

非線形の特性改善を使った非線形モデル追従形制御

Design of Nonlinear Model Following Control System based on Modifying Nonlinearity

○劉 維正*, 大久保 重範*

○Weizheng Liu*, Shigenori Okubo*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード：非線形 (nonlinearity), モデル追従 (model following), 遺伝的アルゴリズム (GA:Genetic Algorithm), 内積条件 (inner product condition), 状態フィードバック (state feedback),

連絡先：〒992 米沢市城南4-3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
劉維正, Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: liuweizh@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

非線形系のモデル追従形制御系の設計は大久保¹⁾によって制御対象を線形部+非線形部に分離して内部状態有界の設計方法が開発された。また改善策として文献²⁾では非線形部の性質を積極的に使うことにより、線形部の伝達関数の零点が安定でない場合に対しても内部状態有界な設計方法が提案された。しかしながら、文献^{1),2)}においては非線形部に関する正実条件と内積条件は本方法の応用には大きな制約となるため、これらの条件を除くことが望ましい。一方、線形制御系を設計するために状態フィードバックを用いて極配置を行う方法があり、本論文ではそのアプローチを非線形系に拡張し、非線形状態フィードバックにより非線形系モデル追従形制御系設計の改善方法を提案する。本論文では非線形部の性質を積極的に利用することにより、文献^{1),2)}の内積条件が満足されない制御対象に最高次のべき次数項についての

フィードバックを用いることにより、内積条件が満足されるようにする方法を示す。もとの制御対象が内積条件を満たさない場合でも、非線形補償を使うことにより内部状態が有界な非線形モデル追従形制御が可能である。本論文では従来の非線形モデル追従形制御系の正実条件について考察し、正則行列 R の導入を提案し、文献^{1),2)}の正実条件を緩和する。本方法では非線形状態フィードバックを利用して非線形部の内積条件を満足させる。非線形部をべき状態ベクトルで表示して、非線形状態フィードバックを決めるためには遺伝的アルゴリズム (GA:Genetic Algorithm) を使う。GA を非線形系の設計に導入することによって任意のべき次数の非線形系に対する設計が可能になる。本論文では非線形関数のノルムを $(\alpha_i \geq 0, \beta_i > 0, \gamma_i \geq 0)$ パラメータで特徴付け、伝達関数の正実性および非線形関数とべき状態に関する仮定が使われるが、それは内部状態を有界にするため、制御対象に課

する条件であり、制御則の設計パラメータはこれらの条件に無関係に選択できる。縮約形ベクトルの導入によって非線形状態フィードバックのベクトル次元はクロネッカーべきより小さくなり、制御系の設計には便利である。本論文では一般的な設計法および有界性の証明を述べ、最後にシミュレーションにより有効性を示す。

2. 問題の設定

本論文で取り扱う制御対象は (1)、(2) 式のように記述する。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}_0(t) \quad (2)$$

ここでは各ベクトルはつぎの次元を持つ。

$$\mathbf{x}(t) \in R^n, \mathbf{u}(t) \in R^l, \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \in R^n,$$

$$\mathbf{d}(t) \in R^n, \mathbf{y}(t) \in R^l, \mathbf{d}_0(t) \in R^l,$$

$\mathbf{x}(t)$ が内部状態ベクトルであり、すべて利用可能とする。 $\mathbf{u}(t)$ は制御入力、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ は既知な非線形部のベクトル、 $\mathbf{d}(t)$ 、 $\mathbf{d}_0(t)$ は有界外乱、 $\mathbf{y}(t)$ は制御対象の出力、非線形部はつぎの条件を満たすものとする。

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) + A_{[1,2N-1]} \mathbf{x}^{[2N-1]}(t) \quad (3)$$

$$\|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t))\| \leq \alpha_1 + \beta_1 \|\mathbf{x}(t)\|^{\gamma_1} \quad (4)$$

ここでは $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, 0 \leq \gamma_1 < 2N - 1$ ($N > 1$ の自然数である) の定数とし、 $A_{[1,2N-1]}$ はテンソル形式で表示する非線形部 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ の最高次数の係数であり、 $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t))$ は非線形部最高次数以外の部分をまとめた項であり、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである。外乱 $\mathbf{d}(t)$ 、 $\mathbf{d}_0(t)$ は有界な線形外乱で、外乱の特性多項式を $D_d(p)$ とすれば (5) 式を満たす。 $D_d(p)$ は既知確定スカラー多項式である。

$$D_d(p)\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}, D_d(p)\mathbf{d}_0(t) = \mathbf{0} \quad (5)$$

