

2重振り子の振幅制御

Swing Control of Double Pendulum

齊藤 誠 土屋 幸男

Makoto Saito Yukio Tsuchiya

八戸工業高等専門学校

Hachinohe National college of Technology

キーワード：2重振り子 (Double Pendulum) , 振幅制御 (Swing Control)

連絡先：〒039-1192 八戸市田面木字上野平 16-1 八戸高専 電気工学科

Tel/Fax:0178-27-7280, e-mail:tsuchiya-e@hachinohe-ct.ac.jp

1. はじめに

今日、非線形理論が注目されている。かつての数学では求めることができなかった非線形の数学も、昨今のコンピュータ技術の飛躍的な進歩によりディスプレイ上で容易に観察¹⁾できるようになった。

非線形理論の適用例である2重振り子についても数々の研究がなされており、その安定化制御²⁾も代表的な研究の一つである。しかしその反面、2重振り子の振幅制御に関しては特に研究が進んでいるとはいえない状況である。

2重振り子の振幅を自由自在にすることができれば、振り子の現象解析など様々な利用価値があると考えられる。そこで本研究では振幅制御の第一歩として、2重振り子のアームの角度が常に均一になるような制御を行った。

2. 2重振り子装置の構成

2-1 装置の構成

装置の接続図は図1のとおりである。

アーム1を回転するには、日本精工製のメ

ガトルクモータ(M-JS1003FN001)³⁾を用いている。モータは専用のドライブユニット(ESA-J1003A23-21)で駆動され、それにシーケンサ(KEYENCE KZ-A500)およびファンクションジェネレータから信号を入力するようになっている。

モータのレゾルバからはアーム1と垂直線との角度 θ_1 、関節部に取りつけられているエンコーダ(多摩川精機 01H35-2000 P4-L6-5V)からはアーム2と垂直線との角度 θ_2 が取り出せるようになっており、それぞれシーケンサのA/D入力部からカウンタを用いて値を取り込めるようにした。

