

## 流動場のオブザーバに関する数値実験

### Numerical Experiment on Observer of Flow Field

○早瀬 敏幸\*, 林 叡\*

○ Toshiyuki HAYASE\* and Satoru HAYASHI\*

\*東北大学 流体科学研究所

\*Institute of Fluid Science, Tohoku University

キーワード : 計算機援用流動場制御 (Computer-Aided Flow Field Control), 数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics), オブザーバ (Observer), 分布定数系 (Distributed Parameter System), 非線形系 (Nonlinear Dynamic System)

連絡先 : 〒980-77 仙台市青葉区片平 東北大学流体科学研究所 流動場制御研究部門  
Tel: (022) 217-5253, Fax: (022) 217-5253, E-mail: hayase@ifs.tohoku.ac.jp

## 1. 緒 言

本研究では、制御系を構成する高性能の計算機内部に流れ場の数学モデルを構成し、流動場を非線形かつ分布定数系の制御対象として制御するための基礎的検討を行う。流動場の制御は現在広く行われているが、通常は流れ場を比較的低次元のシステムでモデル化し、少数のセンサとアクチュエータで制御系を構成するものがほとんどである。たとえば気流中の航空機の飛行制御などのように、適切なモデル化を行えば、比較的低次元の制御問題として良好な結果が得られる場合も多い<sup>(1)</sup>。一方、流れ場の乱流変動等を直接制御しようとする場合には、流れ場本来の非線形かつ分布定数系としての取り扱いが必要となる。現在、線形系を対象として、制御理論の分布定数系

への拡張に関する研究がさかんに行われているが<sup>(2)</sup>、流れ場の制御を含めて、非線形の分布定数系の制御に関する研究は少ない。これを実現するためには、理論的な面からの検討以外にも、空間に連続的に分布した状態量を測定するためのセンサ、および制御入力を生成するためのアクチュエータの開発など、解決すべき多くの問題がある。

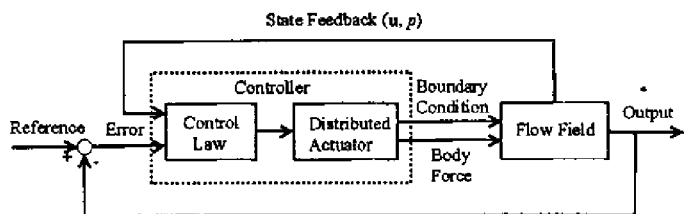
近年めざましい性能向上を遂げたパーソナルコンピュータは、低次元の制御系に関しては十分な性能を有しており、複雑な行列演算等を含む最近の制御系の構成要素として幅広く用いられている。本研究は、コンピュータの性能が現在も急速に向上していることを踏まえて、現状のスーパーコンピュータを制御系の基本構成要素として用いることにより、

非線形・分布定数系として流れ場を制御することを目標とし、そのための基礎的検討を行うものである。

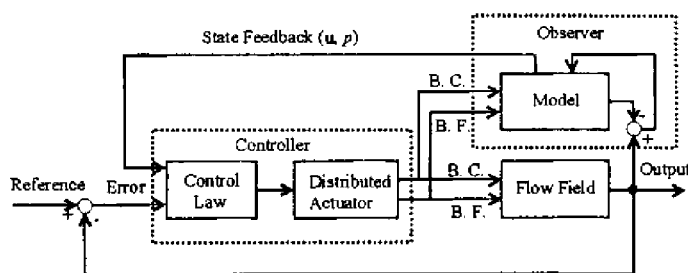
本論文ではその第1段階として、制御を行う際に必要となる流動場の状態量の推定の問題を取り上げる。系の数学モデルと、出力の測定値から内部の状態量を推定するオブザーバ(状態観測器)の理論<sup>(3)</sup>を流れ場に適用し、有限体積法に基づく差分近似数学モデルと、流れ場の有限個の測定値より、状態量の推定を行う。最初に、流動場のオブザーバの構造について検討した後、正方形管路内乱流の状態量を推定する問題について数値シミュレーションを行い、提案したオブザーバの有効性を検討する。

## 2. 流動場の制御

制御理論の立場から見た流動場の制御系の



(a) Fundamental feedback control system



(b) Feedback control system with state observer

Fig. 1 Block diagram of flow field control system

基本的な構造を図1(a)に示す。流れ場を制御対象とし、それに作用する境界条件と、体積力を入力と考える。非圧縮粘性流体の流れ場は、

ナビエ・ストークス式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad } p - (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