モデルは (6) 式で与える。

$$D_m(p)\mathbf{y}_m(t) = N_m(p)\mathbf{r}_m(t) \quad (6)$$

ここで $\mathbf{y}_m(t) \in R^l, \mathbf{r}_m(t) \in R^l$ である。 $D_m(p)$ は安定モニックな対角行列とし、(7) 式で与えられるとする。

$$D_m(p) = \text{diag}[D_{m_k}(p)]; (l \times l), \partial D_{m_k}(p) = n_{m_k} \quad (7)$$

分子 $N_m(p)$ は $l \times l_m$ の一般多項式行列であり、各行次数は $\partial_{r_k} N_m(p) = \sigma_{m_k}$ である。ここでは $\partial(\cdot)$ 多項式 (\cdot) の次数を表し、 $\partial_{r_k}(\cdot)$ は多項式行列 (\cdot) の k 番目の行次数を表す。出力誤差は (8) 式で与える。

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_m(t) \quad (8)$$

3. モデル追従形制御系の設計

本章では内部状態が有界で、出力誤差がゼロに収束するような非線系モデル追従形制御系を設計する手順を次のように示す。まず定数 $\lambda > 0$ を使い、 $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$ を (9) 式のように定義し、 $\mathbf{u}(t)$ を (10) 式のように二つのステップに分けて設計する。

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \lambda\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (9)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \quad (10)$$

(1)、(2) 式のシステムが (11)、(12) 式にまとめられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & -\lambda\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \\ & + B\mathbf{u}_1(t) + B\mathbf{u}_2(t) + \mathbf{d}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}_0(t) \quad (12)$$

ここで $\mathbf{u}_1(t)$ を非線形部の特性改善に使い、 $\mathbf{u}_2(t)$ をモデル追従形制御に使う。以下では $\mathbf{u}_1(t)$ と $\mathbf{u}_2(t)$ の設計方法をそれぞれ示す。

3.1 $\mathbf{u}_1(t)$ の設計

$\mathbf{u}_1(t)$ は次のように設計する。

$$\mathbf{u}_1(t) = K_{[1,2N-1]} \mathbf{x}^{[2N-1]}(t) \quad (13)$$

とする。次式が満足される $K_{[1,2N-1]}$ を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)R[A_{[1,2N-1]} + BK_{[1,2N-1]}]\mathbf{x}^{[2N-1]}(t) \\ = -\mathbf{x}^{T[N]}(t)Q_{[N,N]}\mathbf{x}^{[N]}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$Q_{[N,N]}$ が正定対称行列となるような $K_{[1,2N-1]}$ を求める。ここで $|R| \neq 0$ は $n \times n$ の正則行列であり、 $Q_{[N,N]}$ が正定に成りやすいように導入するパラメータ行列である。 $K_{[1,2N-1]}$ の要素を求めることは連立代数方程式の解に帰着できるが、この連立代数方程式においては方程式の数が未知数の数より少ないので、 $Q_{[N,N]}$ を与えて $K_{[1,2N-1]}$ を求めることが不可能である。数学的には解けないと言ってよい。そこで、遺伝的アルゴリズムの手法を用いて $K_{[1,2N-1]}$ を数値的に代入して、 $Q_{[N,N]}$ が正定になるように $K_{[1,2N-1]}$ を選ぶ。問題を簡単化するために (14) 式の左辺を以下のように処理する。クロネッカーべき $\mathbf{x}^{[2N-1]}(t)$ には互いに独立な要素だけを取り出して縮約形ベクトル $\mathbf{x}^{<2N-1>}(t)$ をつくる。縮約形ベクトルはクロネッカーべきより次元が小さく、制御系の設計には便利である。たとえば $n=2$ 、 $N=2$ の場合では

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{[2N-1]}(t) \\ = [x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2^2, x_2^3]^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{x}^{<2N-1>}(t) = [x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3]^T \quad (16)$$

