

Lossless系に対する構造系と制御系の同時最適設計 -LMIに近似可能な場合-

Simultaneous optimal design of structural and control system for lossless systems

平元和彦*, 大日方五郎*, 土岐 仁*

Kazuhiko Hiramoto*, Goro Obinata* and Hitoshi Doki*

*秋田大学

*Akita University

キーワード: 構造系と制御系の同時最適設計 (Simultaneous optimal design of structural and control systems),
ロスレス系 (Lossless system), 線形行列不等式 (Linear matrix inequalities)

連絡先: 〒010-8502 秋田市手形学園町1-1 秋田大学 工学資源学部 機械工学科
平元和彦, Tel.: (018)889-2348, Fax.: (018)837-0405, E-mail: hira@ipc.akita-u.ac.jp

1. はじめに

制御系を設計する際, コントローラだけでなく, 制御対象も同時に最適設計する“構造系と制御系の同時最適設計問題^{1, 2)}”を取り扱う. 田中ら³⁾は, 制御対象のディスクリプタ表現の各行列中に, 調整可能な設計変数が線形に存在している場合, 同時最適設計問題がBMI問題となることを明らかにした. BMI問題は, 大域的な最適解を求めることが非常に困難であることが知られている. これに対し, Hara⁴⁾やIwasaki⁵⁾は, 制御対象の位相特性を評価して, 閉ループ系の性能が良くなるように構造系を単独で設計する手法を提案している. この手法は, LMIに帰着できる場合があり, 解析的アプローチが可能である. 一方, 大日方ら⁶⁾, Hiramotoら⁷⁾は, 制御対象をlosslessであると仮定すると, 制御対象の正規化既約因子の変動に対する最大安定

余裕の逆数が一定値となることを示した. さらに, lossless系のサブクラスに対して得られる二つの一般化代数Riccati方程式の厳密解表現から簡単に求められる \mathcal{H}_∞ コントローラで構成される閉ループ系に対して同時最適設計を行うことを提案している. 文献^{6, 7)}では, 制御対象中の設計変数を求める際, 傾斜法を用いていたため, 局所的最適解への収束だけが保証されてきた. 本報告でもlossless系の同時最適設計問題を取り扱うが, 制御対象の固有振動数と前述のコントローラのゲインを調整するスカラー重みを調整して, 閉ループ系の \mathcal{H}_2 ノルムや \mathcal{H}_∞ ノルムを最適化する同時最適設計問題が, LMIに近似できることを示す.

2. Lossless系の性質

主要結果を述べる前に, 文献^{6, 7)}で示されたlossless系に関する結果をまとめておく.

定義 1 Lossless系: n 次のLTIシステム

$G(s) = \{A_G, B_G, C_G, D_G\}$ は, 以下の条件を満足する正定対称行列 Q が存在するとき, losslessであるという.

$$A_G^T Q + Q A_G = 0 \quad (1)$$

$$Q B_G = C_G^T \quad (2)$$

$$D_G + D_G^T = 0 \quad (3)$$

定理 1 $G(s)$ がlosslessであるとき, 次式が成立する.

$$\gamma_{\min} := \inf_{K(s) \in \Omega_G} \|T(s)\|_{\infty} = \sqrt{2} \quad (4)$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} I \\ K(s) \end{bmatrix} (I - G(s)K(s))^{-1} \begin{bmatrix} I & G(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで, Ω_G は, $G(s)$ を安定化する $K(s)$ のすべてのクラスを表す. また, $\|T(s)\|_{\infty} \leq \sqrt{2}\beta$ ($\beta > 1$)を満足する $K(s) = \{A_K, B_K, C_K, D_K\}$ は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} A_K &= A_G - \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} B_G \\ &\quad \times \left\{ I - \left(D_G - \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} I \right) S^{-1} (D_G^T + I) \right\} B_G^T Q \\ B_K &= -\frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} B_G, C_K = -B_G^T Q, D_K = -D_G, \\ S &= I + D_G D_G^T \end{aligned} \quad (6)$$

略証: $G(s)$ がlosslessであると仮定すると, 以下の一般化代数Riccati方程式

$$\begin{aligned} (A_G - B_G S^{-1} D_G^T C_G)^T X + X (A_G - B_G S^{-1} D_G^T C_G) \\ - X B_G S^{-1} B_G^T X + C_G^T R^{-1} C_G = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (A_G - B_G S^{-1} D_G^T C_G) Z + Z (A_G - B_G S^{-1} D_G^T C_G)^T \\ - Z C_G^T R^{-1} C_G Z + B_G S^{-1} B_G^T = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

($R = I + D_G^T D_G$)の正定対称解が, $X = Z^{-1} = Q$ となることが示される. 文献⁸⁾より, $\gamma_{\min} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}(ZX)}$ より, $\gamma_{\min} = \sqrt{2}$ がいええる. □

注意 1 定理1の結果は, $G_a(s) := wG(s)$ ($w > 0$)に対しても同様に成立する.

