

微分方程式の数値解法を応用したモデル予測制御の 安定性解析

Stability Analysis of the Model Predictive Control Designed with the Numerical Solution of a Differential Equation

○鹿内良将, 能川幸二郎, 鈴木睦

○Yoshinobu Shikanai, Koujiro Nogawa and Mutsumi Suzuki

東北大学大学院 工学研究科 化学工学専攻

Department of Chemical Engineering, Tohoku University

キーワード : モデル予測制御 (Model Predictive Control), 安定性解析(stability analysis), AR過程
(Autoregressive Process),

連絡先 : 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉07 東北大学大学院 工学研究科 化学工学専攻 鈴木研究室
鹿内良将, Tel.: (022)217-7266, Fax.: (022)217-7293, E-mail: shika@pse.che.tohoku.ac.jp

1. はじめに

化学プロセスの制御は計装機器の制約や、コンピュータの演算速度の問題などにより十分に細かい間隔でのサンプリングが出来ない場合が多い。またプロセスには不確実性があり完全なモデルを構築することが出来ない。このような条件で安定かつパラメータ変動に対してロバストな制御を行う方法として、物理モデルを利用したモデル予測制御にRunge-Kutta法を適用する方法を提案した¹⁾。この制御法は陰的、陽的を含めた様々な公式を利用することが出来るが利用する公式によって安定性の特徴が異なっていた。

そこで本報ではAR過程の安定条件を利用した安定性解析法を提案し、前回提案した制御法の安定性について考察を行う。またモデルパラメータ誤差、制御パラメータが安定性に及ぼす影響を考察

する。

2. 解析方法

制御対象として以下の線形システムを考える。

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u; a, b) = ay + bu \quad (1)$$

ここで y は出力(被制御変数)、 u は入力(操作変数)、 a, b はモデルパラメータである。このシステムは極めて単純であるが、一般の非線形システムの定常点近傍の近似でもあり、このシステムに対する制御結果を検討することによってそれぞれの制御則の性能の優劣を判定することが出来る。

入力は各制御区間において0次のホールドとすると一定なので、このシステムの微分方程式は解析的に積分が出来る。定常状態を原点として時間ス

ステップ*i*から*i*+1の間で積分すると、

$$y_{i+1} = e^{a\Delta t}y_i + (e^{a\Delta t} - 1)\frac{b}{a}u_i \quad (2)$$

を得る。

前回提案したRunge-Kutta法を利用したモデル予測制御の式は、

$$u_i = u_{i-1} +$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{f_u\Delta t\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{E} - f_y\Delta t\mathbf{B})^{-1}\mathbf{e}} - \frac{f_y}{f_u}(y_i - y_{i-1}) \quad (3)$$

であった¹⁾。ここで $\boldsymbol{\mu}$ 、 \mathbf{B} はそれぞれRunge-Kutta法の公式で与えられる係数のベクトルと行列である(Appendix A-1,A-2参照)。また f_y 、 f_u はそれぞれ微分方程式 f の y 、 u での偏微分である。テストシステム(1)では f_y は a 、 f_u は b となる。ただし制御に利用するモデルパラメータには必ず誤差が含まれており推定値しか知り得ない。それぞれの推定値を \hat{a} 、 \hat{b} とおく。また制御則の式においてRunge-Kutta法の公式に依存する部分を M とおくと、 M は $\hat{a}\Delta t$ の関数となる。

$$f_y = \hat{a} \quad (4)$$

$$f_u = \hat{b} \quad (5)$$

$$M = \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{E} - \hat{a}\Delta t\mathbf{B})^{-1}\mathbf{e} \quad (6)$$

1ステップ先の目標値は設定値($y^* = 0$)と現在の観測値から次の式で求める。

$$y_{i+1} = (1 - \alpha)y^* + \alpha y_i = \alpha y_i \quad (7)$$

この目標値を決めるフィルタのパラメータ α は制御の安定性と即応性とのトレードオフで決定するパラメータである。

これらを制御則の式(3)に代入すると、

$$u_i = u_{i-1} + \frac{(\alpha - 2)y_i + y_{i-1}}{\Delta t\hat{b}M} - \frac{\hat{a}}{\hat{b}}(y_i - y_{i-1}) \quad (8)$$