なお、シーケンサからファンクションジェネレータへ出力される変調関数については後述する。

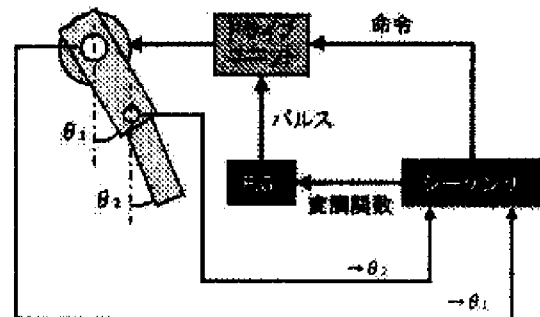


図1 装置構成図

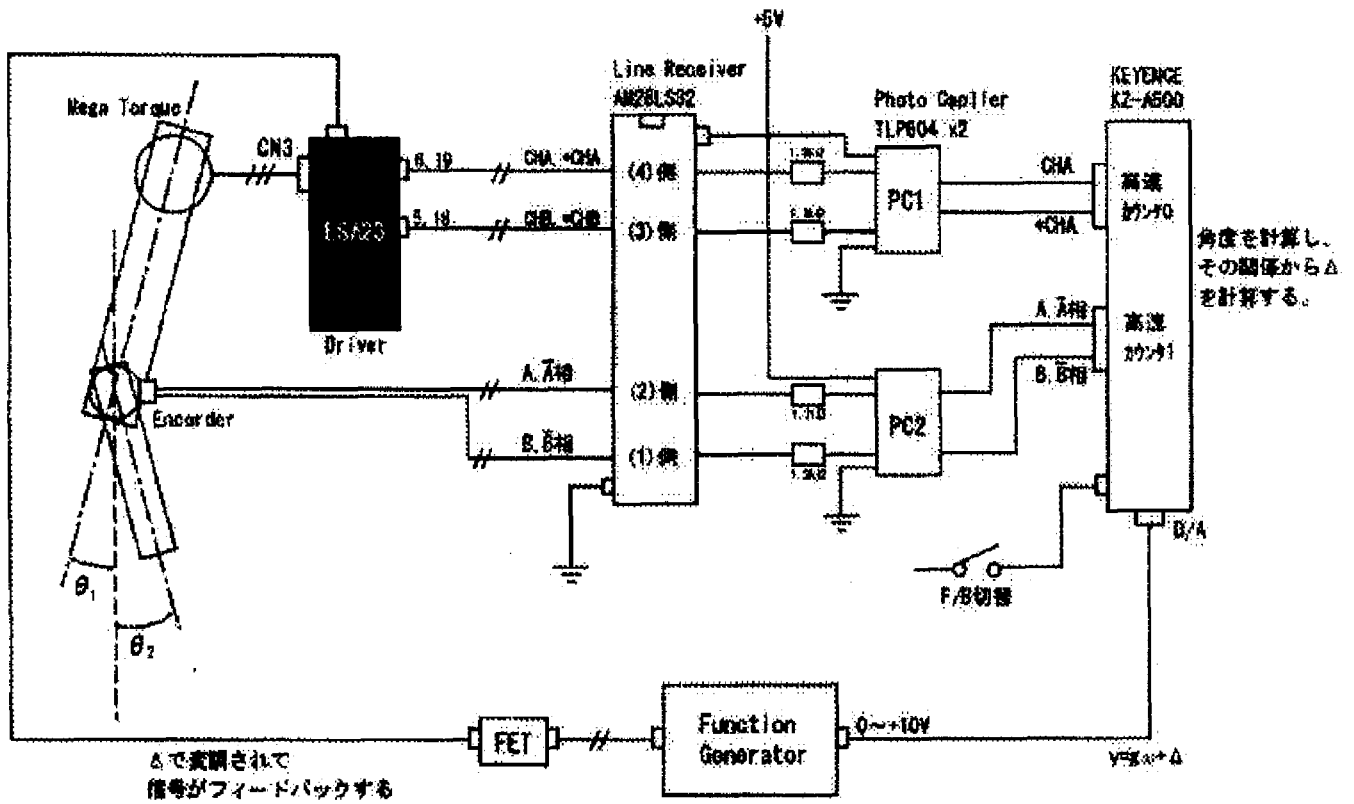


図2 システムの詳細図

図1を更に詳しく示すと、図2のようになる。アーム1の角度 θ_1 はモータのレゾルバを、アーム2の角度 θ_2 はエンコーダを通して検出され、ラインレシーバ、フォトカプラを通過しシーケンサ (KEYENCE KZ-A500⁴⁾) の高速カウンタに入力される。なお、カウンタのカウント方法はモータ、エンコーダの仕様にならい、2進倍モードである。シーケンサでは $g(l)$: 変調関数を計算し、一方 θ_2 からは ΔF : フィードバック値を計算する。両者の和 (調整後の値)

$$g(l) + \Delta F$$

がファンクションジェネレータの外部入力端子に入り、出力端子からパルス幅変調波が出力される。その信号はFETで増幅された後、ドライブレユニットに送られモータが回転する。

ここで、図3に装置の実体写真を示す。

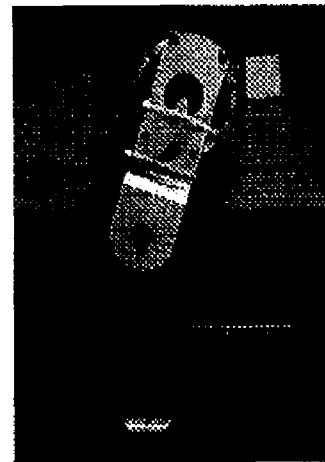


図3 装置の実体写真

2-2 動作原理

今回使用したメガトルクモータには、パルス入力ごとにモータが一定角度回転するという「パルス列入力位置決め」モードがあり、今回はそれを1パルスで 0.1° 回転するように設定する。