となる。共変対称テンソル $A_{[1,2N-1]}$ に対して次式を満たす行列 $A_{<1,2N-1>}$ が存在する。

$$\begin{aligned} A_{[1,2N-1]}\mathbf{x}^{[2N-1]}(t) \\ = A_{<1,2N-1>}\mathbf{x}^{<2N-1>}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

それでは (13) 式を次式に書き換える。

$$\mathbf{u}_1(t) = K_{<1,2N-1>}\mathbf{x}^{<2N-1>}(t) \quad (18)$$

そして、(14) 式が次のように簡単化できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)R[A_{<1,2N-1>} + BK_{<1,2N-1>}]\mathbf{x}(t)^{<2N-1>} \\ = -\mathbf{x}^{T<N>}(t) \langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle \mathbf{x}^{<N>}(t) \end{aligned} \quad 0 \quad (19)$$

(19) 式は非線形部の次数が高く、あるいは内部状態が多い場合には (13) 式より大幅に簡単になる。

(19) 式を解くために $K_{<1,2N-1>}$ をランダムに与えて GA による $\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle$ を求め、 $\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle$ が正定になるまで $K_{<1,2N-1>}$ コードに対して遺伝子操作を繰り返し、適応度関数が最大になるように探索する。ランダムに $K_{<1,2N-1>}$ の初期親集合を生成して、各 $K_{<1,2N-1>}$ をコード化して遺伝子とし、適応度関数を計算して各遺伝子を評価する。適応度関数 $f_Q = \lambda_{\min}(\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle)$ と定義する。ただし $\lambda_{\min}(\cdot)$ は行列の最小固有値を表し、 $\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle$ は $Q_{[N,N]}$ から任意性を除去した第 2 最簡形式を表す⁵⁾。適応度関数が $f_Q > 0$ となれば、設計が完了する。 $K_{<1,2N-1>}$ コード集合から最良のベクトルを含めて必要個数を次世代のために選択する (Selection)。これをエリート選択という。選択された遺伝子集合からランダムに 2 個を選び、一点交差によって新しい遺伝子を生成する (Crossover)。交差の操作で生成した遺伝子集合から一定の個数をランダムに選び、突然変異 (Mutation) の操作を行なう。エリート選択された遺伝子は交差、突然変異の操作を受けずに次世代に伝達されるものとする。従ってエリート選択を使う場合、適応度関数は単調増加である。一点交差とは二つの遺伝子 A、B に対して分離する位置をランダムに選択し、A、B をそれぞれ A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 の二つに分けて A_1 と B_2 を連結し子遺伝子 C をつくる。突然変異とは選ばれた遺伝子コードベクトルに対して、一定個数の位置をランダムに選択し、その位置のビットを反転することである。このように次世代遺伝子集合を生成する。以上の手順で繰り返して適応度関数 $f_Q > 0$ を満足する $K_{<1,2N-1>}$ を求める。GA の探索範囲は $A_{<1,2N-1>}$ と B の数値の大小を参考にして選択する。以上は $\mathbf{u}_1(t)$ の設計手順である。次は $\mathbf{u}_2(t)$ の設計手順を示す。

3.2 $u_2(t)$ の設計

$u_2(t)$ を設計するために、微分演算子を $p = \frac{d}{dt}$ とし、(21)~(29)式のように予備処理をする。

$$h(x(t)) = g(x(t)) + Bu_1(t) \quad (20)$$

とする、(11)式が次のようにまとめられる。

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + h(x(t)) + Bu_2(t) + d(t) \quad (21)$$

(2)、(21)式より制御対象の入出力関係は(22)式になる。

$$(p + \lambda)y(t) = Ch(x(t)) + CBu_2(t) + Cd(t) + (p + \lambda)d_0(t) \quad (22)$$