となる。つぎにシステムの式(2)を u について解くと、

$$u_i = \frac{\alpha y_{i+1}}{b(e^{a\Delta t} - 1)} - \frac{ae^{a\Delta t}y_i}{b(e^{a\Delta t} - 1)} \quad (9)$$

となり、さらに時間ステップを1ステップ戻すと、

$$u_{i-1} = \frac{\alpha y_i}{b(e^{a\Delta t} - 1)} - \frac{ae^{a\Delta t}y_{i-1}}{b(e^{a\Delta t} - 1)} \quad (10)$$

を得る。これらの式を制御則の式(8)に代入すると、 u が消去され y に関するAR過程の式になる。

$$y_{i+1} = Ay_i + By_{i-1} \quad (11)$$

ただし、

$$A = 1 + e^{a\Delta t} + \frac{\alpha - 2}{ba\Delta tM}(e^{a\Delta t} - 1) - \frac{\hat{a}}{\hat{b}}(e^{a\Delta t} - 1) \quad (12)$$

$$B = -e^{a\Delta t} + \frac{1}{ba\Delta tM}(e^{a\Delta t} - 1) + \frac{\hat{a}}{\hat{b}}(e^{a\Delta t} - 1) \quad (13)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{a}}{a} \quad (14)$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{b}}{b} \quad (15)$$

\hat{a} の定義(14)より M は次の様に変形できる。

$$M = \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{E} - \hat{a}a\Delta t\mathbf{B})^{-1}\mathbf{e} \quad (16)$$

システム(2)に制御則(3)を適用した系の安定性は2次のAR過程(11)の安定性問題に帰着される。つまりAR過程の式中のパラメータ \hat{a} 、 \hat{b} 、 $a\Delta t$ 、 α が安定性に及ぼす影響を調べればよい。

AR過程が収束する条件はその特性方程式の全ての根の絶対値が1より小さいことである。式(11)の特性方程式は、

$$r^2 - Ar - B = 0 \quad (17)$$

となりその根は、

$$r = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + B} \quad (18)$$

である。この2つの根が1より小さくなる条件は

$$B > -1 \quad (19)$$

$$B < 1 - A \quad (20)$$

$$B < 1 + A \quad (21)$$

である事が良く知られているのでこれらの式に式(12)(13)を代入しまとめると、パラメータが満たす

べき条件式が得られる。ここでは特に制御周期 $a\Delta t$ に対する安定性に注目すると $a\Delta t$ の数直線上の安定区間に及ぼすパラメータの影響をこの条件式から調べることが出来る。

この方法は式が複雑になると非常に困難になる。その場合は安定領域を数値的に求める方法が有効である。 $a\Delta t$ の複素平面上で根の絶対値の大きい方が1となる点を数値的に計算しプロットすることで各公式における安定領域の形状や、パラメータの影響を視覚的に調べる事が可能となる。

3. 解析結果

3.1 数式に基づく解析

まず始めに最も単純なEular法を用いた制御を例に安定領域の特徴の考察を行う。安定条件式(19)(20)(21)に式(12)(13)を代入し、まとめると以下の条件が得られる。条件式(19)は

$$\frac{1}{a\Delta t} > \bar{b} - \bar{a} \quad (a\Delta t > 0) \quad (22)$$

$$\frac{1}{a\Delta t} < \bar{b} - \bar{a} \quad (a\Delta t < 0) \quad (23)$$

となる。条件式(20)は常に満足される。条件式(21)は

$$\frac{e^{a\Delta t} + 1}{e^{a\Delta t} - 1} + \frac{\alpha - 3}{2\bar{b}a\Delta t} > \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \quad (a\Delta t > 0) \quad (24)$$

$$\frac{e^{a\Delta t} + 1}{e^{a\Delta t} - 1} + \frac{\alpha - 3}{2\bar{b}a\Delta t} < \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \quad (a\Delta t < 0) \quad (25)$$

となる。これらの関係式より $a\Delta t$ の数直線上における安定区間について以下の特徴が得られる。

- $\bar{b} \geq \bar{a}$ の時 ... $a\Delta t \rightarrow -\infty$ まで安定
- $\bar{b} < \bar{a}$ の時 ... 下界が存在する ($a\Delta t = \frac{1}{\bar{b} - \bar{a}}$)
- $\frac{\alpha - 3}{2\bar{b}} < -2$ の時 ... 原点近傍が不安定
- 上界は常に存在する