パルスの出力はファンクションジェネレータで方形波を発生させる。また、ファンクション

ジェネレータには外部入力端子からの入力で出力周波数を動的に変更する機能があり、今回はそれを利用して方形波のパルス幅変調を行ってモータの回転を制御する（PWMの原理は図4を参照）。ここで例えば変調関数を正弦波にすればアーム1は正弦関数運動する。なお、変調関数はシーケンサで生成し、D/Aコンバータからファンクションジェネレータの外部入力端子に入力される（3-2参照）。ちなみに本研究ではファンクションジェネレータの搬送波の周波数は1.5kHzとし、変調関数によってこれが±0.8kHzの範囲となるようにした。アーム1の振動周期は1.08secである。

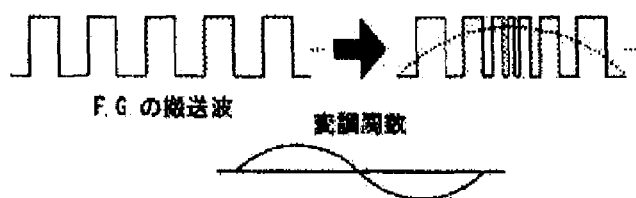


図4 パルス幅変調の原理

3. 2重振り子の制御

3-1 変調関数の作成

まず、アームの基本動作としてアーム1にsinの振幅を与え、アーム2の動きを観察する。

ここで、アーム2の動作を以下の3つに分類²⁾する。



図5 安定周期運動

今回の基本状態ではMODE2の状態となるように（MODE1にはならないように）モータの速度を調節した。この時、 $\delta = \theta_1 - \theta_2$ として計測した結果は図6のようになった。これを見ると、

方向転換時に大きな角度のずれがあることがわかる。まずはこのずれを小さくすることを目標に、方向転換時に的を絞って変調関数の作成を行う。

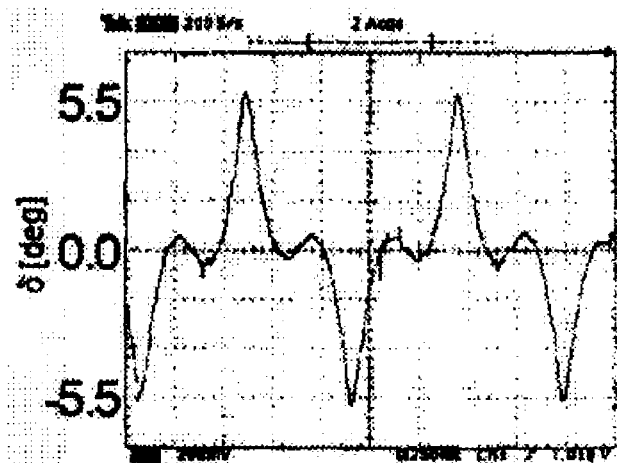


図6 基本動作時における δ の推移

前述の測定結果から、MODE2→MODE0にするためには方向転換時の速度を抑えれば良いと言うことができる。これを実現するために振幅の半周期についての変調関数 $g(t)$ を作成した。

$$g(t) = \sin(T(t)), \quad 0 \leq T(t) \leq \pi$$

ただし、

$$\begin{cases} T(t) = \left(\frac{t}{\Delta_1}\right)^2 \Delta_1 = \frac{t^2}{\Delta_1} & ; 0 \leq t < \Delta_1 \\ T(t) = t & ; \Delta_1 \leq t < \Delta_2 \\ T(t) = \left(\frac{t-\pi}{\Delta_2}\right)^2 \Delta_2 = \frac{(t-\pi)^2}{\Delta_2} & ; \Delta_2 \leq t < \pi \end{cases}$$

$g(t)$ はsin関数で表され、そのパラメータを時間関数 $T(t)$ として作成した。 $T(t)$ は Δ_1 、 Δ_2 で表される区間によって式が変化し、その変化は時間 t に対して二次関数的になるようにした。この $T(t)$ の変化を示したのが図7で、 Δ_1 で区切られた前半の区間では T の位相が遅れ、 Δ_2 で区切られた後半の区間では T の位相が進む。こうすることによって図8で示すようにsin関