連続式

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

および初期条件、境界条件によって支配される。これを図2に示すような無限次元の動的システムとしてとらえると、状態量は領域内の速度ベクトル場  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  であり、この速度場  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  と対応する圧力場  $p(t, \mathbf{x})$  の関数である有限個の観測量(例えば、流れ場中の物体表面の圧力およびせん断応力の分布、あるいはそれらの積分値である抗力、揚力など)として出力が定義される。この出力信号は、図1(a)に示すように基準信号と比較され、その偏差が制御装置に入力される。制御装置は、制御規則とアクチュエータよりなる。制御規則は、偏差信号と流れ場の状態量よりアクチュエータへの入力を決定する。アクチュエータは、流れ場の境界条件、体積力のいずれか、ある

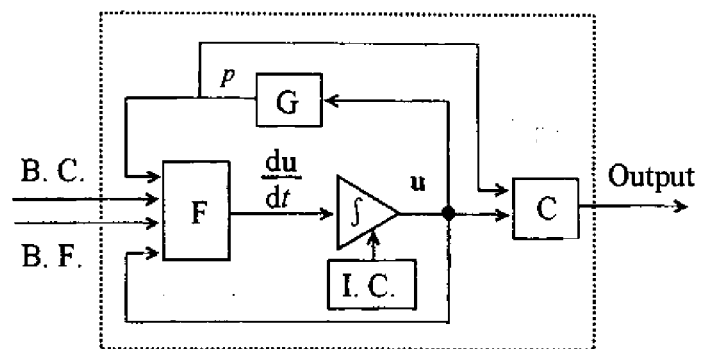


Fig. 2 Block diagram of the flow system

いはその両方を発生する。この制御系の構成は、形式的には通常のフィードバック制御系と同一であるが、系が強い非線形性を有することと、状態変数とアクチュエータの自由度を無限大としていることが本質的に異なっている。

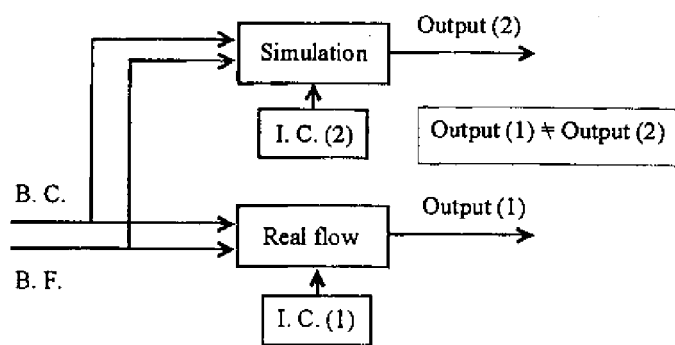
本論文では、まず系の状態量に注目し、無限自由度の状態量の代わりに十分高次の離散ベクトル場を与えるオブザーバを構成する。図1 (b)にオブザーバを含んだ流れ場の制御系の構成を示す。オブザーバは、流れ場に与えるのと同じ制御入力を数学モデルに与え、その出力を実際の観測出力と比較し、偏差を数学モデルにフィードバックすることにより、速やかに数学モデル内部の状態量を実際状態量に収束させるものである。なお、図1 (b)ではオブザーバの動作に注目するため、制御装置とオブザーバのブロックを別々に示したが、実際の制御系では制御規則とオブザーバは同一のコンピュータ内部にプログラムされる。

### 3. オブザーバの構成

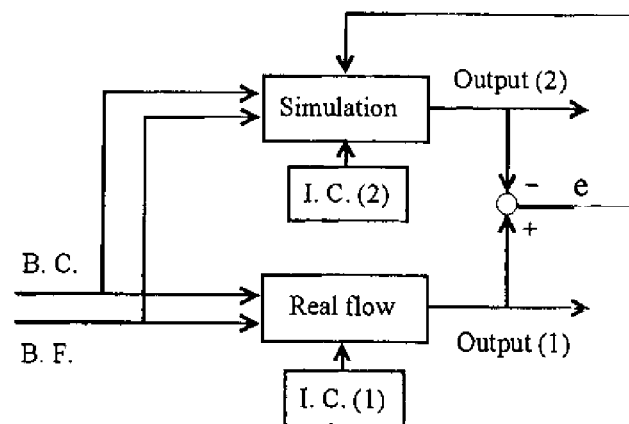
以下に、流れの数値シミュレーションのアルゴリズムを系の数学モデルとして用いた場合の、オブザーバの構成について述べる。通常の流れのシミュレーションとの基本的な差異は、出力誤差信号のフィードバックの有無にある。すなわち、図3 (a)に示すように、通常の流れのシミュレーションでは、境界条件と体積力を実際の流れに一致させた場合、もし対象とする流れが大域的に安定ならば、初期条件が異なっても、シミュレーションの結果は数値計算手法の精度の範囲内で、実