3. 主要結果

3.1 閉ループ系

本報告では, 伝達関数が

$$G(s) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i s}{s^2 + \omega_i^2} \quad (9)$$

与えられるlossless系のクラスを考える. $G(s)$ の実現の一つとして, 次式が考えられる.

$$\begin{aligned} A_G &= \text{blockdiag}(A_G^1, \dots, A_G^n) \\ B_G &= \begin{bmatrix} B_G^1 \\ \vdots \\ B_G^n \end{bmatrix}, C_G = \begin{bmatrix} C_G^1 & \dots & C_G^n \end{bmatrix} \\ A_G^i &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix}, B_G^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{k_i} \end{bmatrix}, \\ C_G^i &= (B_G^i)^T \end{aligned} \quad (10)$$

このとき, 式(1), (2)を満足する正定対称行列 Q として, $Q = I$ を選ぶことができる. すると, 定理1より, $X = Z = I$ となる. $w > 0$ として, $G_a(s) = wG(s)$ を構成したとき, $G(s)$ に対するコントローラ $K_a(s) = wK(s) = \{A_{K_a}, B_{K_a}, C_{K_a}, D_{K_a}\}$ の実現 (図1参照) は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} A_{K_a} &= A_G - \frac{2\beta^2 - 1}{\beta^2 - 1} w B_G B_G^T \\ B_{K_a} &= -\frac{w\beta^2}{\beta^2 - 1} B_G, C_{K_a}^T = w B_G^T, D_{K_a} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

一般化プラントを

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{11}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

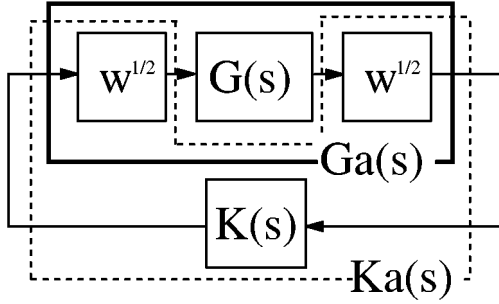


Fig. 1 Closed-loop system

とし, 簡単のために $D_{11} = 0, D_{21} = 0, D_{22} = 0$ とする. いま, $P_{22}(s) = G_a(s)$ とすると, $P(s)$ と $K_a(s)$ からなる閉ループ系 $H(s) = \{A_H, B_H, C_H, 0\}$ は,

$$A_H = \begin{bmatrix} A_G & wB_GB_G^T \\ -\frac{w\beta^2}{\beta^2-1}B_GB_G^T & A_G - \frac{2\beta^2-1}{\beta^2-1}wB_GB_G^T \end{bmatrix},$$

$$B_H = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_H = \begin{bmatrix} C_1 & wD_{12}B_G^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

となる. 式(10), (13)より, 行列 A_H, B_H, C_H は, ω_i ($i = 1, \dots, N$), $w > 0$ の線形関数となっている.

3.2 LMIへの近似

3.2.1 閉ループ系の \mathcal{H}_2 ノルム

閉ループ系 $H(s)$ において, $\|H(s)\|_2^2 < \gamma_2^2$ ($\gamma_2 > 0$) となる必要十分条件は, 以下のLMIを満足する $L = L^T > 0, M = M^T$ が存在することである.

$$\begin{bmatrix} A_H^T L + L A_H & L B_H \\ B_H^T L & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} L & C_H^T \\ C_H & M \end{bmatrix} > 0, \quad (15)$$

$$\text{trace}(M) < \gamma_2^2 \quad (16)$$

いま, $\omega_i \rightarrow \omega_i + \Delta\omega_i, w \rightarrow w + \Delta w$ と変化したと仮定する. このとき, $L \rightarrow L + \Delta L, \gamma_2^2 \rightarrow \gamma_2^2 + \Delta\gamma_2^2$ と変化する. このとき, 式(14)–(16)は, 以下のよ

うになる.