他の制御則についても同様にして安定性の特徴を調べることが出来る。以降では数値的に調べた解析結果を元にこの特徴の確認をし、各公式についてパラメータの影響を述べる。

3.2 各公式における安定領域

パラメータの相対誤差である \bar{a}, \bar{b} を1(つまり誤差を0)、目標軌道算出フィルタのパラメータ α を0に設定し、各種Runge-Kutta法を適用した制御系の安定領域を調べた。ここでは陽的公式として1段1次のEular法、4段4次のRunge-Kutta法を、陰的公式として1段1次の後退Eular法、2段4次のButcherの公式を例に挙げた。尚、一般に用いられるモデル予測制御は1段1次のEular法に相当している。それぞれの安定領域のプロットをFig.1に示す。

制御周期 Δt は常に正なのでグラフの虚軸を境にした右側では a が正、つまり制御対象は不安定な系であり、左半面は a が負、安定な系である。

Eular法を見ると左側に安定領域が広がっており、実軸上では常に安定である。後退Eular法の場合も同様に実軸上では常に安定であり、しかも左半面に安定領域が大きく広がっていることが分かる。Runge-Kutta法ではEular法と比較して虚軸の右側に安定領域がやや大きく広がっていることが分かる。しかし左側の安定限界は有界である。つまり制御パラメータの選定によっては単純なEular法の方がかえって安定となる場合がある。Butcherの公式の場合はRunge-Kutta法と比べて原点近傍に広い安定領域を持つことが分かる。ただしこの場合も安定限界は有界である。

3.3 モデルパラメータ誤差の影響

モデルパラメータの推定値である \bar{a}, \bar{b} には必ず誤差が含まれている。そこで真値に対する相対的な誤差である \bar{a}, \bar{b} が安定性にどのような影響を及ぼすかを考える。