$D(p)$ 、 N_r 、 $w(t)$ は次のように定義すると

$$D(p) = (p + \lambda)I \quad (23)$$

$$N_r = CB \quad (24)$$

$$w = Cd(t) + (p + \lambda)d_0(t) \quad (25)$$

I は単位行列を表す。(22)式は(26)で表す。

$$D(p)y(t) = Ch(x(t)) + N_ru_2(t) + w(t) \quad (26)$$

N_r は正則行列とする。次に(27)式のように対角で安定な多項式行列 $T(p)$ を与える。

$$T(p) = \text{diag}(T_k(p)) \quad (27)$$

ここでは $T(p) \in R^{(l \times l)}$ 、 $\partial T_k(p) = \rho_k$ 、 $\partial D_d(p) = n_d$ とすると、

$$\rho_k = n_d - n_{m_k} + 1 \geq 0 \quad (28)$$

n_{m_k} は(28)式を満足するように選ぶものとする。この $T(p)$ を使って、次式より $S(p)$ を求める。

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(p) + S(p) \quad (29)$$

(29)式では $T(p)$ 、 $D_m(p)$ 、 $D(p)$ は対角な既知確定多項式行列であり、 $D_d(p)$ は既知確定スカラー多項式である。次に $u_2(t)$ を構造する。制御入力を構

成する伝達関数がプロパーになるように(30)式のような安定モニックな対角行列 $Q(p)$ を使い、(6)、(8)、(29)式から(31)式のように $T(p)D_m(p)e(p)$ を計算する。

$$Q(p) = \text{diag}(Q_k(p)) \quad (30)$$

ここでは $Q(p) \in R^{(l \times l)}$ 、 $\partial Q_k(p) = n_d$ とする、

$$T(p)D_m(p)e(t) = D_d(p)D(p)y(t) + S(p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (31)$$

$$e(t) = \frac{Q(p)}{T(p)D_m(p)} \{ (D_d(p) - Q(p))N_ru_2(t) + Q(p)N_ru_2(t) + D_d(p)Ch(x(t)) + S(p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \} \quad (32)$$

$|N_r| \neq 0$ なので、(32)式の右辺をゼロにするように $u_2(t)$ を求める。

$$u_2(t) = N_r^{-1}Q(p)^{-1}(D_d(p) - Q(p))N_ru_2(t) - N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)Ch(x(t)) - N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p)y(t) + N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (33)$$

$u_2(t)$ を構成する伝達関数が proper になるように、モデルの次数に対してつぎの条件が満たされているものとする。

$$n_{m_k} - \sigma_{m_k} \geq 1 \quad (34)$$

σ_{m_k} は(34)式を満たすように選ぶ。(34)式の $u_2(t)$ は $e(t) = 0$ にするから、制御系を構成する内部状態が有界であればモデル追従形制御系が実現できる。

4. 内部状態の有界性の証明

証明をスムーズにするために、つぎの補題を述べておく。

[補題1]

任意の $\epsilon > 0$ に対してつぎの不等式が成り立つ。

$$q_1x^{\gamma_1} - q_2x^{\gamma_2} \leq \alpha - \beta x^{\gamma_2}$$

ただし $q_1 \geq 0, q_2 > 0, \gamma_2 > \gamma_1 \geq 0, \alpha \geq 0, \beta > 0$ である。

(証明略)

[補題2]

縮約形ベクトルのノルムと状態ベクトルのノルムの関係についてつぎの不等式が成り立つ。

$$\mu_1 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N} \leq \|\mathbf{x}(t)\|^{2N} \leq \mu_2 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N}$$

を満足する $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ が存在する。

(証明略)

つぎでは、状態空間手法を用いて内部状態の有界性を証明する。状態空間表示を使って $\mathbf{u}_2(t)$ を表すために次のような状態変数を導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) = & -H_1 \xi_1(t) - E_2 \mathbf{y}(t) - H_2 \xi_2 \\ & - E_3 \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) - H_3 \xi_3 + \mathbf{u}_m \end{aligned} \quad (35)$$

$\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ は次の状態変数フィルタの状態である。

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1 \xi_1(t) + G_1 \mathbf{u}_2(t) \quad (36)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2 \xi_2(t) + G_2 \mathbf{y}(t) \quad (37)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3 \xi_3(t) + G_3 \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \quad (38)$$

