

## ニューラルネットワークによる非線形系の安定化制御

## Stabilizing Control of Nonlinear System Using Neural Network

宮崎直樹<sup>É</sup>, 大久保重紀<sup>ÉÉ</sup>,Naoki Miyazaki<sup>É</sup>, Sigenori Okubo<sup>ÉÉ</sup>,

山形大学

Yamagata University

キーワード： バックプロパゲーション (Back propagation), ニューラルネットワーク (Neural network),  
非線形系 (Nonlinear system),

連絡先： 〒 992 山形県米沢市城南 4-3-16 山形大学 理工学研究科 機械システム工学専攻 大久保研究室  
宮崎直樹, Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)26-3246,

## 1. 結論

非線形を含む複雑な制御対象に対し、バックプロパゲーションによるニューラルネットワークをオンラインで適応的に学習させることにより、状態をゼロに収束させる制御系の設計を考察する。評価関数を状態変数の 2 次形式で与えこれを最小にするように教師信号なしで学習を行う。さらにアルゴリズムを連続時間に変換し、その有効性を検証する。

## 2. NN の構成

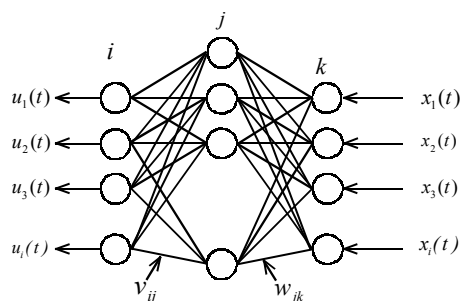


Fig:1 Neural network with the structure of three layers

非線形系に対して Fig:1 のような 3 層ニューラルネットワークを使い、系を安定にする制御系を設計する。

ここで、重みと各層の入出力関係はつぎのように与えられる。

$$U(t) = W(t)x(t) + \hat{i}(t) \quad (1)$$

$$H(t) = \text{diag}[f(U(t))] \quad (2)$$

$$S(t) = V(t)H(t) + \hat{c}(t) \quad (3)$$

$$u(t) = \text{diag}[f(S(t))] \quad (4)$$

$f(x)$  はニューロンの入出力特性であり、(5) 式で与えられるものとする。また、 $f^0(x)$  は (6) 式のようなになる。

$$f(x) = L \tanh\left(\frac{x}{u_0}\right) \quad (5)$$

$$f^0(x) = \frac{1}{Lu_0} (L^2 \ddot{A} f(x)^2) \quad (6)$$

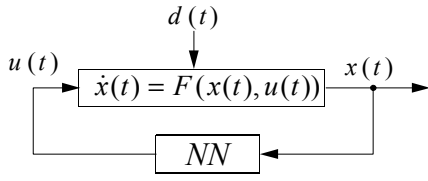


Fig:2 Block diagram of control system by neural network

$$\dot{x}(t) = F(x(t); u(t)) + d(t) \quad (7)$$

$h > 0$  を微小にとれば、(7) 式は次のようになる。

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} fF(x(\tau); u(\tau)) + d(\tau) d\tau \quad (8)$$

平均値の定理より、( $0 < \tau_a < 1$ )

$$x(t+h) = x(t) + hF(x(t+\tau_a h); u(t+\tau_a h)) + hd(t+\tau_a h) \quad (9)$$

評価関数を (10) 式のようにおき、 $E(t)$  を最小にする制御則を求める。ただし、 $Q = Q^T > 0$  とする。

$$E(t+h) = \frac{1}{2} x^T(t+h) Q x(t+h) \quad (10)$$

各重み、オフセットの更新量は、最急降下法を用いて次のように表わせる。(  $\bar{a}$ 、  $\hat{a}$  は学習係数 )

$$\dot{\bar{a}}(t) = -\hat{a} \left( \frac{\partial E(t)}{\partial \bar{a}(t)} \right) \quad (11)$$

$$\dot{\bar{c}}(t) = -\hat{a} \left( \frac{\partial E(t)}{\partial \bar{c}(t)} \right) \quad (12)$$