パラメータ \bar{b} を1.0、 α を0に固定して \bar{a} を0.6から1.4まで変化させた時の各公式における安定領域の変化をFig.2に示す。

Eular法では \bar{a} が小さい時安定領域が広がるが \bar{a} が大きくなるにつれて急激に安定領域が狭くな

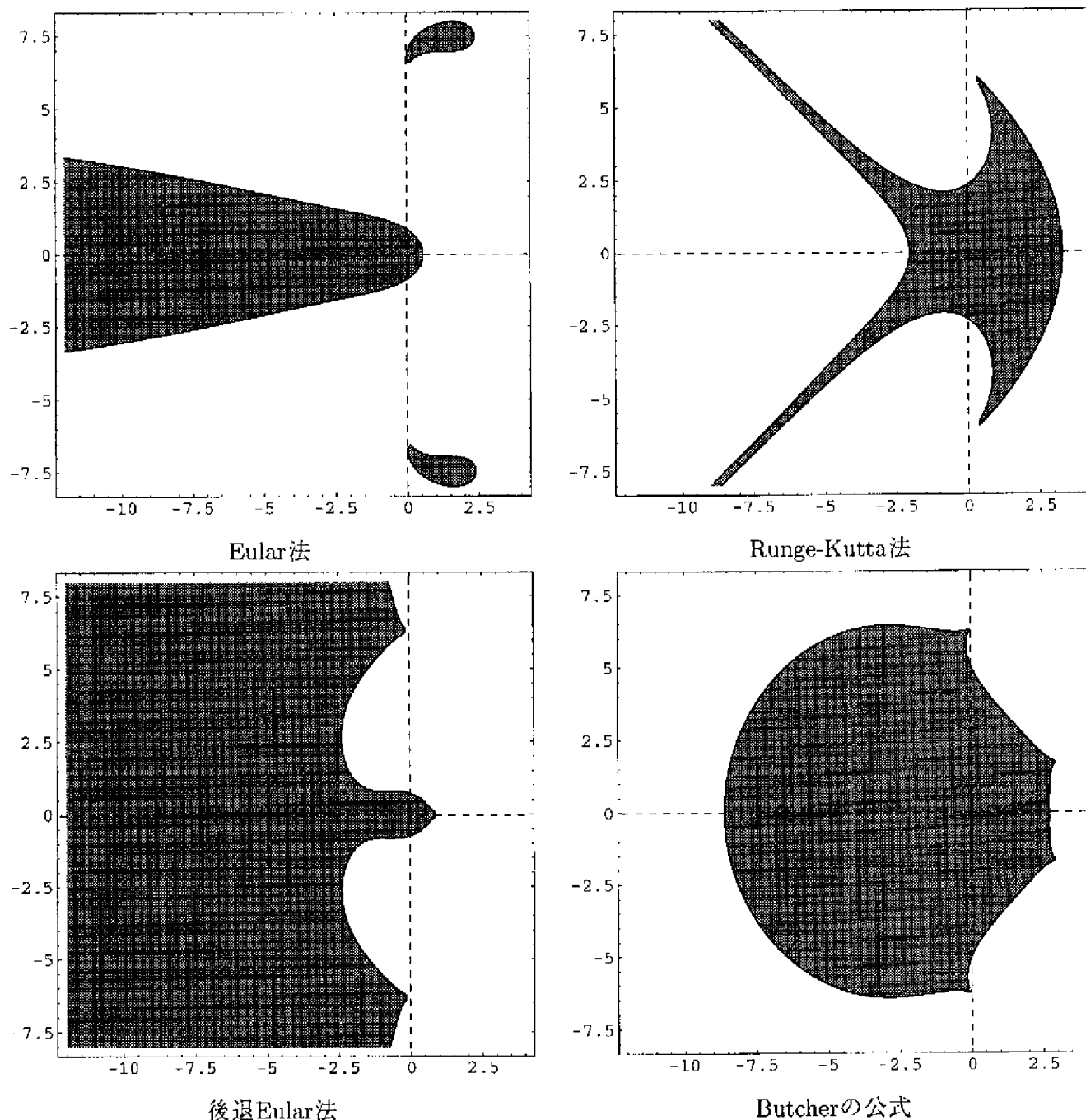


Fig. 1 各公式の安定領域

り安定限界が有界となることが分かる。これは前述の解析結果と一致している。後退Euler法ではこれとは逆に \bar{a} が大きい方が安定領域が広い。 \bar{a} が小さくなると原点近傍の小領域と-側の領域に分かれる。Runge-Kutta法では-側の安定限界点はほぼ一定であるが、誤差があるとき+側の安定領域が狭くなること分かる。Butcherの公式も誤差があるとき+側の安定領域は狭くなるが、-側は \bar{a} が大きくなるにつれ安定領域が広がっていく。

次にパラメータ \bar{a} を1.0, α を0に固定して \bar{b} を0.6から1.4まで変化させた時の安定領域の変化をFig.3

に示す。どの公式においても \bar{b} が小さい時は安定領域が狭く、 \bar{b} が大きくなるにつれて安定領域が広がっていくのが分かる。特に \bar{b} が0.6の時は原点が安定領域に含まれていない。これは制御周期を短くし過ぎると逆に制御が不安定になることを示している。

先ほどの \bar{a} の場合と同様、Euler法と後退Euler法は \bar{b} の変化によって安定領域が急激に変化し、特に \bar{b} が小さい時安定領域が非常に狭くなる。これに対しButcherの公式ではパラメータ誤差の影響を受けにくく、広い安定領域を維持していることが分

