計測自動制御学会東北支部 第 189 回研究集会 (2000.8.1)
資料番号 189-11

最適サーボ系設計における重み行列決定の一手法

A Method to Decide Weighting Matrix for Optimal Servo System Design

○矢田晴義*，長縄明大*

○ Haruyoshi Yada*, Akihiro Nagnawa*

*秋田大学

*Akita University

キーワード： ディジタル制御 (digital control)，最適予見サーボ系 (optimal preview servo system)，初期値応答 (initial value response)，重み行列 (weighting matrix),

連絡先： 〒 010-8502　秋田市手形学園町 1-1 秋田大学 工学資源学部 機械工学科
長縄明大，Tel.: (018)889-2726，Fax.: (018)889-2726，E-mail: naganawa@ipc.akia-u.ac.jp

1. はじめに

近年，2自由度最適サーボ系の設計法に関する理論的[1, 2]および実験的[3]な研究が行なわれている．しかし目標値応答特性に関する評価関数の重み行列の決定には，これといった指針がなく，試行錯誤的に行なわれてきた．このため，重み行列を系統的に決定する方法が必要であると考えられる．

一方，目標入力の未来値があらかじめわかってる場合，その情報を有効に利用することによって制御系の性能が改善できることが知られている[4, 5, 6]．本研究では，未来情報を利用した最適予見サーボ系設計において、目標値と出力の偏差の上限に制約を与え，その制約を満たすような重み行列を決定する一つの方法について検討する．その決定アルゴリズムは，これまで，レギュレータ問題に対して用いられてきたものである[7]が，本研究ではこれを予見サーボ系の設計で利用するものである．

2. 最適予見サーボ系[5]

制御対象として，次に示す離散時間線形時不変系を考える．

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2}$$

ここで，$x(t)$ は $n\times 1$ の状態ベクトル，$u(t)$ は $m\times 1$ の制御入力ベクトル，$y(t)$ は $m\times 1$ の出力ベクトルである．本研究では，(A, B) は可安定，(C, A) は可検出であると仮定する．この制御対象に対し，ステップ状の目標値 $y_r(t)$ を次のように考える．

$$y_r(t) = \begin{cases} r_- & t < d \\ r_+ & t \geq d \end{cases} \tag{3}$$

r_+ と r_- は目標値のベクトル，d は予見長さで非負の整数であり，r_+ と r_- は，初期時刻 $t = 0$ で既知であるとする．出力ベクトル $y(t)$ が，定常状態でステップ状の目標値 $y_r(t)$ に一致する必要十

分条件は，

$$rank\begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \tag{4}$$

である．

最適予見サーボ系設計のため次の二次形式評価関数を設定する．

$$J=\sum_{t=0}^{\infty}(e_y'(t)Qe_y(t)+e_u'(t)Re_u(t)) \tag{5}$$

ここで，Q,R は正定な行列であり，$e_y(t),e_u(t)$ を次のように定義する．

$$e_y(t)=y_r(t)-y(t) \tag{6}$$

$$e_u(t)=u_r(t)-u(t) \tag{7}$$

$e_y(t)$ は出力 $y(t)$ の追従偏差，$e_u(t)$ は適切な信号 $u_r(t)$ と制御入力 $u(t)$ の制御入力偏差ベクトルである．以下では，$u_r(t)$ の選び方について述べる．

(4) 式の仮定より，出力 $y(t)$ が，$t\to\infty$ で一定値 r_+ となったとき状態量 $x_r(\infty)$ と制御入力 $u_r(\infty)$ が次のように一意に定まる．

$$\begin{bmatrix} x_r(\infty) \\ u_r(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r_+ \tag{8}$$

従って，定常状態が次の式を満たすように任意の $u_r(t)$ を決めることができる．

$$\begin{aligned} u_r(\infty) &= u(\infty) \\ &= H_{ur}r_+ \end{aligned} \tag{9}$$

ここで，

$$H_{ur}=[\ 0 \quad I\ ]\begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{10}$$