際の流れ場に収束するが、乱流場やカルマン渦を伴うような不安定な流れ場に対しては、たとえ同一の初期条件から計算を開始しても、変動成分を含めて実際の流れ場に収束する解を得ることは困難である。

これに対して、オブザーバでは、実際の流れ場の観測出力と、シミュレーションの対応する計算値との偏差を求め、この信号を適切に数学モデルにフィードバックすれば、不安定な流れ場の場合でもシミュレーションの結果を実際の流れ場に収束させ、また安定な流れ場に対しては定常解への収束を加速することが可能となる。さらに、数値解析手法に存



(a) Flow simulation



(b) State observer

Fig. 3 Comparison between flow simulation and state observer

在する誤差（有限の格子間隔による打ち切り誤差など）を低減させることも期待できる。

有限次元の時不変線形システムにおいては、出力誤差信号の線形関数としてモデルへの入力を与えることにより、任意の収束性をもつオブザーバを設計することができるが<sup>(1)</sup>、非線形系に対するオブザーバの一般的な理論は完成されていない<sup>(2)</sup>。本論文では、流れ場の数学モデルとして、有限体積法に基づく流れ場のシミュレーションスキーム<sup>(4)</sup>を用いてオブザーバを構成する。流れ場を対象とした場合、系の可観測性を理論的に検討することは困難であり、さらに入力である境界条件および体積力を、出力誤差の関数として生成する一般的手法は確立されていないので、ここでは流れ場のある境界面上での速度誤差を、その点の圧力境界条件にフィードバックする最も単純な場合について数値解析により検討する。

#### 4. 数値計算例

著者らは既報で、正方形管内の発達乱流に関する数値シミュレーションを行った<sup>(5)</sup>。以下では、この数値計算結果を用いてオブザーバ

の有効性を検討する。すなわち、制御対象である実際の流れ場の代わりに、前もって計算した発達乱流の数値解（以下「基準解」と呼ぶ）を用い、制御対象の数学モデルとして全ての速度成分を0とおいた初期値からの数値シミュレーションを行って、これに適当なフィードバックを施すことにより、数学モデルの解を基準解に収束させようとするものである。

本論文で取り扱う対象領域および座標系を図4に示す。計算領域は正方形断面管内の流れ場で、管路長  $l$  は正方形管の1辺の長さの4倍とする。非圧縮・粘性流体を仮定し、ナビエ・ストークス式と連続式を基礎式にとる。速度の境界条件は、壁面上では滑りなしの条件、上流と下流の断面には周期境界条件を課した。圧力については、上流断面と下流断面の対応する各点間に圧力差を与えた。

数値解析手法については、既報<sup>(5)</sup>で詳しく述べているので、ここでは計算の概略を述べるにとどめる。等間隔の矩形スタガード格子系を用い、有限体積法に基づいて離散化された基礎方程式群を、SIMPLER法に類似の手法により解いた。対流項の離散化には、物理的考察に基づき再定式化された QUICK スキームを用いた<sup>(6)</sup>。また時間微分項の離散化には、2

Table 1 Computational conditions.

Pipe length $l$	4
Pressure difference $\Delta p$	0.0649
Reynolds number $Re_s$	9000
Grid points $N_1 \times N_2 \times N_3$	20 × 10 × 10
Grid spacing $h_1 \times h_2 \times h_3$	0.2 × 0.1 × 0.1
Time increment $h_t$	0.05
Total residual at convergence	0.01
CPU time for one time step [s]	2