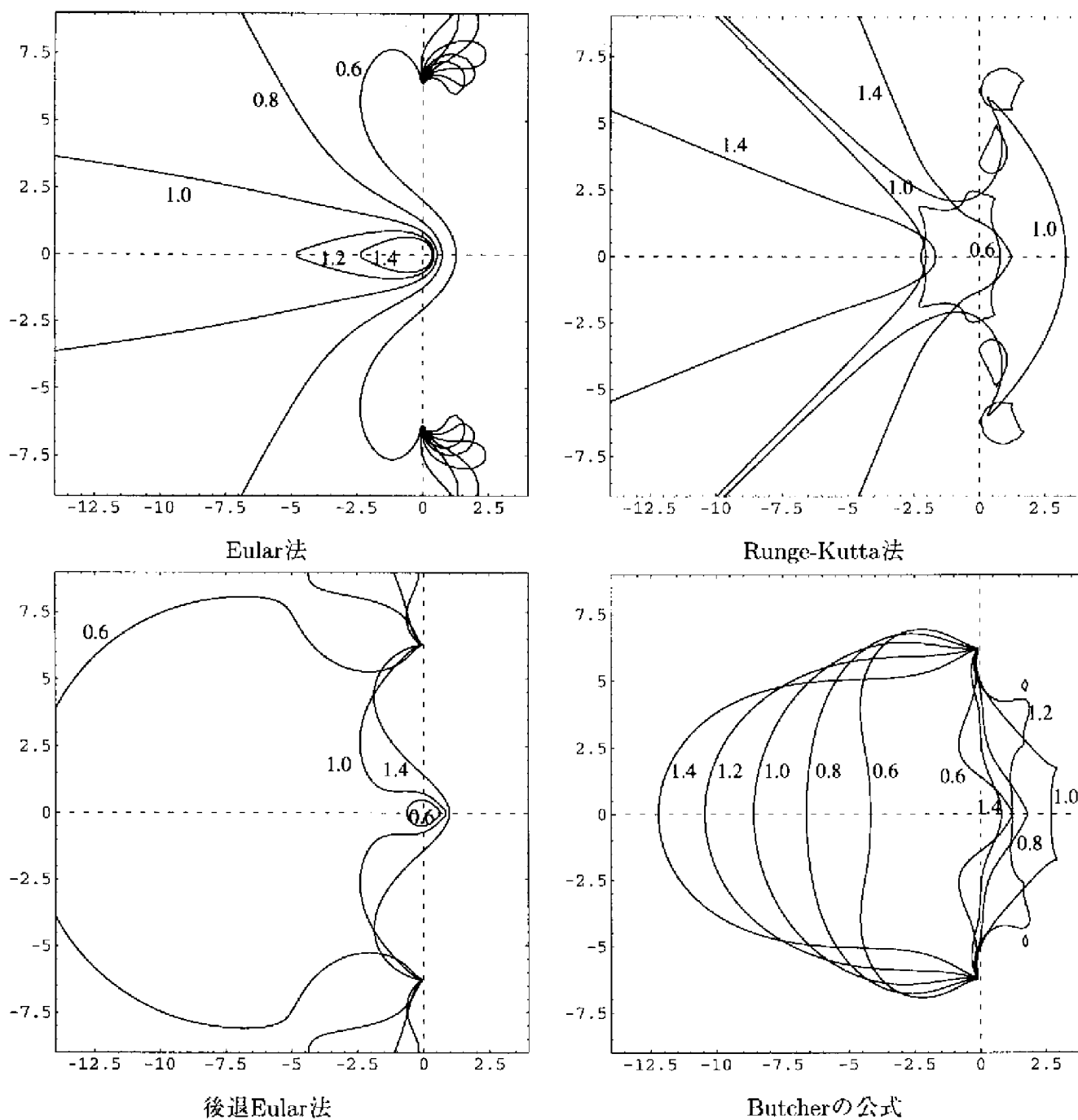


Fig. 2 $\bar{\alpha}$ が安定領域に及ぼす影響

かる。

3.4 目標軌道算出フィルタの効果

目標軌道算出フィルタのパラメータ α は制御の安定性と設定値応答とのトレードオフで決定するパラメータとして知られている。このパラメータが各公式の安定領域及ぼす効果をFig4に示す。

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ を1に固定し、 α を0.0から0.8まで変更してプロットした。 α を大きくしていくとどの公式においても安定領域が広がっていくことが分かる。

4. 結論

前回提案したRunge-Kutta法を用いたモデル予測制御の安定性をAR過程の収束条件を用いて解析した。微分方程式のいくつかの数値解法に適用し対応するモデル予測制御の安定領域の特徴、およびパラメータが安定性に及ぼす効果を調べたところ、一般に誤差が無い $\bar{\beta} = 1$ の時よりも誤差がある $\bar{\beta} > 1$ の方が安定であることが分かった。また制御周期が短すぎると逆に不安定になる場合があることも分かった。今回試した公式の中ではButcherの