多項式行列とシステム行列の間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} H_1(pI - F_1)^{-1} G_1 = \\ N_r^{-1} Q(p)^{-1} (D_d(p) - Q(p)) N_r \end{aligned} \quad (39)$$

$$E_2 + H_2(pI - F_2)^{-1} G_2 = N_r^{-1} Q(p)^{-1} S(p) \quad (40)$$

$$E_3 + H_3(pI - F_3)^{-1} G_3 = N_r^{-1} Q(p)^{-1} D_d(p) C \quad (41)$$

ここでは $|pI - F_i| = |Q(p)|$ ($i = 1, 2, 3$) である。

外部信号 $\mathbf{u}_m(t)$ は (42) 式で与えられる。

$$\mathbf{u}_m(t) = N_r^{-1} Q(p)^{-1} T(p) N_m(p) \mathbf{r}_m(t) \quad (42)$$

制御系全体の状態空間表示は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} (\lambda + BE_2C) & -BH_1 & -BH_2 & -BH_3 \\ -G_1E_2C & (F_1 - G_1H_1) & -G_1H_2 & -G_1H_3 \\ G_2C & 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} \\ & * \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I - BE_3) \\ -G_1E_3 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \\ & + \begin{bmatrix} B\mathbf{u}_m(t) + \mathbf{d}(t) - BE_2\mathbf{d}_0(t) \\ G_1\mathbf{u}_m - G_1E_2\mathbf{d}_0(t) \\ G_2\mathbf{d}_0(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}_0(t) \quad (44)$$

さらに

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}^T(t), \xi_1^T(t), \xi_2^T(t), \xi_3^T(t)]^T \quad (45)$$

とすれば、(43)式は(46)式に書直す。

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A_s \mathbf{z}(t) + B_s \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{d}_s(t) \quad (46)$$

$$\mathbf{x}(t) = C_s \mathbf{z}(t) \quad (47)$$

(46)式では A_s, B_s, \mathbf{d}_s の内容は(43)式に対応すれば、明白になる。したがって内部状態の有界性を証明するために、 $\mathbf{z}(t)$ の有界性を示せばよい。 $C_s = [I, 0, 0, 0]$ 、 A_s の特性方程式は

$$|pI - A_s| = |T(p)| |D_m(p)| |Q(p)|^2 (p + \lambda)^{n-1} \quad (48)$$

(48)式で $(p + \lambda), |T(p)|, |D_m(p)|, |Q(p)|$ が全部安定多項式である¹⁾ので、 A_s は安定なシステム行列である。(46)、(47)式に対して適当な正則変換 $\mathbf{z}(t) = T\bar{\mathbf{z}}(t)$ を使い Kalman の正準構造を求める。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{z}}_2(t) \\ \bar{\mathbf{z}}_3(t) \\ \bar{\mathbf{z}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} \\ 0 & \bar{A}_{22} & 0 & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{z}}_2(t) \\ \bar{\mathbf{z}}_3(t) \\ \bar{\mathbf{z}}_4(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{s1}(t) \\ \bar{\mathbf{d}}_{s2}(t) \\ \bar{\mathbf{d}}_{s3}(t) \\ \bar{\mathbf{d}}_{s4}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\mathbf{x}(t) = [0 \quad \bar{C}_2 \quad 0 \quad \bar{C}_4] \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (50)$$

A_s が安定であるから、 \bar{A}_{11} 、 \bar{A}_{22} 、 \bar{A}_{33} 、 \bar{A}_{44} は安定なシステム行列となる。従って $\bar{z}_3(t)$ 、 $\bar{z}_4(t)$ が有界となる。以下に $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$ から $\mathbf{x}(t)$ までの有界性を考察するために、 $\bar{z}_2(t)$ についてまとめる。 $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$ から $\mathbf{x}(t)$ までの伝達特性は次のように示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \bar{C}_2(pI - \bar{A}_{22})^{-1} \bar{B}_2 R^{-1} R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \\ &\quad + \bar{C}_2(pI - \bar{A}_{22})^{-1} (\bar{A}_{24} \bar{z}_4(t) \\ &\quad + \bar{d}_{s2}(t)) + \bar{C}_4 \bar{z}_4(t) \end{aligned} \quad (51)$$

$$= H(p) R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \bar{d}_x(t) \quad (52)$$