数の始めと終わりの部分で値を低くすることができ、アーム1の方向転換時の速度を抑えることができる。また、 $T(t)$ は t の二次関数で表されているため $g(t)$ の各周期の“つなぎ”の部分を滑らかにすることもできる。

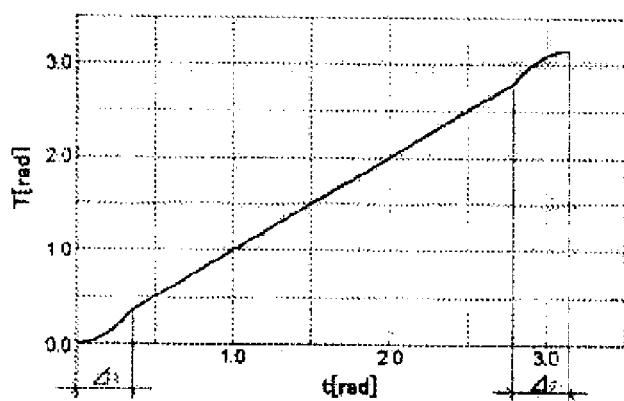


図7 t に対する T_0 の変化

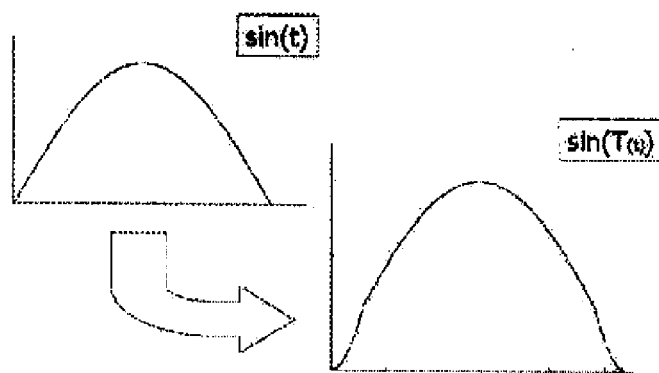


図8 \sin 関数の T_0 による変形

一例として $\Delta_1 = \Delta_2 = \pi/2$ のときの変調関数を、 $\sin(t)$ の値と比較してこれを同一時間軸上に示す(図9)。