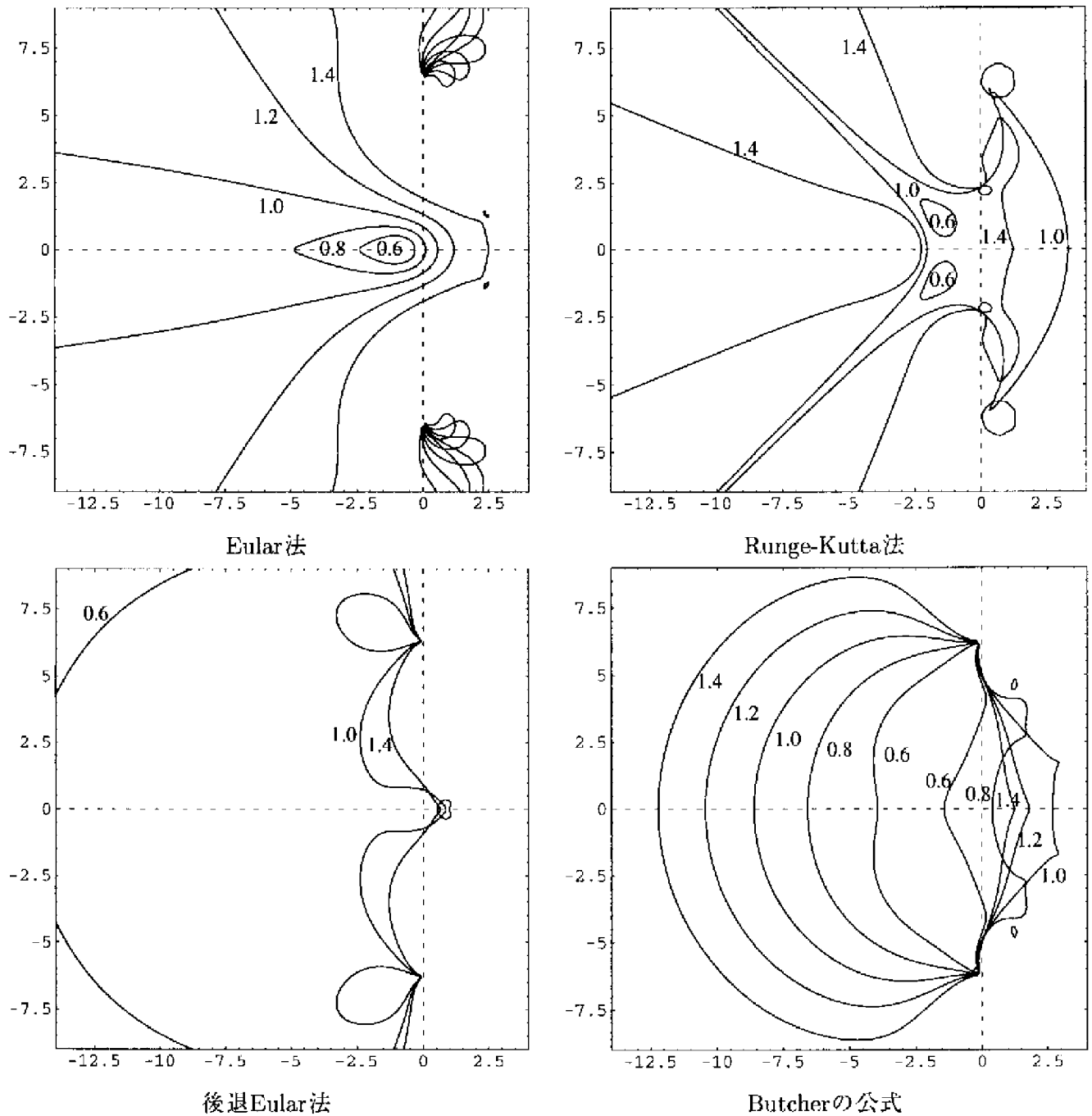


Fig. 3 \bar{b} が安定領域に及ぼす影響

公式がモデル誤差に対して安定領域の変化が小さくロバストであることが分かった。

参考文献

- 1) 鹿内 良将, 能川 幸二郎, 鈴木 睦: 微分方程式の陰的解法を応用したモデル予測制御, 計測自動制御学会東北支部 第188回研究集会, 188-3 (2000)

A-1 制御則の導出法

微分方程式で記述されたモデルに対してRunge-Kutta法を適用して離散化を行うモデル予測制御

を前報で提案した. その概略を紹介する.