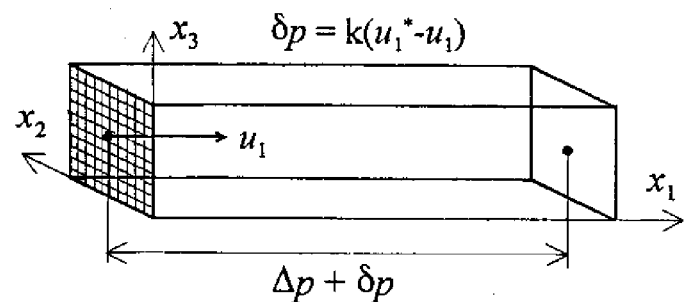


Fig. 4 Domain and coordinate system

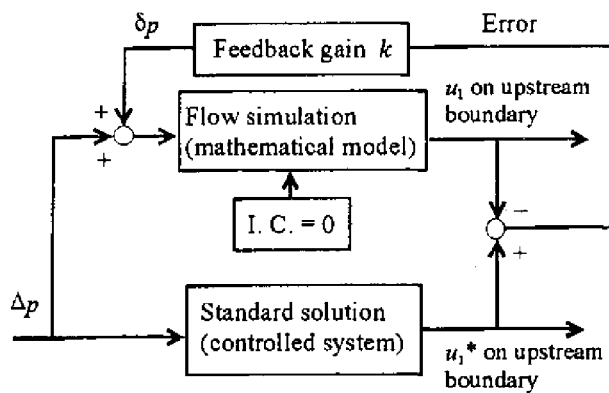


Fig. 5 Structure of the state observer

次精度の陰解法を用いた。

主な計算条件を表1に示す。なお、諸量は正方形管の1辺の長さ  $b$ 、平均軸速度  $u_m$  および流体の密度  $\rho$  を用いて無次元化されている。基準解として、レイノルズ数  $Re_s (= u_m b / \nu) = 9000$  の発達乱流解が得られるように圧力差  $\Delta p$  ( $\rho u_m^2$  で無次元化) を設定した。ここで用いた格子系は、乱流場を精度よく再現するのに十分な格子解像度をもっているとは言い難いが、既報でも述べたように、得られた解は平均軸速度分布を良好に再現し<sup>(5)</sup>、また比較的振幅の大きな低周波領域の変動成分を良好に表している。このことは、本論文の基準解が実際の乱流場にローパスフィルタを通過させたものに対応していることを意味する。本研究の目的である乱流場の制御には、エネルギーの大きな低周波乱れ成分の抑制が有効であると予想されるので、乱流場の低周波成分を保存した本基準解への収束性によりオブザーバの有効性を評価することは妥当であると考えられる。

オブザーバの構成を図5に示す。本論文では、出力として、上流端断面上での軸方向速度成分をとり、入力としてその断面に作用する圧力をとった[なお、流動場の制御系を構成

する際の出力および入力(図1参照)は、オブザーバの出力および入力に、制御に必要な信号を追加して得られる]。各位置において、軸速度成分の基準解からの誤差を求め、それに適当なフィードバック係数を掛けてその位置での圧力境界条件に加える。その結果、断面上の各点で、流体は軸方向の速度誤差を減少させる方向に加速あるいは減速される。なお、入力の各位置での圧力は、一般のオブザーバでは断面内の全ての出力変数(軸速度)の関数として与えられるべきものであるが、ここでは対応する位置における軸速度のみの1次関数として与え、さらに、その係数も断面上で全て一定であるとした最も単純な場合を取り扱った。

フィードバックゲイン  $k$  (図5参照) を種々に変化させた計算の結果を図6(a),(b)に示す。図は、 $x_1=0$  の断面中心における軸速度成分の時間変化を示したものである。図中の太線は、基準解(制御対象)の発達乱流を示している。他の結果は、時刻  $t=0$  において全ての速度成分を0として非定常数値計算を開始したオブザーバの出力である。図6(a)の破線はゲイン  $k=0$  の場合で、フィードバックを行わない通常の数値シミュレーションに対応する。この場合、与えられた圧力差  $\Delta p$  (一定) による流れ場の加速は非常に緩やかである。時定数  $\tau$  (軸速度の変化を1次遅れ系としたときに、定常値の63%まで増加するのに要する時間) の値を破線の傾きより見積もると  $\tau=120$  (無次元) となり、フィードバックを行わない場合には、発達乱流解に達するのに非常に長い時間を要することがわかる。さらにこの場合には、発達乱流解に落ちついた後でも、変動成分が基

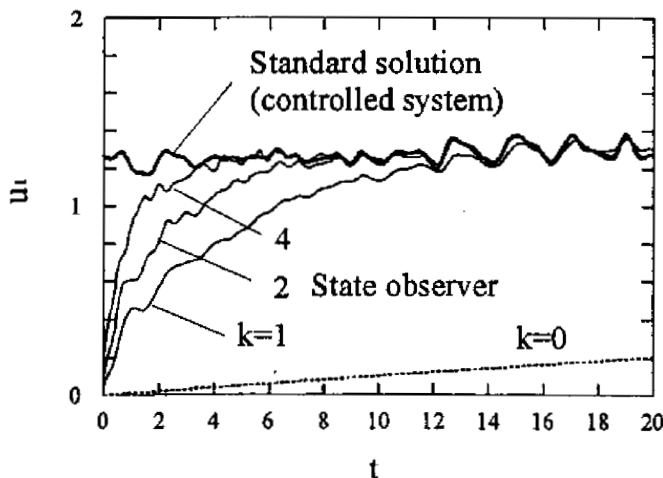
準解のそれに収束することは期待できない。このことは、フィードバックを施さないシミュレーション結果を用いて乱流変動を制御することが、本質的に困難であることを示している。

