整域上のフィードバック安定化および安定可能性のロバスト性について. 第 25 回 制御理論シンポジウム, pp. 11–16, 1996.

[5] E. Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Birkhäuser, 1985.

[6] M. F. Atiyah and I. G. McDonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[7] N. Bourbaki. *Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1972.

[8] V. Kučera. *Discrete Linear Control.* John Wiley and Sons, 1979.

[9] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis: A Factorization Approach.* MIT Press, Cambridge, MA, 1985.

Appendix

A X_{ij} と Y_{ij} の関係

式 (13) の関係を示す．記法は 2 節に従う．以下に基本的な関係式を列挙しておく．紙面の関係上 $X_{21} = Y_{21}^T$, $X_{11} = -Y_{22}^T$ の関係を示す．他の関係 $X_{12} = Y_{12}^T$, $X_{21} = -Y_{11}^T$ は基本的な関係式 (38)-(53) より導出することが可能である．

$$T_{I_N\times J_N} = (W^T_{J_N\times I_N})^T \tag{38}$$

$$T_{I_N\times \overline{J_N}} = (W^T_{\overline{J_N}\times I_N})^T \tag{39}$$

$$T_{\overline{I_N}\times J_N} = (W^T_{J_N\times \overline{I_N}})^T \tag{40}$$

$$T_{\overline{I_N}\times \overline{J_N}} = (W^T_{\overline{J_N}\times \overline{I_N}})^T \tag{41}$$

$$0^{(m-k)\times k} = T_{I_d\times J_N} \quad 0^{(n-k)\times k} = W^T_{J_d\times I_N} \tag{42}$$

$$dE_{m-k} = T_{I_d\times \overline{J_N}} \quad dE_{n-k} = W^T_{J_d\times \overline{I_N}} \tag{43}$$

$$dE_k = T_{\overline{I_d}\times J_N} = W^T_{\overline{J_d}\times I_N} \tag{44}$$

$$0^{k\times(m-k)} = T_{\overline{I_d}\times \overline{J_N}} \quad 0^{k\times(n-k)} = W^T_{\overline{J_d}\times \overline{I_N}}. \tag{45}$$

X_{ij} に関して以下の 4 つの関係がある:

$$T_{\overline{I_N}\times J_N} = X_{11}T_{I_N\times J_N}, \tag{46}$$

$$T_{\overline{I_N}\times \overline{J_N}} = X_{11}T_{I_N\times \overline{J_N}} + X_{12}(dE), \tag{47}$$

$$dE = T_{\overline{I_d}\times J_N} = X_{21}T_{I_N\times J_N}, \tag{48}$$

$$0 = T_{\overline{I_d}\times \overline{J_N}} = X_{21}T_{I_N\times \overline{J_N}} + X_{22}(dE). \tag{49}$$

Y_{ij} に関して以下の 4 つの関係がある:

$$W^T_{\overline{J_N}\times I_N} = Y_{11}W^T_{J_N\times I_N}, \tag{50}$$

$$W^T_{\overline{J_N}\times \overline{I_N}} = Y_{11}W^T_{J_N\times \overline{I_N}} + Y_{12}(dE), \tag{51}$$

$$dE = W^T_{\overline{J_d}\times I_N} = Y_{21}W^T_{J_N\times I_N}, \tag{52}$$

$$0 = W^T_{\overline{J_d}\times \overline{I_N}} = Y_{21}W^T_{J_N\times \overline{I_N}} + Y_{22}(dE). \tag{53}$$

式 (48), (51) より，$\det(T_{I_N\times J_N}) \neq 0$ であるから：

$$\begin{aligned} X_{21} &= (dE)(T_{I_N\times J_N})^{-1} = (dE)({W^T_{J_N\times I_N}}^{-1})^T \\ &= ((dE){W^T_{J_N\times I_N}}^{-1})^T = Y_{21}^T. \end{aligned} \tag{54}$$

式 (46), (53), (54) より:

$$\begin{aligned} X_{11} &= T_{\overline{I_N}\times J_N}T^{-1}_{I_N\times J_N} \\ &= (W^T_{J_N\times \overline{I_N}})^T((W^T_{J_N\times I_N})^T)^{-1} \\ &= ((W^T_{J_N\times I_N})^{-1}W^T_{J_N\times \overline{I_N}})^T, \\ Y_{22} &= -Y_{21}W^T_{J_N\times \overline{I_N}}(dE)^{-1} \\ &= -(dE){W^T_{J_N\times I_N}}^{-1}W^T_{J_N\times \overline{I_N}}(dE)^{-1} \\ &= -{W^T_{J_N\times I_N}}^{-1}W^T_{J_N\times \overline{I_N}} \\ &= -X_{11}^T. \end{aligned} \tag{55}$$