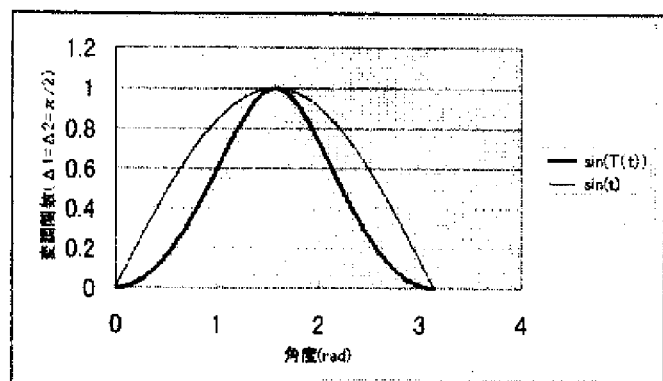


図9 $\Delta_1 = \Delta_2 = \pi/2$ のときの変調関数

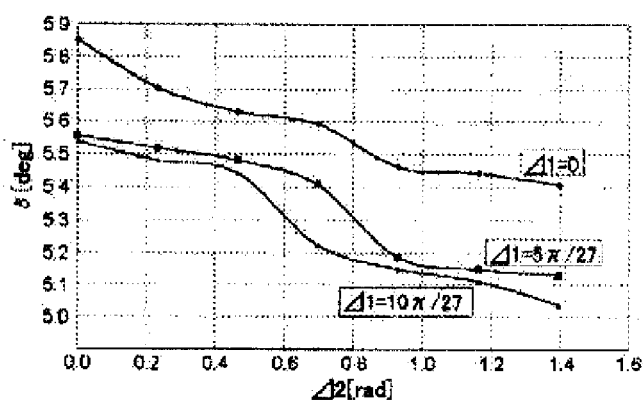


図10 Δ_1, Δ_2 と δ の関係

以上の条件で Δ_1, Δ_2 を変化させて安定周期運動時における δ のピーク値を測定した結果、図10のようになった。

グラフを見ると、 Δ_1, Δ_2 共に増やせば δ が小さくなるのがわかる。この結果より、方向転換時の速度を抑えれば良いということが言える。なお、今回の研究では δ を約 0.8° 減少させることができた。

3-2 フィードバック制御による補正

3-1で述べたような変調関数の操作だけでもある程度の効果を得ることができたが、さらに理想的な動きに近づけるためにフィードバック制御について考察する。今回は方向転換時のアーム1の速度を抑えるという前提から、 $t=0 \sim \pi/9, t=8\pi/9 \sim \pi$ の区間でフィードバックをかけることとした。

ここでのフィードバックの原理は、前述の $\Delta_1 = \Delta_2 = \pi/2$ で得られた変調関数に更に以下の強制項 ΔF を付加する。

まず θ_2 の速度と外部直流電源 e との積の値を、基本波の第3高調波として整形し、これを逆位相にして ΔF とする。波高値 e はマニュアルで調整する。数式は以下の通り。

$$\Delta F = -e \times \dot{\theta}_2 \times \sin(3t)$$

最終計算式は2-1に前述した。

なお最大で[変調関数の波高値]/8のフィ

ードバック信号が発生するように波高値 e を調節した。変調関数の一例とこのときの δ の計測結果を図 11 と図 12 に示す。

ここでは δ のピーク値がさらに減少していることがわかる。よって、フィードバックの効果を確認することができた。しかし、 θ_1 をフィードバックしていないため、フィードバックの影響でアーム 1 の振れが不規則になってしまう現象が新たに出現した。