一方、適当なゲインを用いてフィードバックを行った場合には、速やかに基準解に収束している。例えば、図6(a)の  $k=2$  における時定数は  $\tau \approx 2$  となり、フィードバックを行わない場合に比べて60倍の収束性の改善が見られる。さらに変動成分についても、オブザーバの結果は基準解によく追従していることがわかる。これは、断面上の各点において、基準解からの誤差に応じて、これを減少させるように圧力差に修正を加えるフィードバックの効果である。図6(a)では、フィードバックゲインの増加とともに、収束性、追従性が向上しているが、更にゲインを増すと、やがて系は不安定となる。図6(b)は、過大なフィードバックゲインによりオブザーバが不安定化した例である。以上より、適当なゲインを選択す

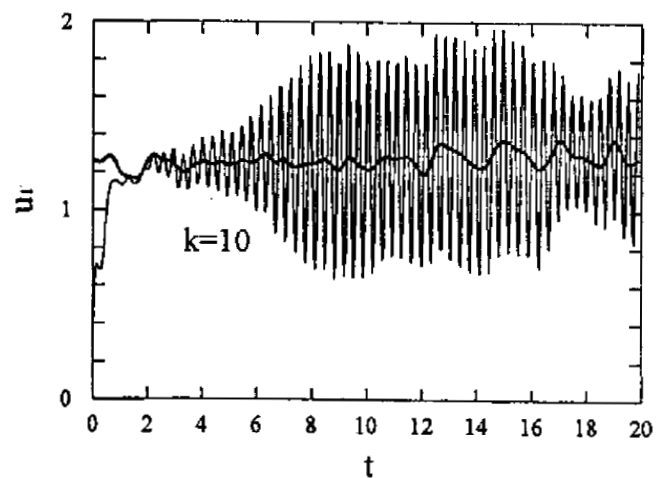
ることにより、上流断面中心の軸速度成分が、速やかに基準解のそれに収束することが示された。

次に、フィードバックゲイン  $k=2$  の場合に、上流端断面中心における  $u_2, u_3$  速度成分と圧力  $p$  の収束状況を図7に示す。図7(a),(b)より、速度成分に関してオブザーバの結果は  $\tau > 10$  の範囲で基準解の変動成分によく追従している。ただし、 $u_3$  速度成分については、本計算条件の範囲内でみられる基準解のバイアス成分が十分再現されていない。また圧力に関しては、 $k < 10$  の範囲で、オブザーバの結果はフィードバックによる流体の加速に対応して大きな値をとるが、流れ場が基準解に収束するにつれて、圧力も基準解のそれに追従している。

これまでは、上流断面の中心における各速度成分と圧力の収束状況を調べたが、流れ場全体の収束状況について以下に述べる。図8は、ゲイン  $k=2$  の場合に、3つの異なる断面上 ( $x_1=0, 2, 3$ ) の、4つの異なる代表位置について、それぞれ軸速度成分の収束状況を示し



(a) Convergent results



(b) Unstable result for large feedback gain

Fig. 6 Variation of the axial velocity at the center of the upstream boundary (Comparison for the feedback gain)

たものである。図 8(a)-(c)は、断面の対角線に沿って、中心からコーナーに向かう位置、図 8(d)は、対角線上にない壁面近傍の位置における結果である（中列の図中にそれぞれの断面内の位置を示した）。図の左列の上流断面( $x_1=0$ )の結果では、軸速度の誤差が圧力境界条件に直接フィードバックされるため、何れの位置においてもオブザーバの結果は基準解に良く追従している。図の中列、右列と下流断面に向かうに従って、オブザーバの結果の追従性は劣化しているが、その程度は、断面内の位置によって異なる。すなわち、図 8(a),(b)のように、断面中心に近い対角線上の位置では、