ここで R は正則行列とする。 $H(p)$ は²⁾

$$\begin{aligned} H(p) &= \bar{C}_2(pI - \bar{A}_{22})^{-1} \bar{B}_2 R^{-1} \\ &= [I \quad 0] \begin{bmatrix} pI + \lambda I & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} \end{aligned} \quad (53)$$

$$= \frac{1}{(p + \lambda)} [I - B(CB)^{-1}C] R^{-1} \quad (54)$$

となる。

$$\begin{aligned} \bar{d}_x(t) &= \bar{C}_2(pI - \bar{A}_{22})^{-1} (\bar{A}_{24} \bar{z}_4(t) \\ &\quad + \bar{d}_{s2}(t)) + \bar{C}_4 \bar{z}_4(t) \end{aligned}$$

は有界である。 $H(p)$ を正実とし、 $H(p)$ の最小実現を $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ とすると、 \bar{A} が安定なシステム行列となる。(52)式の状態空間実現は(55)式になる。

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = \bar{A} \bar{\mathbf{z}}(t) + \bar{B} R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \quad (55)$$

$$\mathbf{x}(t) = \bar{C} \bar{\mathbf{z}}(t) + \bar{d}_x(t) \quad (56)$$

$H(p)$ が正実より、(55)、(56)式の系で(57)式を満足する正定対称行列 P_s と準正定対称行列 Q_s が存在する。

$$P_s \bar{A}^T + \bar{A} P_s = -Q_s \leq 0, P_s \bar{B} = \bar{C}^T \quad (57)$$

Lyapunov関数を $V(t) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{z}}^T(t) P_s \bar{\mathbf{z}}(t) > 0$

($\bar{\mathbf{z}}(t) \neq 0$)とする。(55)式より、つぎのように $\dot{V}(t)$ が求められる。

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{z}}^T Q_s \bar{\mathbf{z}}(t) + \bar{\mathbf{z}}^T(t) P_s \bar{B} R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \quad (58)$$

$$\dot{V}(t) \leq \bar{\mathbf{z}}^T(t) P_s \bar{B} R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$$

$$= (\mathbf{x}(t) - \bar{d}_x(t))^T R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$$

$$= \mathbf{x}(t)^T R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) - \bar{d}_x(t)^T R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \quad (59)$$

(3)、(4)式より

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\| \leq \alpha_2 + \beta_2 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N-1} \quad (60)$$

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\| \leq \alpha_3 + \beta_3 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N-1} \quad (61)$$

$$\|\mathbf{u}_1(t)\| \leq \alpha_4 + \beta_4 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N-1} \quad (62)$$

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))\| \leq \alpha_5 + \beta_5 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N-1} \quad (63)$$

(4)、(19)式より

$$\mathbf{x}^T(t) R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$$

$$= \mathbf{x}^T(t) R (\lambda \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + B \mathbf{u}_1(t))$$

$$= \mathbf{x}^T(t) R (\lambda \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) + [A_{<1,2N-1>} + BK_{<1,2N-1>}] \mathbf{x}(t)^{<2N-1>})$$

$$+ BK_{<1,2N-1>} \mathbf{x}(t)^{<2N-1>})$$

$$\leq \lambda_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \alpha_6 \|\mathbf{x}(t)\| + \beta_6 \|\mathbf{x}(t)\|^{\gamma_1+1}$$

$$- \lambda_{\min}(\{Q_{<N,N>}\}) \|\mathbf{x}(t)^{<N>}\|^2$$

補題2より

$$\leq \lambda_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \alpha_6 \|\mathbf{x}(t)\| + \beta_6 \|\mathbf{x}(t)\|^{\gamma_1+1} - \mu \|\mathbf{x}(t)\|^{2N}$$

ここでは $\mu > 0$ である。

補題1より

$$\mathbf{x}^T(t) R \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \leq \alpha_7 - \beta_7 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N} \quad (64)$$

(63)、(64)式を(59)式に代入すると、補題1より

$$\dot{V}(t) \leq \alpha_8 - \beta_8 \|\mathbf{x}(t)\|^{2N} \quad (65)$$

ただし $\alpha_i \geq 0, (i = 1 \sim 8)$ 、 $\beta_i \geq 0, (i = 1 \sim 5)$ 、 $\beta_i > 0, (i = 6 \sim 8)$ (65)の不等式に背理法を使うこと