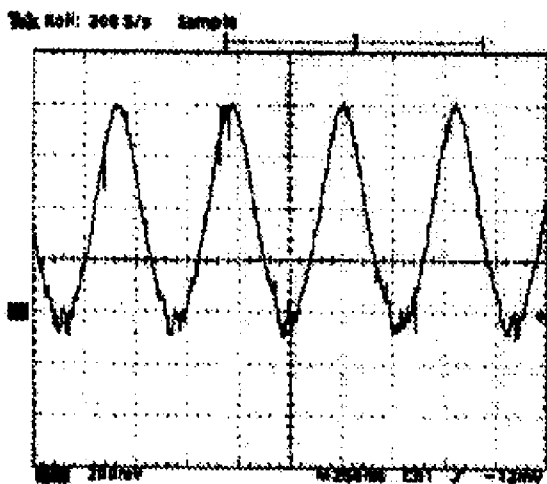


図 11 フィードバック制御時の変調関数

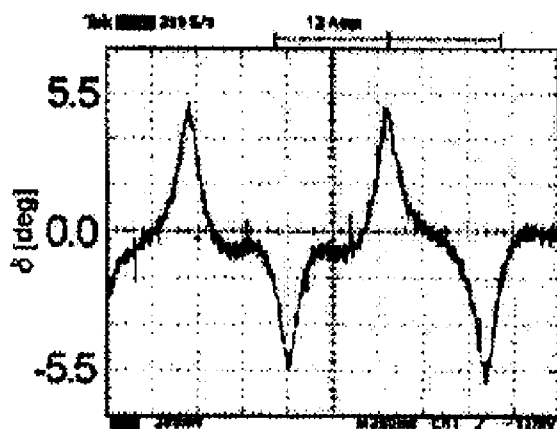


図 12 フィードバック制御時の δ

4. まとめ

4-1 振り子運動の実現

今回の研究ではファンクションジェネレータの方形波をパルス幅制御してドライブユニットのパルス入力のタイミングに変化を与え、振幅をコントロールしている。

まず原点位置の調整を手動で行う。次いでシーケンサのプログラム内では、パルス出力開始のタイミングとモータ動作開始のタイミングをずらして、アームが鉛直位置にある場合をスタートとして振り子動作を行うような方法を取っている。その際、動作開始のタイミングはパルスを半周期 (t で判別) 分出力し終わった時点とした。しかし、実際の動作ではアームは左右同振幅にはならず、どちらかに偏った振幅をするようになってしまった。

この原因として考えられるのはまず原点位置の決定、そして第 1 回目のスイングに必要な力の調整である。これらは非対称振動の原因であり、今後解決すべき基本的な課題である。

4-2 振幅制御

まず Δ_1 , Δ_2 に応じた δ の分布を図 13 に示す。このグラフからもその傾斜より Δ_1 , Δ_2 とも大きくすれば δ は小さくなり、ともに小さくすれば δ が大きくなることが読み取れる。よって、フィードバックなしの場合の制御については、 Δ_1 , Δ_2 の計測結果から方向転換時の速度を抑えれば良いということがわかり、振幅制御の一つの段階として満足する結果を得ることができた。さらに振幅を目標に近づけるためには様々な変調関数を与え、体験的に探ることも必要である。

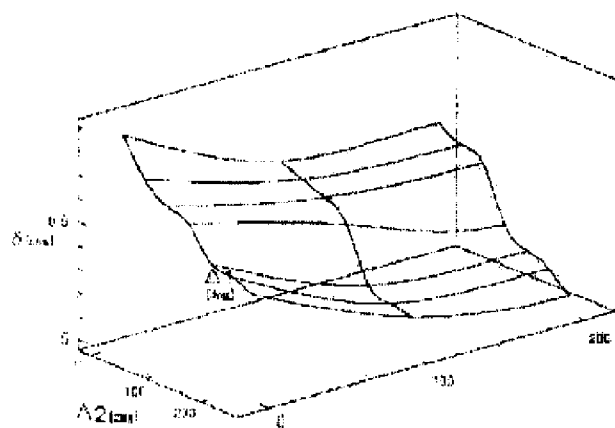


図 13 Δ_1, Δ_2 に対する δ の分布図

次にフィードバックを与えた場合、 δ の振幅をさらに目標に近づけることはできたが完全な制御には至らなかった。これは、前述のように θ_2 に比例する力をアーム 1 の振動に逆相第三高調波として特定の振れ角位置に加えるという単純なフィードバック制御であるが、これは必ずしも MODE0 を作る目的に合致していないのかもしれない。これを解決するためには力学的理論等に基づきフィードバックの式を作成しなくてはならない。

また、今回のフィードバック制御では θ_2 のみを使用しており、 θ_1 については考慮していない。このためアーム 1 の動きが不規則になってしまうことが確認された。よって、 θ_1 の位置制御を含めた 2 重振り子のフィードバック制御系を構築することが次の課題である。

謝辞

本研究を進めるにあたっては東京大学工学部教授堀洋一先生のご指導を賜った。お礼申し上げます。

参考文献

- 1) Mr.Nobody : 非線形力学の世界
<http://member.nifty.ne.jp/Mr-Nobody/>
- 2) 鹿野洋、堀洋一：再構成アトラクタを用いた二重振り子の安定化制御、電学論D、120 巻1号、平成12年
- 3) メガトルクモータシステム 取扱説明書、日本精工株式会社 電子応用製品技術部
- 4) KZ-A500 シリーズマニュアル、株式会社キーエンス
- 5) 山田泰司：MECHANICS OF CHAOSMAN -カオス人形の仕組み-
<http://www.aihara.co.jp/~taiji/pendula-equations/present.html>
- 6) JAVA シミュレーション「2重振り子」
<http://www.valley.ne.jp/%7Ehanepy/>