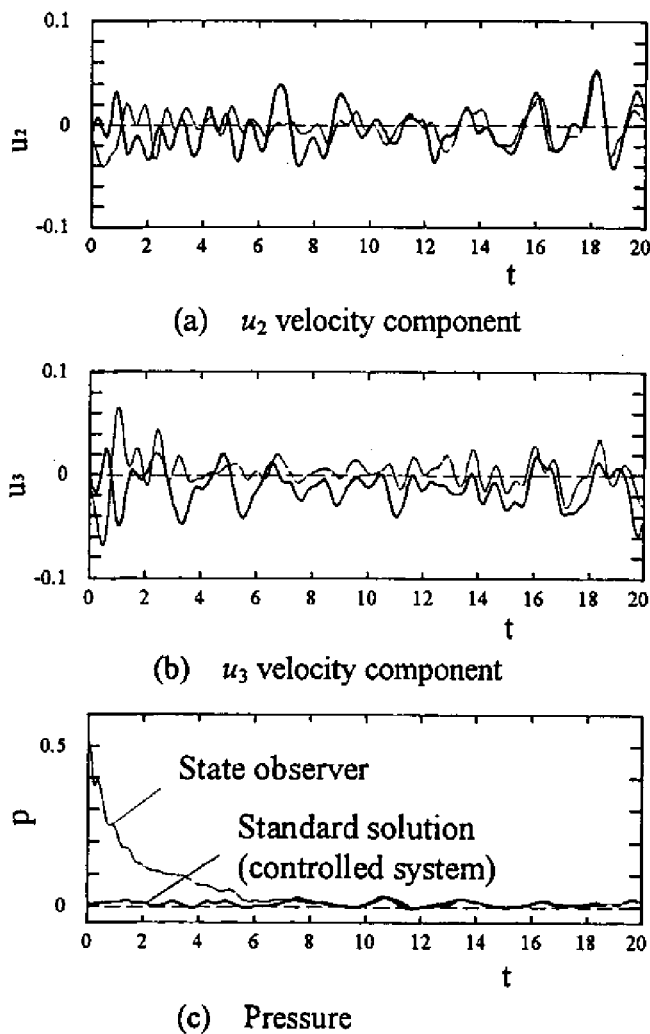


Fig. 7 Convergence of state observer at the center of the upstream boundary ( $k=2$ )

下流方向への劣化の程度は小さく、一方、図 8(c),(d)に見るように、位置が管壁に近づき、かつ対角線から離れるほど劣化の程度は大きくなる。

上で述べたように、オブザーバにより得られる結果の基準解に対する追従性は、領域内の位置によってかなり異なる。そこで、ある領域全体におけるオブザーバの平均的な追従性を定量的に評価するために、速度場に関する以下のノルムを定義する。

$$\| \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \|_V = \left[ \int_V (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dV / V \right]^{1/2} \quad (3)$$

ここで、積分は対象領域  $V$  にわたる体積積分を表す。また、 $V$ は、領域の体積を表す。

上記のノルムを用いれば、オブザーバにより得られた速度場  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  の基準解  $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x})$  に関する誤差ノルムが、時間の関数として次式で評価できる。

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \|_V \\ &= \left[ \int_V \{ (u_1 - u_1^*)^2 + (u_2 - u_2^*)^2 + (u_3 - u_3^*)^2 \} dV / V \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)で与えられる誤差ノルムの時間変化を、ゲイン  $k=2$  および  $k=4$  の場合について示したものが図 9 である。図より、初期時刻  $t=0$  においては、オブザーバの初期値として全ての速度成分を 0 としたため、誤差ノルムの値はほぼ 1 となっている。その後  $t=10$  程度までは、基準解への収束に伴って誤差ノルムは単調に減少し、それ以降はほぼ一定値となる。2 種類のゲインに対する結果を比較すると、収束性は、ゲインの大きな場合のほうが優っているが、誤差ノルムの定常値についてはほとんど