$$\begin{bmatrix} D & (L + \Delta L)B_H \\ B_H^T(L + \Delta L) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} L + \Delta L & (C_H + \Delta C_H)^T \\ (C_H + \Delta C_H) & M + \Delta M \end{bmatrix} > 0, \quad (18)$$

$$\text{trace}(M + \Delta M) < \gamma_2^2 + \Delta\gamma_2^2, \quad (19)$$

$$L + \Delta L > 0, \quad (20)$$

$$D = (A_H + \Delta A_H)^T(L + \Delta L) + (L + \Delta L)(A_H + \Delta A_H)$$

ここで,

$$\Delta A_H = \sum_{i=1}^N \Delta\omega_i \frac{\partial A_H}{\partial \omega_i} + \Delta w \frac{\partial A_H}{\partial w} \quad (21)$$

$$\Delta C_H = \Delta w \frac{\partial C_H}{\partial w} \quad (22)$$

である. 式(18), (19), (20)は, $\Delta\omega_i$ や Δw に関するLMIとなるが, 式(17)には, Δ に関する二次の項が現れる. ここでは, 文献⁹⁾と同様に, $\Delta\omega_i$ や Δw があまり大きくないと仮定して, Δ の二次の項 ($\Delta A_H^T \Delta L$ など) を無視する. すると, 式(17)は,

$$\begin{bmatrix} E & (L + \Delta L)B_H \\ B_H^T(L + \Delta L) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$E = A_H^T L + L A_H + A_H^T \Delta L + \Delta L A_H + \Delta A_H^T L + L \Delta A_H$$

となる. 式(23)は, ΔA_H , (ω_i, w が線形に含まれる), $\Delta L, \Delta M$ (w が線形に含まれる), $\Delta\gamma_2^2$ に関するLMIとなり, 定理1の条件を満足 ($\|T(s)\|_\infty = \sqrt{2}$) しなから, $\gamma_2^2 + \Delta\gamma_2^2$ を最小化 (閉ループ系の \mathcal{H}_2 ノルムを最小化する) する制御対象の固有振動数 ω_i とコントローラを設計する際のスカラー重み w を一般的なLMIソルバで求めることができる.

3.2.2 閉ループ系の \mathcal{H}_∞ ノルム

有界実補題より, 閉ループ系 $H(s)$ の \mathcal{H}_∞ ノルムが γ_∞ 以下になる必要十分条件は, 以下のLMIを満足する $U = U^T > 0$ が存在することである.

$$\begin{bmatrix} U A_H + A_H^T U & U B_H & C_H^T \\ B_H^T U & -\gamma_\infty I & 0 \\ C_H & 0 & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

$A_H \rightarrow A_H + \Delta A_H$, $C_H \rightarrow C_H + \Delta C_H$ の変化により, $U \rightarrow U + \Delta U$, $\gamma_\infty \rightarrow \gamma_\infty + \Delta\gamma_\infty$ と変化する. ここで,

$$\Delta C_H = \Delta w \frac{\partial C_H}{\partial w} \quad (25)$$

である. \mathcal{H}_2 ノルムの場合と同様に, Δ に関する二次の項を無視する. すると, 式(24)のLMIは,

$$\begin{bmatrix} F & (U + \Delta U)B_H & (C_H + \Delta C_H)^T \\ B_H^T(U + \Delta U) & -(\gamma_\infty + \Delta\gamma_\infty)I & 0 \\ C_H + \Delta C_H & 0 & -(\gamma_\infty + \Delta\gamma_\infty)I \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

$$U + \Delta U > 0 \quad (27)$$

$$F = UA_H + A_H^T U + U\Delta A_H + \Delta A_H^T U + \Delta U A_H + A_H^T \Delta U$$

となる. これは ΔA_H , ΔU , ΔC_H , $\Delta\gamma_\infty$ に関するLMIとなり, $\gamma_\infty + \Delta\gamma_\infty$ を最小化する ω_i , w をLMIソルバで求めることができる.

以上の結果より, 式(9)で与えられるlossless系のサブクラスに対して, $\|T(s)\|_\infty = \sqrt{2}$ を保ちながら, 着目する閉ループ系の \mathcal{H}_2 ノルムや, \mathcal{H}_∞ ノルムを最小化する制御対象の固有振動数 ω_i とコントローラのゲインを決定するスカラー w を決定する問題が, LMIに近似できることが示された.