により $\mathbf{x}(t)$ の有界性が証明される。(46)、(47)式で $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) = \lambda \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + BK_{[1,2N-1]} \mathbf{x}^{[2N-1]}(t)$ は $\|\mathbf{x}(t)\| < \infty$ に対し、 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\| < \infty$ であり、よって $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))\| < \infty$ となる。また $\|d_s(t)\| < \infty$ であり、 A_s が安定なシステム行列より、 $\|\mathbf{z}(t)\| < \infty$ となる。

以上を次の定理にまとめる。

《定理1》

(1)、(2)式 of 非線形系に対して、本方法によりモデル追従形制御系を設計する場合、次の条件を満足すれば、システム全体が有界である。

- ① $f_1(x(t)) \leq \alpha_1 + \beta_1 \|x(t)\|^m$
- ② $\{I - B(CB)^{-1}C\}R^{-1} = R^{-1T}\{I - C^T(B^T C^T)B^T\} \geq 0$
- ③ $d(t)$ 、 $d_0(t)$ 有界である。
- ④ $\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle \gg 0$ となる $K_{<1,2N-1>}$ が存在する。

証明：本文参照。

《定理2》

(1)、(2)式 of 非線形系に対して、本方法によりモデル追従形制御系を設計する場合、次の条件を満足すれば、システム全体が有界である。

- ① $f_1(x(t)) \leq \alpha_1 + \beta_1 \|x(t)\|^m$
- ② $B(CB)^{-1}C$ は対称行列であり、 $B(CB)^{-1}C \leq I$ である。
- ③ $d(t)$ 、 $d_0(t)$ 有界である。
- ④ $\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle \gg 0$ となる $K_{<1,2N-1>}$ が存在する。

証明： $R = I$ とし、文献²⁾参照。

《定理3》

(1)、(2)式 of 非線形系に対して、本方法によりモデル追従形制御系を設計する場合、次の条件を満足すれば、システム全体が有界である。

- ① $f_1(x(t)) \leq \alpha_1 + \beta_1 \|x(t)\|^m$
- ② $C = B^T$ であり、 B はフルランクである。
- ③ $d(t)$ 、 $d_0(t)$ 有界である。
- ④ $\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle \gg 0$ となる $K_{<1,2N-1>}$ が存在する。

証明： $R = I$ とし、文献²⁾参照。

文献²⁾の内積条件を除いたことが明白である。

5. 数値例

次の非線形系に対してモデル追従形制御系を設計し、応答を求める。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 2x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 \\ -3x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_2^3 - x_1^2 \\ + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} d(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$y(t) = [-1 \ 2]x(t) + d_0(t) \quad (67)$$

$d(t)$ 、 $d_0(t)$ はステップ外乱で、モデルは

$$y_m(t) = \frac{3}{p+5} \sin(t) + 4.5 \quad (68)$$

である。

本例では $x^T f(x(t)) = (x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)^2 - 6x_1^2x_2^2$ であり、文献²⁾の内積条件が満足されない。文献²⁾の方法で設計できない。 $f_1(x(t)) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ -x_2^2 \end{bmatrix}$ であり、 $\|f_1(x(t))\| \leq \alpha_9 + \beta_9 \|x(t)\|^2$

を満足する $\alpha_9 \geq 0$ 、 $\beta_9 > 0$ が存在する。 $A_{<1,3>} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ である。本論文で提案する方法により、初期親数を 50 とし、探索範囲は $-15 \sim 15$ とし、5000 世代の探索で非線形状態フィードバックが次のように得られる。

$$u_1(t) = - \begin{bmatrix} -4.818 & 4.4376 & -1.8037 & 3.0826 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$$

本例では定理3の同置条件が満足されるので、 $R^{-1} = I$ とした。

$$u_2(t) = -\xi_1(t) - 0.4y(t) - 0.2\xi_2 - [-0.2 \ 0.4]h(x(t)) - 0.2\xi_3 + 0.2r_m$$

$$\dot{\xi}_1(t) = -3\xi_1(t) - 3u_2(t)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -3\xi_2(t) + 9y(t)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = -3\xi_3(t) + [3 \ -6]h(x(t))$$

$$h(x(t)) = \begin{bmatrix} -6x_1 + x_1^3 - 2x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 \\ -6x_2 - 3x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_2^3 - x_1^2 \\ + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u_1(t) \end{bmatrix}$$