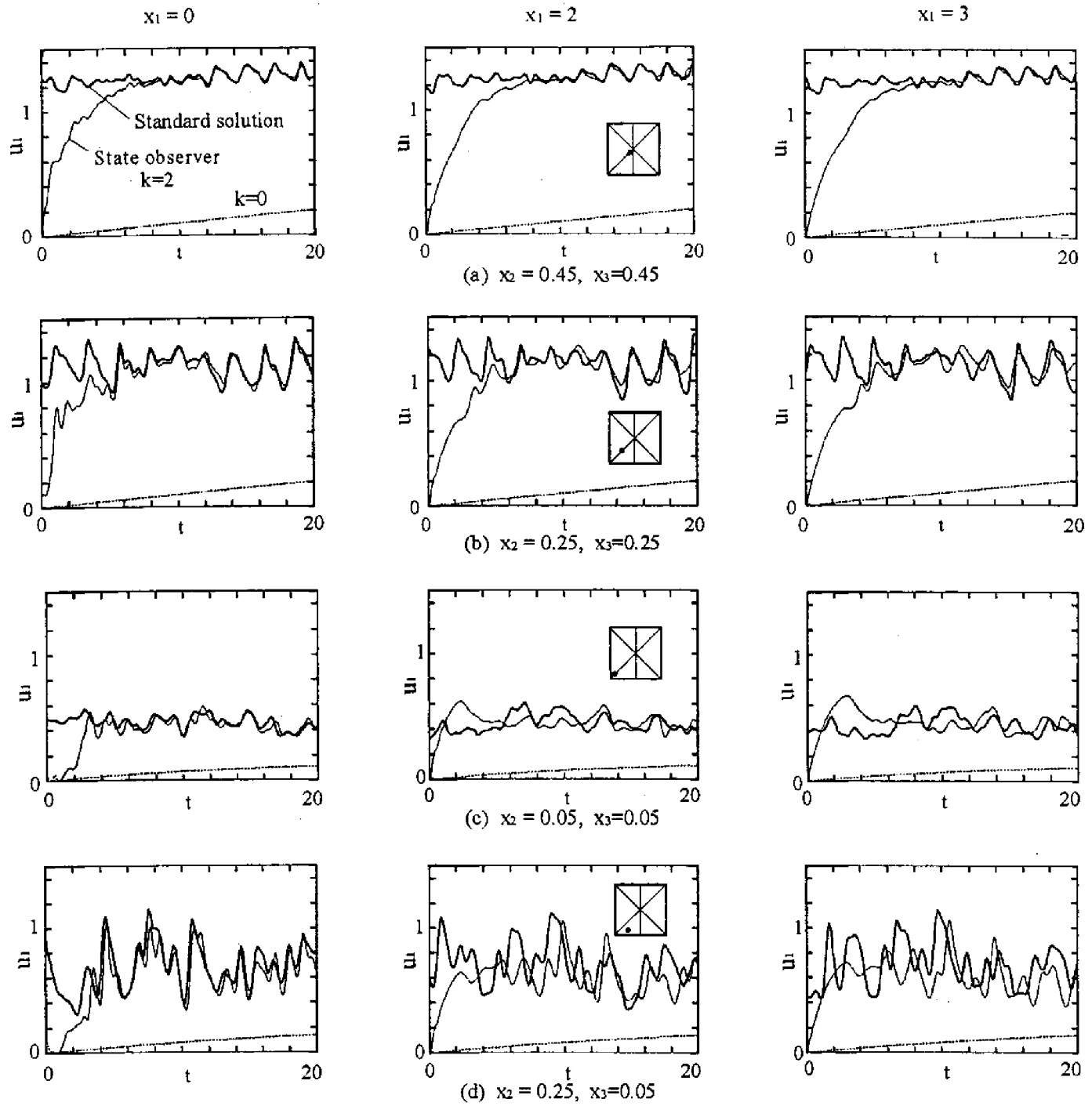


Fig. 8 Variation of the axial velocity component at several locations of the domain ( $k=2$ )

ど差は見られない。

また図9中の実線は、初期条件の異なる2つの発達乱流解の間の誤差ノルムを、式(4)中の  $u(t, x)$  を  $u^*(0, x)$  で置き換えた  $\|u^*(0, x) - u^*(t, x)\|_V$  で評価したものである。時刻  $t=0$  においては、この値は当然0となるが、 $t$ の増加とともに、2つの解の間の差異は増大

し、 $t=2$ 以降ではほぼ一定値(0.2)となる。このことは、先に述べたように、フィードバックを行わない数値シミュレーションにより発達乱流解が得られたとしても、基準解との間には、常に0.2程度の誤差ノルムが存在することを示している。一方、先に得られたフィードバックを施した場合の定常誤差ノルムの平均値