$$\dot{\bar{v}}(t) = -\hat{a} \left( \frac{\partial E(t)}{\partial \bar{v}(t)} \right) \quad (13)$$

$$= -\hat{a} \left\{ \frac{\partial (E(t+h) - E(t))}{\partial x(t+h)} \frac{\partial x^T(t+h)}{\partial u(t+\tau_a h)} \right.$$

$$\left. \frac{\partial u^T(t+\tau_a h)}{\partial u(t)} \frac{\partial u^T(t)}{\partial S(t)} \frac{\partial S^T(t)}{\partial V(t)} \right\} \quad (14)$$

$$\dot{\bar{w}}(t) = -\hat{a} \left( \frac{\partial E(t)}{\partial \bar{w}(t)} \right) \quad (15)$$

$$= W(t+h) - W(t)$$

$$= -\hat{a} \left\{ \frac{\partial (E(t+h) - E(t))}{\partial x(t+h)} \right.$$

$$\left. \frac{\partial x^T(t+h)}{\partial u(t+\tau_a h)} \frac{\partial u^T(t+\tau_a h)}{\partial u(t)} \frac{\partial u^T(t)}{\partial S(t)} \right.$$

$$\left. \frac{\partial S^T(t)}{\partial H(t)} \frac{\partial H^T(t)}{\partial U(t)} \frac{\partial U^T(t)}{\partial W(t)} \right\} \quad (16)$$

(14) 式、(16) 式内の各要素は以下の通りである。

$$\frac{\partial E(t+h)}{\partial x(t+h)} = x(t+h) Q \quad (17)$$

$$\frac{\partial E(t)}{\partial x(t+h)} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial x^T(t+h)}{\partial u(t+\hat{t}_ah)} = h \frac{\partial F^T(x(t+\hat{t}_ah); u(t+\hat{t}_ah))}{\partial u(t+\hat{t}_ah)} \quad (19)$$

$$\frac{\partial u^T(t)}{\partial S(t)} = \frac{1}{Lu_0} \text{diag}[L^2 \ddot{A} u^2(t)] \quad (20)$$

$$\frac{\partial S^T(t)}{\partial H(t)} = V^T(t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial S^T(t)}{\partial V(t)} = H^T(t) \quad (22)$$

$$\frac{\partial S(t)}{\partial \zeta(t)} = I \quad (23)$$

$$\frac{\partial U(t)}{\partial \hat{t}(t)} = I \quad (24)$$

$$\frac{\partial H^T(t)}{\partial U(t)} = \frac{1}{Lu_0} \text{diag}[L^2 \ddot{A} H^2(t)] \quad (25)$$

$$\frac{\partial U^T(t)}{\partial W(t)} = x^T(t) \quad (26)$$

ここで、(16) 式を  $h$  で割って両辺の極限をとると、更新値  $W(t)$  が得られる。

$$\begin{aligned} W(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h} \\ &= \ddot{A} \frac{\ddot{a}}{u_0^2 L^2} \text{diag}[L^2 \ddot{A} H^2(t)] V^T(t) \\ &\quad \zeta \text{diag}[L^2 \ddot{A} u^2(t)] \frac{\partial F^T(x(t); u(t))}{\partial u(t)} \\ &\quad \zeta Q x(t) x^T(t) \end{aligned} \quad (27)$$

同様にして、 $V(t)$ 、 $\hat{t}(t)$ 、 $\zeta(t)$  を求める。

$$V(t) = \ddot{A} \frac{\ddot{a}}{u_0 L} \text{diag}[L^2 \ddot{A} u^2(t)]$$

$$\zeta \frac{\partial F^T(x(t); u(t))}{\partial u(t)} Q x(t) H^T(t) \quad (28)$$

$$\hat{t}(t) = \ddot{A} \frac{\ddot{a}}{u_0^2 L^2} \text{diag}[L^2 \ddot{A} H^2(t)] V^T(t)$$

$$\begin{aligned} &\zeta \text{diag}[L^2 \ddot{A} u^2(t)] \frac{\partial F^T(x(t); u(t))}{\partial u(t)} \\ &\zeta Q x(t) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \ddot{A} \frac{\ddot{a}}{u_0 L} \text{diag}[L^2 \ddot{A} u^2(t)] \\ &\zeta \frac{\partial F^T(x(t); u(t))}{\partial u(t)} Q x(t) \end{aligned} \quad (30)$$