段数 p のRunge-Kutta法は微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ が与えられた時, その初期値 y_i と1ステップ先の y_{i+1} との関係を次の式で計算する.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = \mu^T k \quad (26)$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T \quad (27)$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_p)^T \quad (28)$$

ただし

$$k_j = f(x_i + \alpha_j \Delta t, y_i + \beta_{j1} \Delta t k_1 + \dots + \beta_{jp} \Delta t k_p)$$

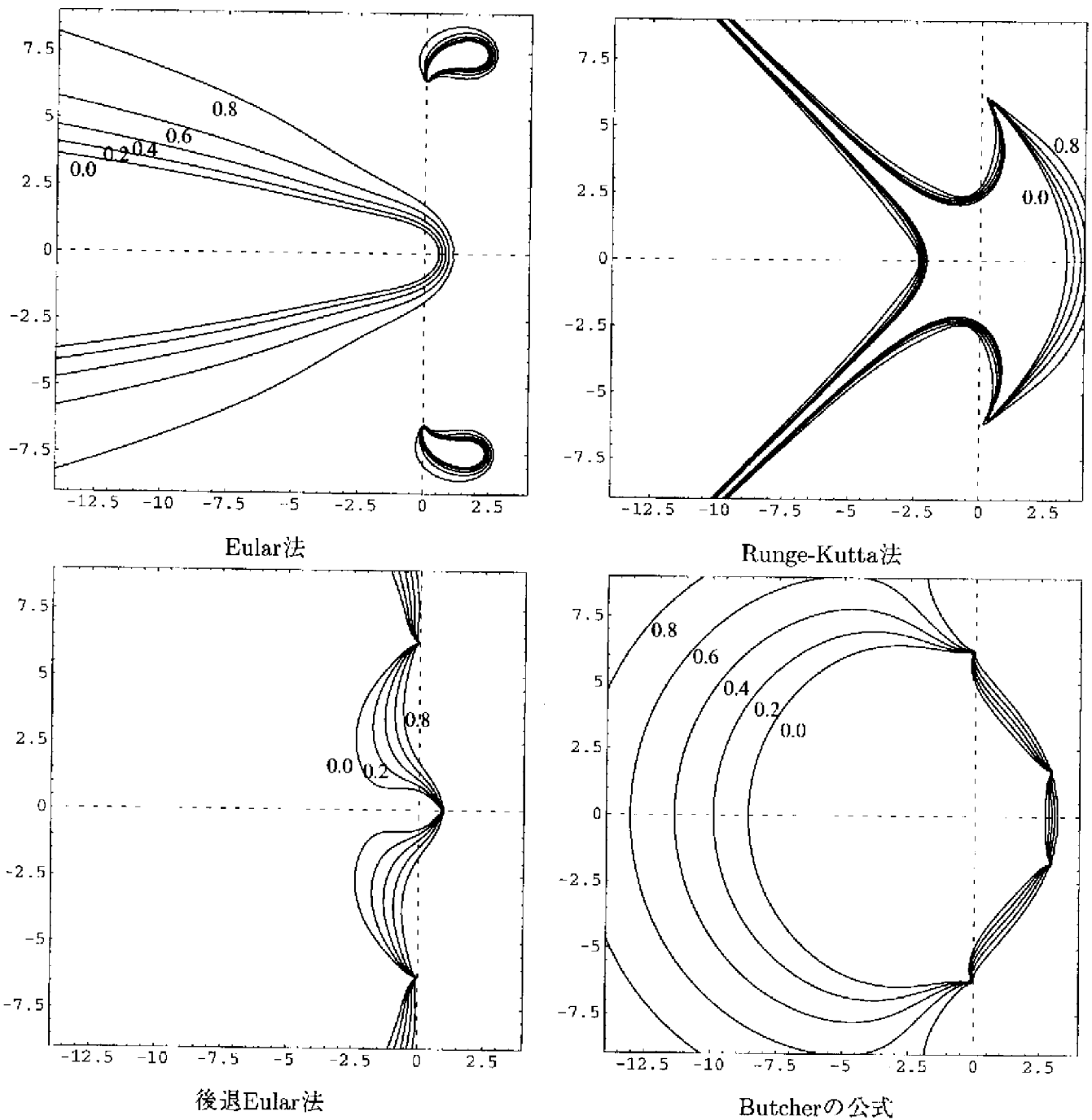


Fig. 4 α が安定領域に及ぼす影響

$$(j = 1, 2, \dots, p) \quad (29)$$

式中の α, β, μ はRunge-Kutta法の公式として与えられている。

1入力1出力系で、相対次数が1次の場合のシステムの微分方程式として次式を考える。

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u; p) \quad (30)$$

モデルパラメータの推定値を \hat{p} とし、誤差を Δp とする。また y, u の各時間ステップ間での変化をそれぞれ $\Delta y, \Delta u$ と定義する。

