計測自動制御学会東北支部 第190回研究集会 (2000.10.21)
資料番号 190-14

モデル予測制御アルゴリズムの打ち切り誤差の最小化

Minimization of truncation error of Model Predictive Control

○鹿内良将，能川幸二郎，鈴木睦

○Yoshinobu Shikanai, Koujirou Nogawa and Mutsumi Suzuki

東北大学大学院 工学研究科 化学工学専攻

Department of Chemical Engineering, Tohoku University

キーワード： モデル予測制御 (Model Predicticve Control)，打ち切り誤差 (truncation error)，安定性解析 (stability analysis)，液面制御 (Liquid Level Control)

連絡先： 〒980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉07 東北大学大学院 工学研究科 化学工学専攻 鈴木研究室
鹿内 良将，Tel.: (022)217-7266，Fax.: (022)217-7293，E-mail: shika@pse.che.tohoku.ac.jp

1.　はじめに

現在化学プロセスの制御はコンピュータを利用したデジタル制御が主流となっているが, 計装機器の制約や, コンピュータの演算速度の問題などにより十分に細かい間隔でのサンプリングが出来ない場合が多い. またプロセスには不確定性が存在する為, 完全なモデルを構築することが出来ない.

このような条件で安定かつパラメータの誤差や変動に対してロバストな制御を行う方法として, モデル予測制御の利用が注目されている.

しかし現在利用されているモデル予測制御はインパルス応答モデルやステップ応答モデル, ARXモデルなどの定常点近傍の線形モデルを利用することが多く, 非線形性の強いプロセスや操作領域の広いプロセスでは満足のいく制御結果が得られない場合がある.

これに対し, プロセスの挙動を表現するモデルとして物理モデルを利用する方法が考えられる. 物理モデルは現象論に基づいた微分方程式で記述されるため上述のモデルに比べその構造が理解しやすく, また幅広い操作領域での非線形挙動を記述することが出来る. よって非線形性の強いプロセスや操作領域の広いプロセスの制御には物理モデルを用いたモデル予測制御が有効であると考えられる. ただし物理モデルは連続時間系の微分方程式で記述されるため, モデル予測制御アルゴリズムに適用する為には離散時間系へと変換する必要がある. しかし非線形なモデルをそのまま離散化するのは難しく, 線形化により離散化する従来の方法では離散化における打ち切り誤差が大きくなり, 制御周期を大きくとらざるを得ないプロセスでは打ち切り誤差が無視できなくなって制御系が不安定になる可能性があった.

以前の研究で離散化の際に微分方程式の数値解法であるRunge-Kutta法を利用することで打ち切り誤差を小さくする方法を提案し[1], その安定性についての考察を行った[2]. この場合高次のRunge-

Kutta公式を使えば誤差は小さくなるが, 高次の公式を求めること自体が困難となりそれ以上精度を上げるには限界があった．そもそもRunge-Kutta公式は解こうとする微分方程式をテイラー展開の高次項まで満足するようにして決定されるものである．そこで本報ではプロセス動特性自体のテイラー展開を高次まで満足するような制御則を求めることにより, より長い制御周期において安定となる制御アルゴリズムを提案する．この制御法の安定性を考察し, さらに実際の適用例としてタンクの液面制御プロセスのシミュレーションを行い, 本手法の制御性能および安定性, ロバスト性の検証を行う．

2. 制御則の導出

制御対象プロセスは1入力1出力, 相対次数1次の物理モデルで記述できるものとするとプロセスのモデルは一般形として次の非線形微分方程式で記述できる．

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u; \boldsymbol{p}) \tag{1}$$

ここでyは出力(被制御変数), uは入力(操作変数), $\boldsymbol{p}$はモデルパラメータのベクトルである．

モデル予測制御では未来の制御ステップにおける目標値を定め, その目標値に到達するための操作量をモデルより計算しプロセスへと適用する．モデルが式(1)のような連続時間の微分方程式で与えられる場合には, 離散時間モデルへと変換する必要がある.従来の方法ではTaylor展開を有限の次数で打ち切ることで近似していたが, ここでは無限の次数まで展開することを考える．

現時刻における観測値をy_k, 次のステップにおける目標値y_{k+1}として出力yを現時刻においてテイラー展開をすると

$$y_{k+1} = y_k + \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots \tag{2}$$