以上の状態方程式を連立させれば NN による安定化制御系の全方程式がつぎのように得られる。

$$\dot{x}(t) = F(x(t); u(t)) + d(t) \quad (31)$$

$$f(x) = L \tanh\left(\frac{x}{u_0}\right) \quad (32)$$

$$U(t) = W(t)x(t) + \hat{t}(t) \quad (33)$$

$$H(t) = \text{diag}[f]U(t) \quad (34)$$

$$S(t) = V(t)H(t) + \zeta(t) \quad (35)$$

$$u(t) = \text{diag}[f]S(t) \quad (36)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{1}{Lu_0} \text{diag}[L^2 \ddot{u}^2(t)]$$

$$\zeta \frac{\partial F^T(x(t); u(t))}{\partial u(t)} Qx(t) \quad (37)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{1}{Lu_0} \text{diag}[L^2 \ddot{H}^2(t)] V^T(t) \ddot{\alpha}(t) \quad (38)$$

$$W(t) = \ddot{A} \ddot{\alpha}(t) x^T(t) \quad (39)$$

$$\dot{r}(t) = \ddot{A} \ddot{\alpha}(t) \quad (40)$$

$$V(t) = \ddot{A} \ddot{\alpha}(t) H^T(t) \quad (41)$$

$$\ddot{c}(t) = \ddot{A} \ddot{\alpha}(t) \quad (42)$$

### 3 . 単倒立振り子

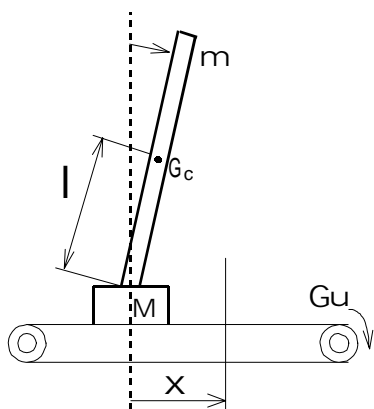


Fig.3 Single inverted pendulum

各パラメータを以下のように示す。

M[kg]	台車の質量
m[kg]	振り子の質量
G[N=V]	トルク / 電圧変換係数
F[kg=s]	台車の等価摩擦係数
C[kg m=s]	軸の粘性摩擦係数
l[m]	振り子の重心までの距離
g[m=s <sup>2</sup> ]	重力加速度
J[kgm]	振り子の慣性モーメント

倒立振り子の運動方程式は (43) 式のようなになるので、

$$(M + m)\ddot{x} + ml\dot{x}^2 \cos x_1 + F\ddot{x} - ml\dot{x}^2 \sin x_1 = Gu$$

$$ml\dot{x}^2 \cos x_1 + (J + ml^2)\ddot{\theta} + C\dot{\theta} - mgl \sin x_1 = 0 \quad (43)$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (44)$$

(44) 式のように  $x_1 = x$ 、 $x_2 = \dot{x}$ 、 $x_3 = x$ 、 $x_4 = \dot{\theta}$  とおくと、倒立振り子の方程式は (45) 式となる。

$$(M + m)x_3 + mlx_4 \cos x_2 + Fx_3 - mlx_4^2 \sin x_2 = Gu$$

$$mlx_3 \cos x_2 + (J + ml^2)x_4 + Cx_4 - mgl \sin x_2 = 0 \quad (45)$$

そして、(45) 式を  $x_3$ 、 $x_4$  について解いていく。

$$\begin{bmatrix} (M + m) & ml \cos x_2 \\ ml \cos x_2 & (J + ml^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Gu - Fx_3 + mlx_4^2 \sin x_2 \\ -Cx_4 + mgl \sin x_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$d = (M + m)(J + ml^2) - (ml \cos x_2)^2$  とすると、