注意 2 本問題設定では, 文献⁹⁾と同様, Δ に関する二次の項を無視することの妥当性を確保するため, 式(23), (26)において, 設計変数である $\Delta\omega_i$ ($i = 1, \dots, N$)や Δw の変化を初期値である ω_i , w と比べて小さいとする. よって, LMIを解く際には以下のような不等式拘束条件を設ける必要がある.

$$\underline{\omega}_i \leq \Delta\omega_i \leq \bar{\omega}_i, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (28)$$

$$\underline{w} \leq \Delta w \leq \bar{w} \quad (29)$$

ここで, $\bar{\omega}_i$, $\underline{\omega}_i$, \bar{w} , \underline{w} は, それぞれ $\Delta\omega_i$ と Δw の上下限値である.

注意 3 本節で得られた結果は, 図2のような周波数重み $V(s)$, $W(s)$ を導入した場合も同様に成立する.

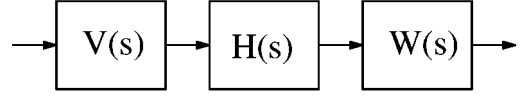


Fig. 2 $H(s)$ with frequency weighting functions $V(s)$ and $W(s)$

注意 4 式(13)には, $B_G B_G^T$ を含む項が現れる. た

とえば, $N = 3$ のときは

$$B_G B_G^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & \sqrt{k_1 k_2} & 0 & \sqrt{k_1 k_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k_1 k_2} & 0 & k_2 & 0 & \sqrt{k_2 k_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k_1 k_3} & 0 & \sqrt{k_1 k_2} & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

となるから, 行列 $B_G B_G^T$ は, k_1, k_2, \dots, k_n に関して線形ではない. いま, スカラー $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ を定義し, $k_i = \mu_i k_1$ ($i = 1, \dots, n-1$)とすると, 行列 $B_G B_G^T$ は, $N = 3$ の場合,

$$B_G B_G^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & \mu_1 k_1 & 0 & \mu_2 k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 k_1 & 0 & \mu_1^2 k_1 & 0 & \mu_1 \mu_2 k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 k_1 & 0 & \mu_1 \mu_2 k_1 & 0 & \mu_2^2 k_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となり, μ_1, μ_2 を固定すると, 設計変数 k_1 に関して線形になる. これより, $G(s)$ の分子 k_i の最適化も, 限定的ではあるがLMIに近似することが可能である.

4. 設計例

式(9)において, $N = 3$ とし, 閉ループ系の \mathcal{H}_2 ノルムを最小化する同時最適設計(3.2.1節)を行う. 式(12)中の行列 C_1, D_{12} は, 以下のように定義する.

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_6 \\ 0_{1 \times 6} \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix} \quad (32)$$

ここで $\rho > 0$ である. 3.2.1節で提案した手法を用いて, コントローラ中の設計変数 Δw と固有振動

数 $\Delta\omega_i$ ($i = 1, 2, 3$)を最適化する．最適化に用いたパラメータ値を表1に示す．

設計変数 $\Delta\omega_i$, Δw は, 初期値をいずれも0とし, 式(28), (29)の上下限は, それぞれ $-0.5\omega_i \leq \Delta\omega_i \leq 0.5\omega_i$, $0 \leq \Delta w \leq 2w$ とした．以上の条件で最適化を行った結果を表2に示す．ここで, J_0 , J_{ac} は, それぞれ初期時と最適化後の閉ループ系の \mathcal{H}_2 ノルムの2乗である．

図3, 4に, 閉ループ系の外乱から観測出力および操作量のゲイン線図を示す．図5に, 閉ループ系のインパルス応答を示す．

Table 1 Physical parameters

Parameters	Value
ω_1 [rad/s]	12.53
ω_2 [rad/s]	50.12
ω_3 [rad/s]	112.78
k_1	1
k_2	1
k_3	1
ρ	0.1
w	10

Table 2 Result of the simultaneous optimal design

Parameters	Value
J_0	0.53
J_{ac}	0.45
$\Delta\omega_1$	0.39
$\Delta\omega_2$	-3.24
$\Delta\omega_3$	2.50
Δw	7.38

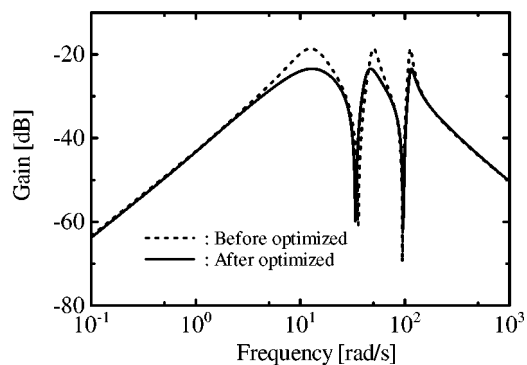


Fig. 3 Gain plots of the closed-loop transfer function from disturbance to sensor output