従って $u_r(t)$ を次のように選ぶものとする．

$$u_r(t)=H_{ur}y_r(t) \tag{11}$$

次に，評価関数 (5) 式を最小にする最適予見サーボ系の設計法について述べる．まず，次のような目標値 $y_r(t)$ の予見情報モデルを導入する．

$$\begin{aligned} \eta(t+1) &= A_r\eta(t)+B_ry_r(t+d) \\ \eta(0) &= Mr_- \\ \begin{bmatrix} y_r(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{yr} \\ C_{ur} \end{bmatrix}\eta(t) \end{aligned} \tag{12}$$

ここで，

$$\eta(t)=\begin{bmatrix} y_r(t) \\ y_r(t+1) \\ \vdots \\ y_r(t+d-1) \end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}$$

$$A_r=\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ B_r=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$C_{yr}=\begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{ur}=\begin{bmatrix} H_{ur} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(12) 式は，状態量 $\eta(t)$ とこのモデルへの入力 $y_r(t+$ ｄ) としての目標値 $y_r(t)$ を表す．従って，目標値が予見可能という仮定は，このモデルの状態量と入力が測定可能であることを意味する．

制御対象と予見情報モデルからなる拡大系を次のように表現する．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \eta(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}y_r(t+d) \\ \begin{bmatrix} e_y(t) \\ e_u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -C & C_{yr} \\ 0 & C_{ur} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix}u(t) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで，予見情報モデルの状態量は定常状態で，次式を満たさなければならない．

$$\eta(\infty)=Mr_+ \tag{14}$$

また，予見情報モデルの状態量，制御対象の状態量，制御入力のそれぞれの定常値との偏差を次のように定義する．

$$\tilde{\eta}(t)=\eta(t)-\eta(\infty) \tag{15}$$

$$\tilde{x}(t)=x(t)-x(\infty) \tag{16}$$

$$\tilde{u}(t)=u(t)-u(\infty) \tag{17}$$

これらの偏差ベクトルより，(13) 式で表される拡大系は，次のように書き直すことができる．

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t+1) \\ \tilde{\eta}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_y(t) \\ e_u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C & C_{yr} \\ 0 & C_{ur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \tag{18}$$

このとき，(5) 式の評価関数は，

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\ \tilde{x}'(t) \quad \tilde{\eta}'(t) \quad \tilde{u}'(t)\ ] \begin{bmatrix} -C' & 0 \\ C'_{yr} & C'_{ur} \\ 0 & -I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C & C_{yr} & 0 \\ 0 & C_{ur} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \tag{19}$$

となる．すなわち，最適予見サーボ系設計問題は，結果として最適レギュレータ問題に帰着される．この評価関数を最小にする $\tilde{u}(t)$ は，次のように求められる．

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = &- \left(R + [\ B' \quad 0\ ] P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \left([\ 0 \quad -RC_{ur}\ ] + [\ B' \quad 0\ ] \right. \\ &\left. \times P \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{bmatrix} \\ = &[\ F_{p0} \quad F_{u0}\ ] \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，

$$F_{p0} = -(R + B'P_{11}B)^{-1} B'P_{11}A \tag{21}$$

$$F_{u0} = -(R + B'P_{11}B)^{-1} (B'P_{12}A_r - RC_{ur}) \tag{22}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{23}$$

P は，次のリカッチ方程式の半正定解である．

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'_r \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} - P \\ &+ \begin{bmatrix} -C' & 0 \\ C'_{yr} & C'_{ur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C & C_{yr} \\ 0 & C_{ur} \end{bmatrix} \\ &- \left(\begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'_r \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C'_{ur}R \end{bmatrix} \right) \\ &\times \left(R + [\ B' \quad 0\ ] P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \left([\ B' \quad 0\ ] P \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} + [\ 0 \quad -RC_{ur}\ ] \right) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

(20) 式より，制御則 $u(t)$ は，次のように表せる．

$$u(t) = [\ F_{p0} \quad F_{r0}\ ] \left(\begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \eta(\infty) \end{bmatrix} \right) + u(\infty) \tag{25}$$