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J + ml^2)=d & -ml \cos x_2=d \\ -ml \cos x_2=d & (M + m)=d \\ Gu - Fx_3 + mlx_4^2 \sin x_2 \\ -Cx_4 + mgl \sin x_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\ddot{x}_3 = (J + ml^2)(Gu \ddot{\alpha} F x_3 + mlx_4^2 \sin x_2) = d + (\ddot{\alpha} ml \cos x_2)(\ddot{C}x_4 + mg \sin x_2) = d \quad (48)$$

$$\ddot{x}_4 = (\ddot{\alpha} ml \cos x_2)(Gu \ddot{\alpha} F x_3 + mlx_4^2 \sin x_2) = d + (M + m)(\ddot{C}x_4 + mg \sin x_2) = d \quad (49)$$

よって、(50) 式が成り立つので、NNの入力更新値は(51)式から(54)式となる。

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1(t); u_1(t)) + d_1(t) \\ F_2(x_2(t); u_2(t)) + d_2(t) \\ F_3(x_3(t); u_3(t)) + d_3(t) \\ F_4(x_4(t); u_4(t)) + d_4(t) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$x_1(t) = x_3(t) \quad (51)$$

$$x_2(t) = x_4(t) \quad (52)$$

$$x_3(t) =$$

$$(J + ml^2)(Gu \ddot{\alpha} F x_3(t) + mlx_4(t)^2 \sin x_2(t)) = d + (\ddot{\alpha} ml \cos x_2(t))(\ddot{C}x_4(t) + mg \sin x_2(t)) = d \quad (53)$$

$$x_4(t) =$$

$$(\ddot{\alpha} ml \cos x_2(t))(Gu \ddot{\alpha} F x_3(t) + mlx_4(t)^2 \sin x_2(t)) = d + (M + m)(\ddot{C}x_4(t) + mg \sin x_2(t)) = d \quad (54)$$

また、 $\frac{\partial F(x(t); u(t))}{\partial u(t)}$  は(55)式となる。

$$\frac{\partial F(x(t); u(t))}{\partial u(t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G(J + ml^2) = d \\ G(\ddot{\alpha} ml \cos x_2) = d \end{bmatrix} \quad (55)$$

#### 4 . シミュレ - ション

以下のような条件でシミュレ - ションをおこなった。

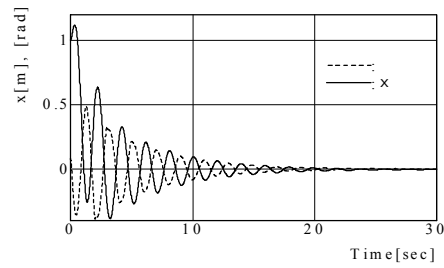


Fig:4 Response of x and  $\dot{\alpha}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
初期角度  $\dot{\alpha} = 5:0$  [deg]  
外乱なし

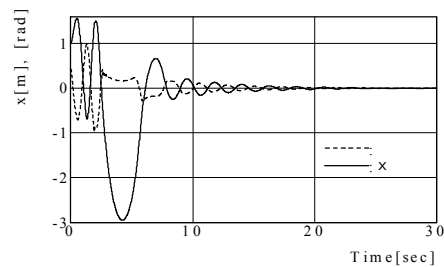


Fig:5 Response of x and  $\dot{\alpha}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
初期角度  $\dot{\alpha} = 25:0$  [deg]  
外乱なし

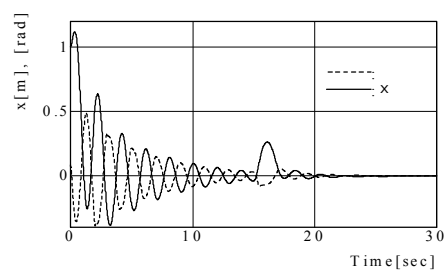


Fig:6 Response of x and  $\dot{\alpha}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
初期角度  $\dot{\alpha} = 5:0$  [deg]  
外乱あり  $d_3(t) = 1:0$  (0:5 秒間)