となり,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\Delta t}{2!} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{\Delta t^2}{3!} + \cdots \tag{3}$$

となる．ここで各制御区間における操作変数uを零次ホールドとすると$\frac{du}{dt} = 0$なので,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f f_y \\ \frac{d^3y}{dt^3} &= f f_y^2 + f^2 f_{yy} \\ &\vdots \end{aligned}$$

となる．

式(3)の右辺をFと置くとFはy , u , $\boldsymbol{p}$ の関数となる．つまり時刻k〜$k+1$, $k-1$〜kにおけるFはそれぞれ

$$F(y_k, u_k; \boldsymbol{p}) = F(y_k, u_{k-1} + \Delta u; \hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Delta p}) \tag{4}$$

$$F(y_{k-1}, u_{k-1}; \boldsymbol{p}) = F(y_k + \Delta y, u_{k-1}; \hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Delta p}) \tag{5}$$

である.ここで$\Delta u (= u_k - u_{k-1})$は入力の変化量, $\Delta y (= y_{k-1} - y_k)$は出力の変化量, $\hat{\boldsymbol{p}}$ はパラメータの推定値, $\boldsymbol{\Delta p}$はパラメータの推定誤差を表している．

これらの式(4)(5)をそれぞれΔu, Δy でテイラー展開すると,

$$F(y_k, u_{k-1} + \Delta u; \hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Delta p}) = F(y_k, u_{k-1}; \hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Delta p}) + F_u \Delta u + F_{uu}\frac{\Delta u^2}{2!} + \cdots \tag{6}$$

$$F(y_k + \Delta y, u_{k-1}; \hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Delta p}) = F(y_k, u_{k-1}; \hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Delta p}) + F_y \Delta y + F_{yy}\frac{\Delta y^2}{2!} + \cdots \tag{7}$$

となる．

さて, 式(6)式(7)の由来を考えてみると, 式(6) は式(3)の右辺, 式(7)は$k-1$〜kについての式の右辺であった．したがってその差をとると

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} - \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t} = F_u \Delta u + F_{uu}\frac{\Delta u^2}{2!} + \cdots - F_y \Delta y - F_{yy}\frac{\Delta y^2}{2!} - \cdots \tag{8}$$

となってΔuについて解くと入力すべき操作変数が得られる. (6)(7)両式の第一項にはパラメータ誤差$\boldsymbol{\Delta p}$が含まれているが, 引くことで相殺されるためこの制御法はパラメータ誤差に対してロバストである.$F_u, F_{uu}, \cdots$, $F_y, F_{yy}, \cdots$, 中にも$\boldsymbol{\Delta p}$がクロス項として残っているが, 主要項は引き算で相殺されているのでパラメータ誤差に対してかなりロバストである.

特にモデル(1)が次式のような線形, または観測点近傍において線形近似できる場合は制御則を簡単に導くことができる.

$$\frac{dy}{dt} = ay + bu \tag{9}$$

この式ではfのyについての高次微分が0となるので式(3)は簡単になり,

$$F = f \times \left(1 + \frac{fy\Delta t}{2!} + \frac{(fy\Delta t)^2}{3!} + \frac{(fy\Delta t)^3}{4!} + \cdots\right) \tag{10}$$

となる.この級数は次の関数に書き改める事が出来る.

$$F = f \times \frac{e^{f_y \Delta t} - 1}{f_y \Delta t} \tag{11}$$

さらにf_{yy}, f_{yu}が0になるので

$$F_u = f_u \frac{e^{f_y \Delta t} - 1}{f_y \Delta t} \tag{12}$$

$$F_y = f_y \frac{e^{f_y \Delta t} - 1}{f_y \Delta t} \tag{13}$$

$$F_{uu} = F_{uuu} = \cdots = 0 \tag{14}$$

$$F_{yy} = F_{yyy} = \cdots = 0 \tag{15}$$

となり, 式(8)をΔuについて解くと

$$\Delta u = \frac{f_y}{f_u} \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{e^{f_y \Delta t} - 1} + \frac{f_y}{f_u}(y_{k-1} - y_k) \tag{16}$$

を得る.このようにプロセスが線形の場合には打ち切り誤差が0になるようなモデル予測制御式が導かれた. 分母に$e^{f_y \Delta t} - 1$の項が現れる点が前報と比較して本報の大きな特徴であり, この項の故に安定性が増大する.