3.　追従偏差の制約を満たす重み行列の決定

最適予見サーボ系の設計は，(18) 式の拡大偏差系に対するレギュレータ問題により行なわれるため．レギュレータ問題で提案された重み行列の決定法をサーボ問題においても用いることができる．本研究では，

$$\sum_{t=0}^{\infty} e_{yi}^2(t) \le \sigma_i \tag{26}$$

すなわち，$i(i=1,\cdots,m)$ 番目の出力 $y_i(t)$ に対する追従偏差 $e_{yi}(t)$ の 2 乗和が，上限 σ_i 以下となり，かつ

$$\min \sum_{t=0}^{\infty} e_u(t)' e_u(t) \tag{27}$$

すなわち，操作量 $u(t)$ が，定常値 $u(\infty)$ に速く収束するための (5) 式の重み行列を決定する方法について検討する．ここでは，重み行列 R を固定し，

$$Q = diag[q_1, q_2, \cdots, q_m] \tag{28}$$

として，重み行列 Q を求めるものとする．

ここで (18) 式の拡大偏差系および (20) 式の $\tilde{u}(t)$ を簡単化して表現するため，次の行列を導入する．

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} = \bar{A} \ , \ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{B}$$
$$\begin{bmatrix} -C & C_{yr} \end{bmatrix} = \bar{C} \ , \ \begin{bmatrix} F_{p0} & F_{r0} \end{bmatrix} = F$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{bmatrix} = \bar{x}(t)$$

(20) 式を (18) 式に代入した制御系の初期値応答は，

$$\bar{x}(t) = (\bar{A} + \bar{B}F)^t \bar{x}(0) \tag{29}$$

より与えられる．このとき追従偏差 $e_y(t)$ は，

$$e_y(t) = \bar{C}(\bar{A} + \bar{B}F)^t \bar{x}(0) \tag{30}$$

となる．(30) 式を用いると，

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} e_y'(t) e_y(t) &= tr \sum_{t=0}^{\infty} e_y(t) e_y'(t) \\ &= tr \bar{C} X \bar{C}' \end{aligned} \tag{31}$$

が成り立つ．ここで，tr は行列のトレースを表し，X は次のリアプノフ方程式の解である．

$$(\bar{A} + \bar{B}F) X (\bar{A} + \bar{B}F)' + -X \bar{x}(0) \bar{x}'(0) = 0 \tag{32}$$

(31) 式より，i 番目の追従偏差の 2 乗和は，行列 $\bar{C} X \bar{C}'$ の ii 要素として表される．これは，追従偏差の 2 乗和が時間応答を計算することなくリアプノフ方程式の解を用いて計算できることを表している．

以上より，(26),(27) 式を満たすための重み行列は，以下のように求めることができる．

1. 重み行列 R と初期値 $Q(0)$ を適当に与える．
2. (5) 式を最小にする解を求める．
3. (32) 式のリアプノフ方程式の解 $X(k)$ を求める．
4. $|[\bar{C} X(k) \bar{C}' - \bar{C} X(k-1) \bar{C}']_{ii}| \le \varepsilon$ が，成り立つなら終了する．ここで，ε は，十分小さい整数を表す．
5. 手順 4. が満たされない場合は，
$$q_i(k+1) = q_i(k) \left[\frac{[\bar{C} X(k) \bar{C}']_{ii}}{\sigma_i} \right]^p$$
として $Q(k)$ を，$Q(k+1)$ へ更新して手順 2. へ戻る．ここで，p は，アルゴリズムの収束速さを調節するためのパラメータである．

上記を手順 4. が成り立つまで繰り返すことにより，(26),(27) 式を満たすための重み行列 Q を，系統的に得ることができる．なお，文献 (6) でも述べられているように，このアルゴリズムの収束性は理論的には保証されていないことを注記しておく．