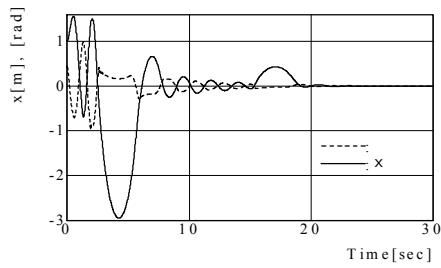


Fig:7 Response of  $x$  and  $\dot{i}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 25:0$  [deg]  
 外乱あり  $d_3(t) = 1:0$  (0:5 秒間)

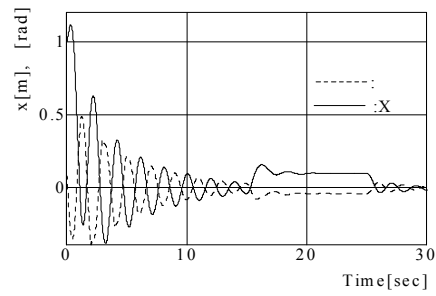


Fig:10 Response of  $x$  and  $\dot{i}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 5:0$  [deg]  
 外乱あり  $d_3(t) = 0:3$  (10 秒間)

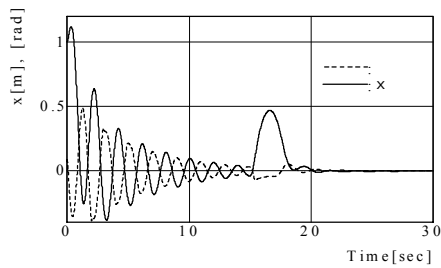


Fig:8 Response of  $x$  and  $\dot{i}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 5:0$  [deg]  
 外乱あり  $d_4(t) = 5:0$  (0:5 秒間)

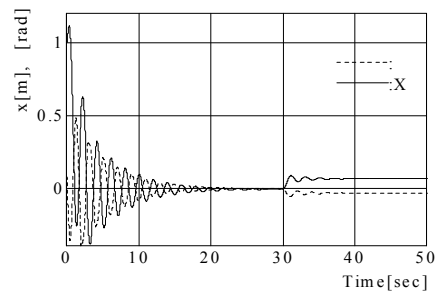


Fig:11 Response of  $x$  and  $\dot{i}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 5:0$  [deg]  
 外乱あり  $d_3(t) = 0:3$  (20 秒間)

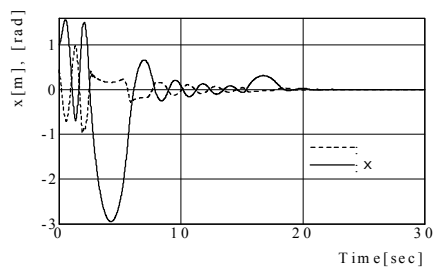


Fig:9 Response of  $x$  and  $\dot{i}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 25:0$  [deg]  
 外乱あり  $d_4(t) = 3:0$  (0:5 秒間)

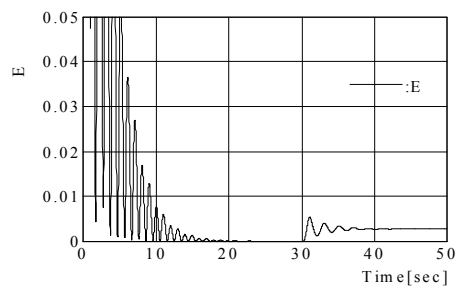


Fig:12 Response of  $E$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 5:0$  [deg]  
 外乱あり  $d_3(t) = 0:3$  (20 秒間)