3. 安定性の考察

本制御法の特徴はプロセスの動的挙動を表すモデルを離散時間系に変換する際に時間について無限次まで展開していることにある. つまりこの制御法は従来のモデル予測制御アルゴリズムに対してより長い制御周期において安定であると考えられる.

以前の研究でAR過程の安定条件を用いたモデル予測制御の安定性解析法を提案した[2]. この安定性解析法では, テストシステムとして式(17)に示す線形システムを考える.

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u; a, b) = ay + bu \tag{17}$$

yが入力, uが出力, a, bがモデルパラメータである. このシステムに対しパラメータの推定値をそれぞれ$\hat{a}$, $\hat{b}$としてモデル予測制御アルゴリズムを適用した時の安定条件をAR過程の安定条件から導いた.この解析法からパラメータの相対推定誤差$\hat{a}/a$, $\hat{b}/b$が安定性に及ぼす影響を制御周期$a\Delta t$の複素平面上にプロットする事ができる.

$\hat{a}/a$, $\hat{b}/b$のうち片方を1に固定し, もう一方を変化させ解析を行った. 今回提案するアルゴリズムのほかに比較として, 従来法である相対次数でTaylor展開を打ち切る方法, 以前に提案したRunge-Kutta法を用いる方法についても解析を行った.Runge-Kutta法を用いる制御では任意のRunge-Kutta法の公式を利用するとこが出来るが, 前回最もよい成績を示した2段4次の陰的公式であるButcherの公式を用いた.

従来法を用いた場合の制御の安定限界に及ぼす$\hat{a}/a$の影響をFig.1に, $\hat{b}/b$の影響をFig.2に示す. これらのプロットは制御周期$a\Delta t$の複素平面にとったもので, 虚軸の右半面ではaが正でありテストシステム(17)は不安定系, 左半面はaが負でシステムは安定系である. Fig.1を見ると$\hat{a}/a$が小さいときは左半面に安定領域が広がっている. つまりaが負の安定系の場合には制御周期を無限大まで大きく

とっても制御は安定する. しかし$\hat{a}/a$が大きくなるにつれ安定領域が狭まり, プロセス自体は安定であっても制御を加えた系全体としての安定範囲は小さな領域に閉じてしまう. Fig.2を見ると$\hat{b}/b$が大きい時は安定領域が左に広がっているが, 小さくなると同様に小領域に閉じてしまう.安定限界はパラメータ誤差に敏感で, 制御周期が長い時は不安定になる可能性がある.

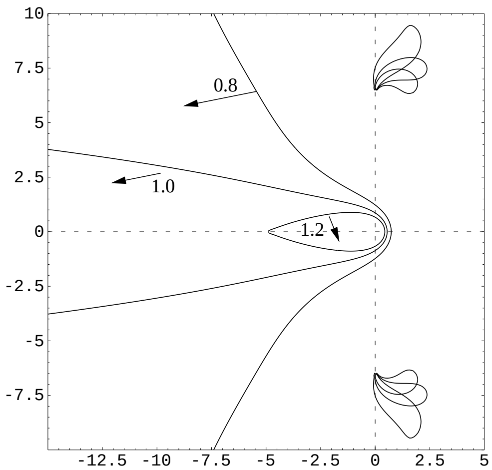

Fig. 1　従来法の安定限界($\hat{a}/a$の影響)

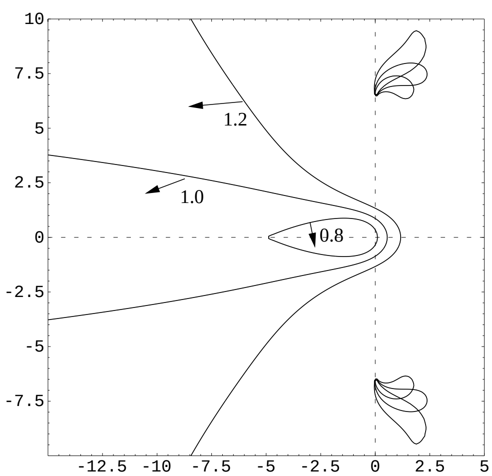

Fig. 2　従来法の安定限界($\hat{b}/b$の影響)

Runge-Kutta法を用いた制御における安定限界のプロットをFig3, Fig.4に示す. この場合は, 常に安定領域が閉じているが, パラメータ誤差の影響を受けにくく原点近傍にある程度の安定領域を保っていることが分かる.