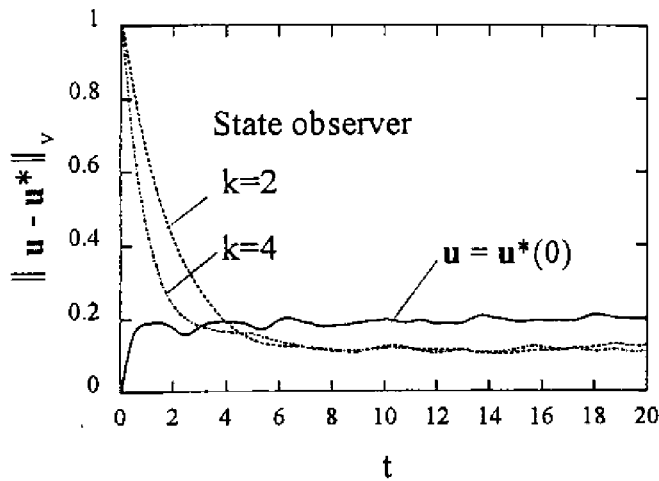


Fig. 9 Norm of the estimation error in the domain as a function of time

は 0.12 で、フィードバックにより速度場全体の誤差ノルムが半分程度にまで減少することを意味している。

上で述べた結果は、対象領域全体にわたるオブザーバの、基準解への追従性を表したものであるが、既に述べたように、この追従性は流れ方向の各断面によって異なっていた

(図 8 参照)。そこで、式(4)の積分領域  $V$  を、 $x_1$  軸に垂直な断面  $A(x_1)$  で置き換えて、軸方向の各位置における誤差ノルムを求め、これが十分収束した時間の範囲 ( $10 < t < 20$ ) で平均したものを図 10 に示す。なお、図中の実線は、上にも述べたように  $u^*(0, x)$  と  $u^*(t, x)$  より求めた誤差ノルムであり、独立な 2 つの発達乱流解に対する誤差ノルムを与えている。図中の 3 種類のゲイン  $k=1, 2, 4$  に対する結果をみると、ともに上流端でもっとも誤差が小さく、下流に行くに従って誤差が増大し、フィードバックを施さない場合の結果 (実線) に漸近している。なお、 $x_1 \geq 3.6$  でみられる不自然な値の減少は、周期境界条件の影響であり、管路長  $l$  をさらに増せば単調に実線に漸近するものと考えられる。また、誤差ノルムを流れ場全体

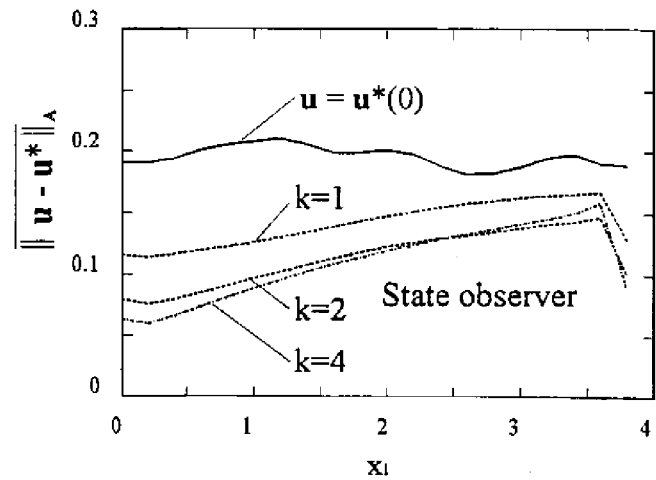


Fig. 10 Norm of the steady estimation error evaluated at each axial location

で平均した結果 (図 9) では、 $k=2$  と  $k=4$  の誤差ノルムの定常値に差は認められなかったが、図 10 では、特に上流端近傍で、ゲイン  $k$  が大きいほど誤差ノルムが減少しており、 $k=4$  の場合には、上流端で、誤差ノルムがフィードバックを施さない場合の  $1/4$  程度にまで減少している。

以上、上流断面の各点において軸速度成分の誤差を圧力境界条件にフィードバックする単純なオブザーバによっても、基準解への良好な追従が行われることを、速度場のノルムを用いて定量的に示した。

## 5. 結 言

計算機を援用した流動場の制御を実現するための基礎的研究として、本論文では、オブザーバの構成に関する検討を行った。流れ場の数値シミュレーションのアルゴリズムを数学モデルとして、流れ場の観測量と計算結果との誤差をフィードバックすることにより、状態量の推定を行うオブザーバの基本構成

を示すとともに、基本的な正方形管路内の発達乱流を対象として、オブザーバーの有効性を数値解析的に検証した。すなわち実際の流れ場を、前もって計算した発達乱流の数値解で置き換え、初期値を全て0とおいた数値計算を行って、上流断面上の軸速度の誤差を圧力境界条件にフィードバックした。適当なゲインを選択することにより、フィードバックを行わない場合に比べて、発達乱流解への収束性が60倍程度加速され、定常乱流状態の誤差ノルムも流れ場全体では1/2、上流端近傍では1/4程度に減少させることが出来た。

今後の課題としては、比例ゲインの増加に伴う系の不安定性に関して理論的検討を行うとともに、本論文では断面内で一定とした比例ゲインを、各点毎に異なるとした場合、さらに、各点の入力（圧力境界条件）が、周囲の各点の軸速度の線形関数で与えられるような、より一般的な場合についても検討したい。

## 参考文献

- (1) R. E. Skelton: Dynamic Systems Control, John Wiley & sons, (1988)
- (2) X. Li and J. Yong: Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems, Birkhäuser, (1995)
- (3) E. A. Misawa and J. K. Hedrick: Nonlinear Observers - A State-of-the-Art Survey, J. Dyn. Sys. and Meas., Trans ASME, 111-3, 344/352 (1989)
- (4) T. Hayase, J. A. C. Humphrey and R. Greif: Mini Manual for ROTFLO2, Dept. Mech. Eng. Rep., #FM-90-1, Univ. Calif. Berkeley, (1990)
- (5) 早瀬, 末松, 菊池: 正方形断面管路内乱流の直接数値シミュレーション, 日本機械学会論文集, 58-546, B, 364/370 (1992)
- (6) T. Hayase, J. A. C. Humphrey and R. Greif: A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedure, J. Comput. Phys., 98-1, 108/118 (1992)