4. 例題

制御対象 [8)] は，(1),(2) 式の各行列が，次のように与えられるものとする．

$$A = \begin{bmatrix} 1.1048 & 0.1035 & 0 & 0 \\ 2.1316 & 1.1048 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0001 & 1.0000 & 0.1000 \\ -0.0508 & -0.0025 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} -0.0051 \\ -0.1035 \\ 0.0025 \\ 0.0501 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ここでは，制御対象の出力を $[\ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\ ]'$ から目標値 $[\ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0\ ]'$ に追従させる問題を考える．重み行列を，$Q(0) = 1, R = 1$,(26) 式の上限を $\sigma_1 = 6$，予見長さを $d = 10$ としてシミュレーションを行った．図 1 は，$\varepsilon = 10^{-6}, p = 1$ として，アルゴリズムを 29 回適用した場合の結果を示しており，制約を満たすように追従偏差の二乗和が収束して行く様子がわかる．なお，得られた重み行列は，$Q = 4.4328$ であり，この重みを用いた場合の出力を図 2 に示す．

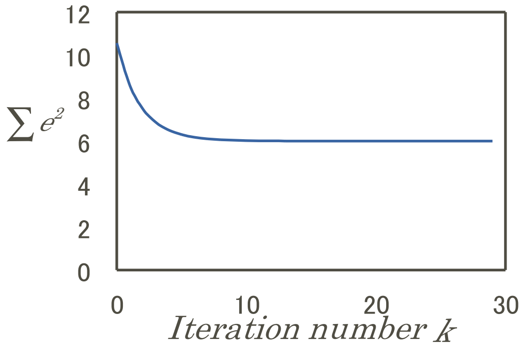

図 1 追従偏差の収束の様子

Fig.1 Convergence of Tracking Error

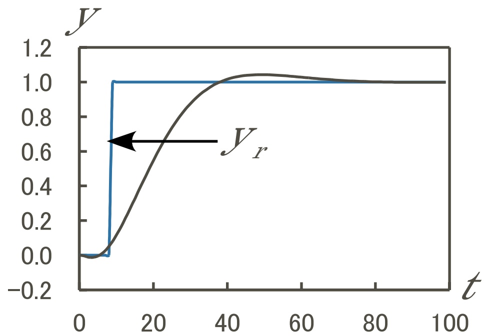

図 2 目標値と出力

Fig.2 Reference y_r and Output y

5. むすび

本研究では，最適予見サーボ系設計における重み行列の選び方の一つの手法を提案した．これまで，レギュレータ問題に対しては，本研究のような重み行列を決定するアルゴリズムが提案されていたが，サーボ問題では，提案されていなかった．本研究によって，サーボ問題でも同様な手法を用いて，重み行列を系統的に決定することができることが示された．

参考文献

1) 藤崎，池田：2 自由度積分型サーボ系の構成，計測自動制御学会論文集，**27**，No.8 , 907〜914(1991)

2) 荻原，一木，金星，福光，荒木：ディジタル型 2 自由度 LQI サーボ系；設計法とその空気圧シリンダの位置決め制御への応用，システム制御情報学会論文誌，**11**，No.2 , 51〜60(1998)

3) 長縄，平沼，愛田，大日方：2 自由度最適 1 型サーボ系のタンクシステムへの応用と周波数領域での解析；観測雑音の影響と外乱抑制特性のトレードオフおよびロバスト安定性に関する考察，システム制御情報学会論文誌，**12**, No.1 , 1〜10(1999)

4) 愛田，杉本，梅内：感度と安定余有のトレードオフを考慮した最適予見 1 型サーボ系の設計，計測自動制御学会論文集，**30**，No.8 , 993〜995 (1994)

5) Y.Fujisaki and T.Narazaki : Optimal preview control based on quadratic performance index , *Proc.* 34th IEEE CDC , 3830〜3835 (1997)

6) 土谷，江上，:ディジタル予見制御，産業図書 (1992)

7) C.Heieh, R.E.Skelton and F.M.Damra : Minimum energy controllers with inequality constraints on output variances, Optimal Control Applications & Methods, **10**, 347〜366(1989)

8) K.Ogata : Designing Linear Control Systems with Matlab, 1993-12, 50, Prentice-Hall