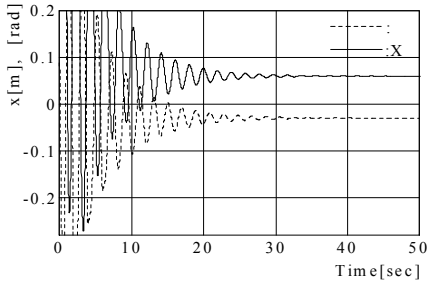


Fig:13 Response of  $x$  and  $\dot{i}$

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 5:0$  [deg]  
 外乱あり  $d_3(t) = 0:3$  (50 秒間)

外乱がない場合の制御はできたが、外乱が入った場合、発散はしないものの Fig:10 のような定常誤差がおり、外乱を除去することができなかった。これは 20 秒間外乱をあたえた時の評価関数の時間変化のグラフである Fig:12 から、外乱が入っている時の評価関数が一定になりローカルミニマムに陥ってしまい学習が進まないため重みが更新されず、制御入力は一一定になり定常誤差になったと思われる。またはじめから外乱を 50 秒間入れたときの応答のグラフである Fig:13 から 0 以外の値に収束しようとしているため平衡点が移動していると思われる。これは 2 次形式の評価関数を最小にするアルゴリズムは評価関数が 0 に収束しない場合でも微分値が 0 になれば最小とみなし学習を止めるためであると思われる。

## 5. モデル誤差に対するロバスト性の検証

振子の重心までの距離におけるモデル誤差をあたえ、性能の検証した。

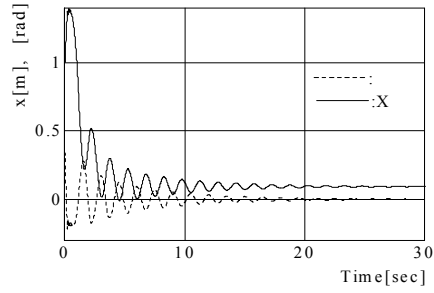


Fig:14 Response of  $x$  and  $\dot{i}$  with NN control(+200 %)

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 20:0$  [deg]  
 外乱なし

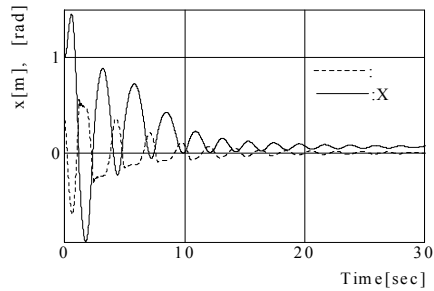


Fig:15 Response of  $x$  and  $\dot{i}$  with NN control(-37 %)

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 20:0$  [deg]  
 外乱なし

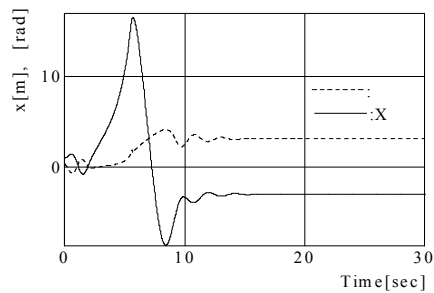


Fig:16 Response of  $x$  and  $\dot{i}$  with NN control(-38 %)

初期位置  $x = 1:0$  [m]  
 初期角度  $\dot{i} = 20:0$  [deg]  
 外乱なし

前節と同様にニューラルネットワークの場合はローカルミニマムに陥って、位置が0に収束しない場合があったが、オンラインで適応させているのでこの点が改善されると、ある程度のロバスト性が期待できそうである。

## 6. 結論

- 1) 一般的な非線形系の安定化制御法を示した。
- 2) ニューラルネットをオンラインで学習させることによってある程度のロバスト性が期待される。
- 3) 外乱が入った場合に定常誤差が起きるのでこの点を改善し外乱除去のためのアルゴリズムに改善する。
- 4) 単倒立振子に適用し、本制御法の有効性を確認した。

## 参考文献

- 1) 中野、飯沼、ニューロンネットグループ、桐谷(編): 入門と実習ニューロコンピュータ, 株式会社技術評論社(1989)