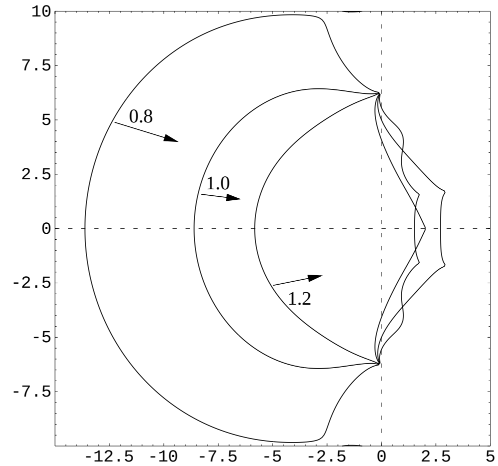

Fig. 3　Runge-Kutta法の安定限界($\hat{a}/a$の影響)

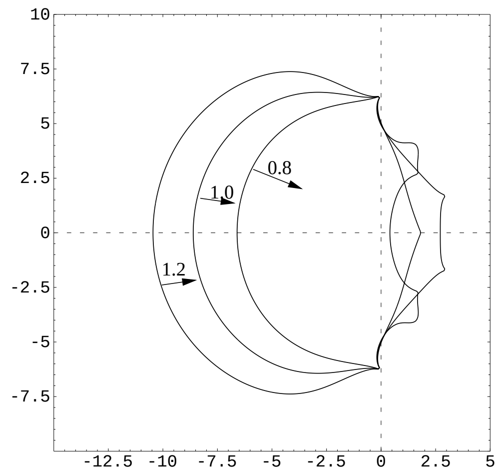

Fig. 4　Runge-Kutta法の安定限界($\hat{b}/b$の影響)

つぎに本手法を用いた時の安定領域をFig.5, Fig.6に示す. どちらの場合も安定領域は左側に開いてる. 特にパラメータに誤差がない場合は安定領域が右側にも開いている. このような場合は制御周期を無限大まで大きくしても制御は安定する.

4.　タンクの液面制御

4.1　設定

Fig.7に示すタンクの液面制御プロセスを例としてシミュレーションを行い, 本手法の制御性能と安定性の考察を行う.

このプロセスのモデルは収支をとることにより

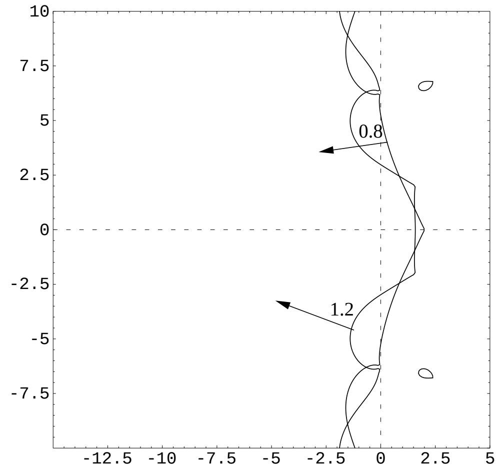

Fig. 5　本手法の安定限界($\hat{a}/a$の影響)

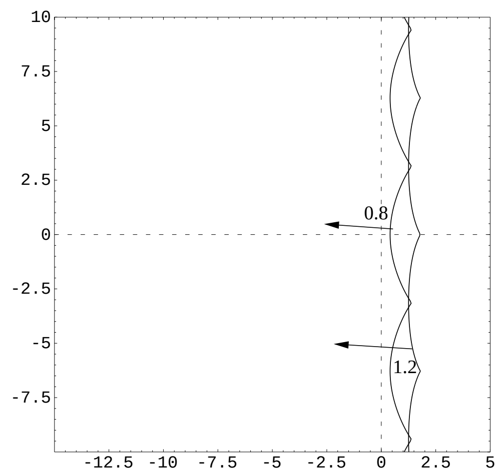

Fig. 6　本手法の安定限界($\hat{b}/b$の影響)

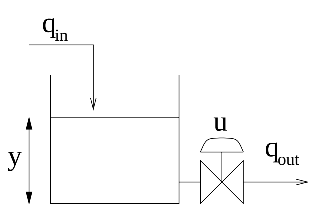

Fig. 7　液面制御プロセス

以下の微分方程式で記述できる.