$$\Delta p = p - \hat{p} \quad (31)$$

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1} \quad (32)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (33)$$

$$\Delta u_{i-1} = u_i - u_{i-1} \quad (34)$$

ステップ i において y_i が観測された時、ステップ $i-1$ から i 、ステップ i から $i+1$ の2区間についてRunge-Kutta法の関係式を適用する。まずステップ $i-1$ から i の間の関係式を考える。式(29)より

$$\begin{aligned} k_j &= f(y_{i-1} + \beta_{j1}\Delta tk_1 + \dots + \beta_{jp}\Delta tk_p, u_{i-1}; p) \\ &= f(y_i - \Delta y_{i-1} + \beta_{j1}\Delta tk_1 + \dots \end{aligned}$$

A-2 各公式の係数と関数M

$$\begin{aligned}
 & +\beta_{jp}\Delta tk_p, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p}) \\
 \approx & f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) - f_y \Delta y_{i-1} \\
 & + f_y \Delta t (\beta_{j1} k_1 + \cdots + \beta_{jp} k_p) + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} \quad (35)
 \end{aligned}$$

ここで f_y は f の y での偏微分, \mathbf{f}_p は f の各パラメータでの偏微分を表すベクトルである.

$k_j (j = 1, 2, \dots, p)$ に関する式(35)が p 本得られるのでこれらを行列を用いてまとめると

$$\begin{bmatrix} 1 - f_y \Delta t \beta_{11} & -f_y \Delta t \beta_{12} & \cdots & -f_y \Delta t \beta_{1p} \\ -f_y \Delta t \beta_{21} & 1 - f_y \Delta t \beta_{22} & \cdots & -f_y \Delta t \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_y \Delta t \beta_{p1} & -f_y \Delta t \beta_{p2} & \cdots & 1 - f_y \Delta t \beta_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

となる. ここで $(p \times p)$ の単位行列を \mathbf{E} , 全成分が1の p 次元ベクトルを \mathbf{e} , β の行列を \mathbf{B} と置いて解くと

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} & = \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) \\
 & + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} - f_y \Delta y_{i-1}\} (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e} \quad (37)
 \end{aligned}$$

この \mathbf{k} と式(26) から以下の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
 \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} & = \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) \\
 & + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} - f_y \Delta y_{i-1}\} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e} \quad (38)
 \end{aligned}$$

次に観測値 y_i から1ステップ後の目標値 y_{i+1} の間に関する関係式を求めると同様にして

$$\begin{aligned}
 \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} & = \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) \\
 & + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} + f_u \Delta u_{i-1}\} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e} \quad (39)
 \end{aligned}$$

となる. ここで式(39)から式(38)を引いて Δu_{i-1} について解くと, パラメータの項が消去されロバストな式

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{i-1} & = \\
 & \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{f_u \Delta t \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e}} - \frac{f_y}{f_u} (y_i - y_{i-1}) \quad (40)
 \end{aligned}$$

が得られる.

Euler法

$$\boldsymbol{\mu} = 1$$

$$\boldsymbol{\beta} = 0$$

$$M = 1$$

後退Euler法

$$\boldsymbol{\mu} = 1$$

$$\boldsymbol{\beta} = 1$$

$$M = \frac{1}{1 - \tilde{a}a\Delta t}$$

Runge-Kutta法

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = 1 + \frac{1}{2} \tilde{a}a\Delta t + \frac{1}{6} (\tilde{a}a\Delta t)^2 + \frac{1}{24} (\tilde{a}a\Delta t)^3$$

Butcherの公式

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \tilde{a}a\Delta t + \frac{1}{12} (\tilde{a}a\Delta t)^2}$$