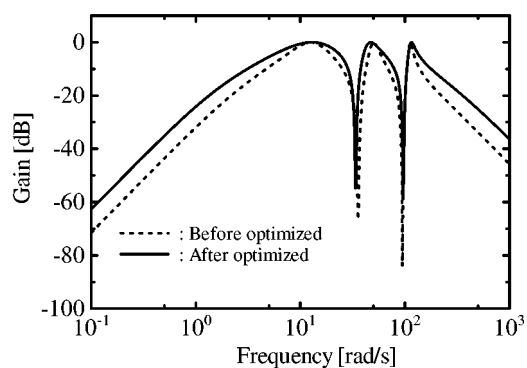
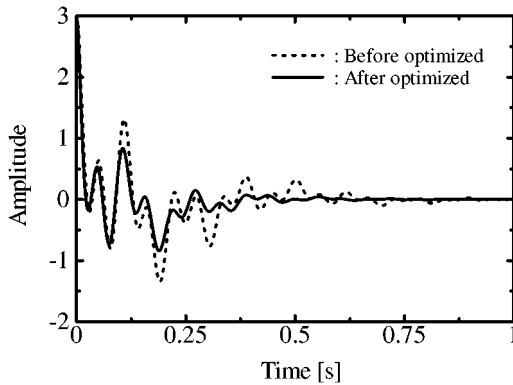


Fig. 4 Gain plots of the closed-loop transfer function from disturbance to control effort

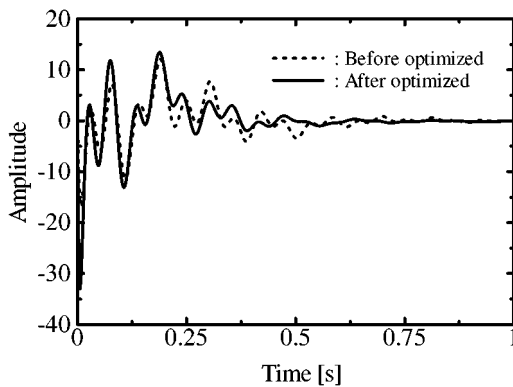
5. おわりに

Lossless系に対する構造系と制御系の同時最適設計問題について検討した．Lossless系のサブクラスに対して, 閉ループ系の \mathcal{H}_∞ ノルムを一定値にしなが, 閉ループ系の他の仕様を最適化する問題がLMIに近似できることを示した．

提案する手法は, 近似の妥当性を確保するため, 設計変数に上下限を設ける必要がある．この制限は, 一般には, 構造系に課される物理的かつ本質的な制約条件(例: 剛性, 減衰が正)より狭いクラスしかカバーしない．よって, 近似されたLMIの下で求められた(その意味での)大域的最適解は,



(a) Sensor output



(b) Control effort

Fig. 5 Impulse response of the closed-loop system

必ずしも物理的制約だけを考慮して得られる大域的最適解¹とは一致しない。この問題は、LMIを繰り返し適用することにより回避できる可能性がある。この点は、伝達関数の分子パラメータ（零点）の調整可能性の検討とともに、今後の課題としたい。

参考文献

- 1) 岩壺, 河村, 安達, 日本機械学会論文集, **59**–559, C (1993), 631–637.
- 2) 大日方, 計測と制御, **36**–4, (1997), 254–261.
- 3) 田中, 杉江, SICE論文集, **34**–1, (1998), 27–33.

¹ 著者らの知る限り, そのような大域的最適解を効率的に得る手法は見つかっていない。

- 4) Hara, S., Nishio, M. and Maruyama, T., *Proc. of CCA*, (1999), 176–181.
- 5) Iwasaki, T., *Proc. of TITec COE/Super Mechano-Systems workshop '98*, (1998), 170–185.
- 6) 大日方, 平元, 第21回DSTシンポジウム資料, (1998), 161–164.
- 7) Hiramoto, K., Doki, H. and Obinata, G., *J. Sound and Vibration*, **229**–5, (2000), 1057–1075.
- 8) McFarlane, D. C. and Glover, K., *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **138** Springer-Verlag Berlin, (1990).
- 9) A. Hassibi, J. P. How and S. P. Boyd, *J. Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, No. 6, 862–872 (1999).