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u; \boldsymbol{p}) = \frac{1}{A}\left(q_{in} - q_{out}\right) \tag{18}$$

$$q_{out} = c\, a_0^{1-u}\sqrt{y} \tag{19}$$

この式における入力uはバルブ開度, 出力yは液レベルであり, それぞれについて非線形である. この微分方程式をそれぞれyとuで偏微分して以下の式を得る.

$$f_y = \frac{-ca_0^{1-u}}{2A\sqrt{y}} \tag{20}$$

$$f_u = \frac{c}{A}a_0^{1-u}ln(a_0)\sqrt{y} \tag{21}$$

また1ステップ先の目標値は次式のように設定値y^*と現在の観測値との重み付き平均から定めた.

$$y_{k+1} = (1-\alpha)y^* + \alpha y_k \tag{22}$$

αは設定値への収束の速さと制御の安定性の兼ね合いで決める重みである. ここではαを0.5とした. 測定可能変数は液レベルのみとし, その他の変数はパラメータとして扱い、それぞれTable.1 のように設定した.

Table 1　Parameters

parameter		value	
バルブ定数	c	0.003	[-]
漏洩定数	a_0	0.12	[-]
断面積	A	0.03	$[m^2]$

式(20)(21)(22)を式(16)に代入して制御を行う.

開始から500秒後に外乱として流入流量を0.0012から0.0015に, 3000秒後に液レベルの設定値を0.3から0.5に変更した.

比較として先ほどと同様に従来法とRunge-Kutta法を利用した制御のシミュレーションも同時に行った. Runge-Kutta法を使用する場合には2段4次の陰的公式であるButcherの公式を用いた.

4.2　制御周期の影響

制御周期が制御性能および安定性に及ぼす影響を調べるため, Δtを10, 60, 240と変えてシミュレーションを行った.それぞれの結果をFig.8, Fig.9, Fig.10 に示す.

制御周期Δtを10秒としたときは制御周期が十分短い為どの制御法でも満足な制御結果が得られている.

制御周期を60秒としたときは従来法は設定値に収束していくが, オーバーシュートを繰り返しており満足のいく制御結果は得られなかった. これに対しRunge-Kutta法を用いた制御と本手法では設定値に速やかに収束している.

制御周期を240秒としたときは従来法もRunge-Kutta法を利用した制御も振動的となり実用的ではなくなっているが, 本手法では設定値へときれいに収束しており長い制御周期でも安定であることが分かる.

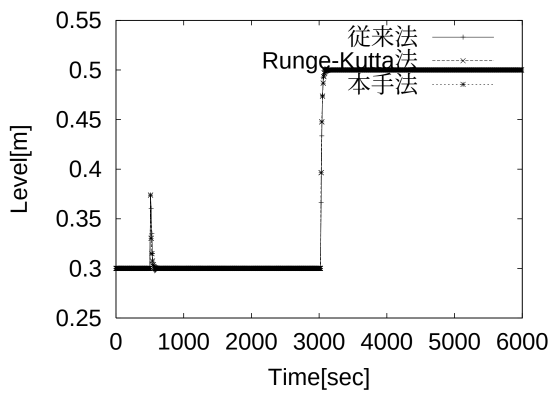

Fig. 8 $\Delta t = 10$

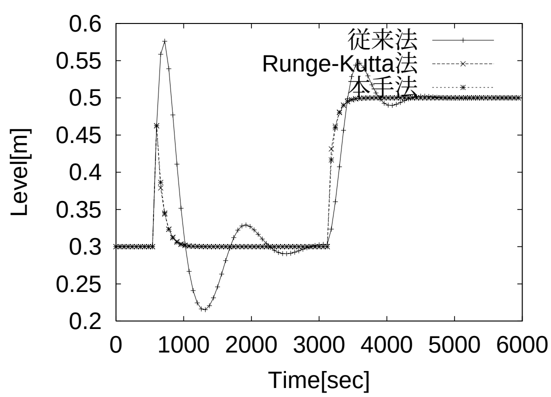

Fig. 9 $\Delta t = 60$

4.3 パラメータ誤差の影響

プロセスモデルには必ず誤差が含まれているため, モデルベースの制御を行う際にはモデル誤差に対するロバスト性が要求される.そこで制御に利用するモデルのパラメータに故意に誤差を与えて