本例では $u_2(t)$ の設計パラメータとして、 $Q(p) = p+3$ 、 $\lambda = 6$ 、 $T(p) = p+3$ 、 $D_d(p) = p$ とした。

$$\langle \{Q_{<N,N>}\} \rangle = \begin{bmatrix} 3.8180 & -6.0368 & 0 \\ -6.0368 & 13.6789 & -2.3450 \\ 0 & -2.3450 & 5.1651 \end{bmatrix}$$

$$f_Q = \lambda_{\min}(\langle \{Q_{<N,N>} \} \rangle) = 0.7118$$

となる。応答は Fig.1 になる。出力誤差がゼロに収束し、本方法の有効性を確認することができる。

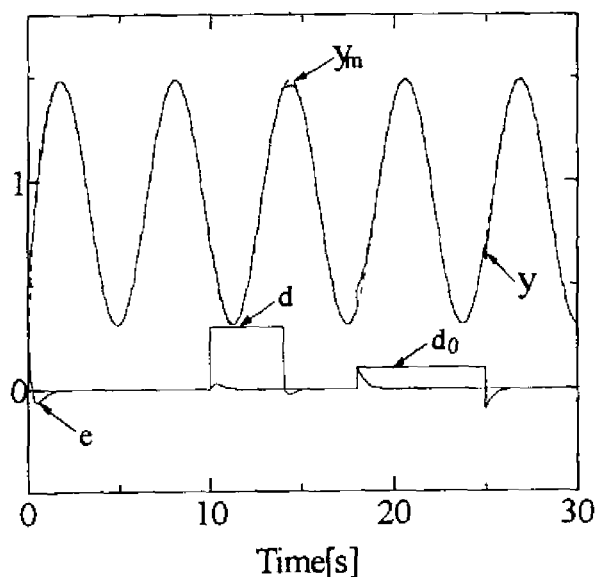


Fig. 1 Output responses of nonlinear model following control system

6. おわりに

従来の非線形モデル追従形制御系では内積条件が満足されなければならない。この条件は設計上大きな制約になる。本論文では線形制御系の状態フィードバックアプローチを非線形系に拡張し、非線形状態フィードバックアプローチを提案する。本方法によって非線形系の特性を積極的に利用して文献^{1),2)}の内積条件を緩和することができた。遺伝的アルゴリズムを非線形(特に高次の場合)制御系の設計に導入することにより非線形状態フィードバックが容易に設計できる。本論文では従来の非線形モデル追従形制御系の正実条件について考察し、正則行列 R を導入することによって文献^{1),2)}の正実条件を緩和することを示した。縮約形ベクトルが利用できることによって非線形状態フィードバックのベクトルと係数行列の次元はクロネッカーべきの場合より

小さくなり、制御系の設計には便利である。実際設計する時、適応度関数 $f_Q = \lambda_{\min}(\langle \{Q_{<N,N>} \} \rangle)$ がプラスになればよいが、余裕がある場合には余裕の部分をロバスト設計に用いることも可能であり、今後の課題とする。本方法による設計したモデル追従形制御系は最高次数以外の部分 ($f_1(x(t))$) の係数変動は制御系全体の安定性に無関係であり、本方法の有用な特徴である。注意されたいのは文献^{1),2)}の内積条件が満足される場合には本論文の $K_{<1,2N-1>}$ かならず存在するので、内積条件が満足されるかどうか判断しにくい場合には直接本方法を使ってよい。本論文は文献^{1),2)}の内積条件と正実条件を大幅に緩め、文献^{1),2)}の拡張となる。

参考文献

- 1) 大久保重範：外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計，計測自動制御学会論文集，21-8,792/799(1985)
- 2) 大久保重範：零点の安定配置を使った非線形モデル追従形制御系，計測自動制御学会論文集，28-8,939/946 (1992)
- 3) 大久保重範：大域的に安定な多入出力非線形系のMRACS，計測自動制御学会論文集，26-1,46/53 (1990)
- 4) 見玉、須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会(1981)
- 5) 大久保重範：非線形レギュレータの遺伝的アルゴリズムによる設計，計測自動制御学会論文集投稿中，