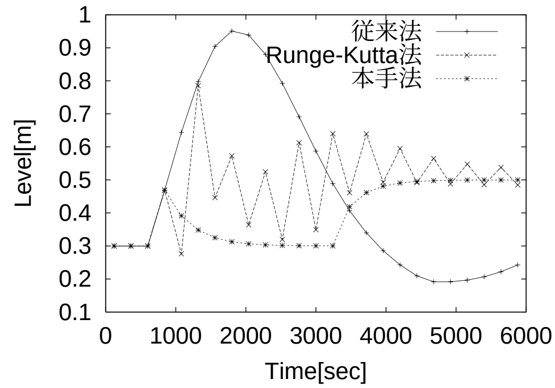

Fig. 10 $\Delta t = 240$

シミュレーションを行った.

バルブ定数cの真値を0.0030, 推定値を0.0085とした時のシミュレーション結果をFig.11に示す.

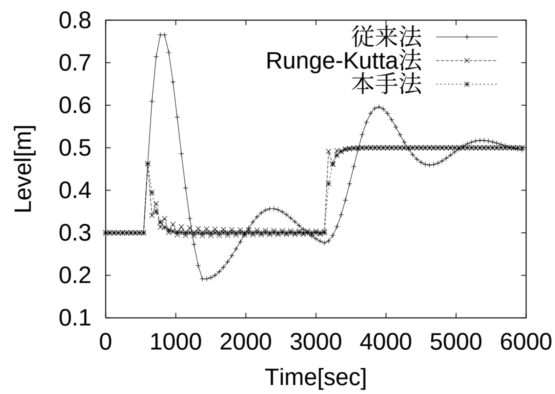

Fig. 11 バルブ定数に誤差がある場合($\Delta t = 60$)

従来法では大きくオーバーシュートを生じ, またRunge-Kutta法による制御では細かい振動が生じているが, 本手法では問題なく制御が行われている.

次に漏洩定数の真値を0.12, 推定値を0.4とした時のシミュレーション結果をFig.12に示す.

この場合も本手法では問題なく制御が行われるが, ほかの手法では振動を生じている.

5. 結論

長い制御周期をとっても安定な制御法として, 物理モデルを用いたモデル予測制御に無限次までのTaylor展開を応用して打ち切り誤差を最小にする

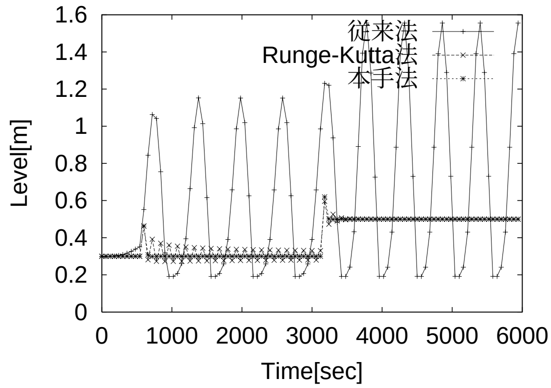

Fig. 12　漏洩定数に誤差がある場合($\Delta t = 60$)

方法を提案した．この制御法の安定性を調べたところ長い制御周期に対し非常に安定であり，またパラメータ誤差の影響を受けにくいことが分かった．本手法をタンクの液面制御のシミュレーションで検証し，制御周期に対する安定性およびパラメータ誤差に対するロバスト性を確認した．

参考文献

1) 鹿内 良将，能川 幸二郎，鈴木 睦: 微分方程式の陰的解法を応用したモデル予測制御，計測自動制御学会東北支部 第188回研究集会，188-3 (2000)

2) 鹿内 良将，能川 幸二郎，鈴木 睦: 微分方程式の数値解法を応用したモデル予測制御の安定性解析，計測自動制御学会東北支部 第189回研究集会，189-13 (2000)