

タンブリング衛星のカルマンフィルタを用いた運動推定

Estimation of Tumbling motion for Malfunctioning satellite based on Kalman filtering

○佐々木久史*, 吉田和哉*, 原啓明*

○Hisafumi Sasaki*, Kazuya Yoshida*, Hiroaki Hara*

*東北大学

*Tohoku University.

キーワード: タンブリング (tumbling), クォータニオン (quaternion), カルマンフィルタ (kalman filtering), オイラー方程式 (euler equation), ニューテーション (nutaton),

連絡先: 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉01 東北大学大学院工学研究科
航空宇宙工学専攻 原研究室

佐々木久史, Tel.: (022)217-6993, Fax.: (022)217-6992, E-mail: sasaki@astro.mech.tohoku.ac.jp

1. はじめに

1998年7月7日,日本が打ち上げたロボットアーム搭載の技術試験衛星VII型(以下ETS-VII)は,世界で初めて,地上からの遠隔操作による無人ランデブドッキングを成功させた.しかし,このような衛星技術の発展の一方で,故障衛星の増加という問題があり,軌道が故障衛星で混雑していく現状にある.

この問題を解決するため,故障衛星の捕獲・修理技術,故障衛星の軌道外除去技術が求められているが,故障した衛星は一般的にタンブリング運動という複雑な回転運動をしており,その捕獲は非常に困難である.

ETS-VIIにおいては,チェイサー衛星とター

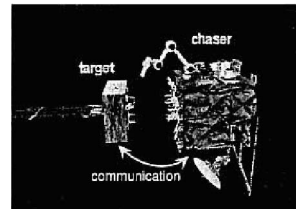


Fig. 1 ETS-VIIのランデブドッキング

ゲット衛星がお互いの運動を同期させた状態からランデブドッキングを成功させた.したがって,チェイサー衛星と故障したターゲット衛星の運動同期が可能ならば,ETS-VIIで確立された技術を用いて,故障衛星を捕獲できる可能性が高くなると考えられる.

そこで、チェイサー衛星と故障したターゲット衛星の運動同期へ繋がる技術として、故障したターゲット衛星の運動を推定する技術が求められている。

2. 画像を用いた運動推定

サンプリングしている衛星の運動を推定する方法として、チェイサー衛星に取り付けたカメラ画像を用いる方法が考えられる。Wengらは、2枚の画像の8点以上の対応点を用いて、対象の運動を推定することを提案している¹⁾。

Wengらの方法を用いて、動画画像から対象の運動パラメータの時系列を推定する方法を以下に示す。

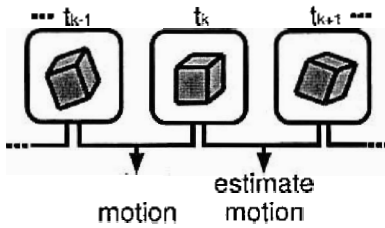


Fig. 2 画像推定から得られる時系列

2.1 並進ベクトルを求める

2つの時間差の空間ベクトルの関係、それを画像面上に投影したベクトルの関係を回転行列 R と並進ベクトル T を用いてそれぞれ次のように表せる。

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{T} \quad (1)$$

$$z'\mathbf{X}' = zR\mathbf{X} + \mathbf{T} \quad (2)$$

ただし

- 時刻 t_1 における空間ベクトル

$$\mathbf{x} = (x, y, z)^T$$

- 時刻 t_2 における空間ベクトル

$$\mathbf{x}' = (x', y', z')^T$$

- 時刻 t_1 における画像面上のベクトル

$$\mathbf{X} = (u, v, 1)^T = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

- 時刻 t_2 における画像面上のベクトル

$$\mathbf{X}' = (u', v', 1)^T = \left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}, 1\right)$$

と定義している。

$\|\mathbf{T}\| \neq 0$ ならば、(2)より次式を得る。

$$\frac{z'}{\|\mathbf{T}\|} \mathbf{X}' = R \frac{z}{\|\mathbf{T}\|} \mathbf{X} + \hat{\mathbf{T}} \quad (3)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} \quad (4)$$

である。また \mathbf{T}_s を \mathbf{T} と同じ方向を持つ単位ベクトルとする。

$$\mathbf{T}_s \times \mathbf{T} = 0 \quad (5)$$

(2)の両辺に \mathbf{T}_s と \mathbf{X}'^T を掛けて整理すると次式が成り立つ。

$$\mathbf{X}'^T E \mathbf{X} = 0$$

$$E = [\mathbf{T}_s]_{\times} R$$

$$[\mathbf{T}_s]_{\times} : \text{ひずみ対称行列}$$

E の要素を用いてベクトル \mathbf{E} を次のように定義する。

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & e_4 & e_7 \\ e_2 & e_5 & e_8 \\ e_3 & e_6 & e_9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_9)^T \quad (8)$$

ベクトル \mathbf{E} を用いて(6)を書き直すと次式のようになる。

$$A\mathbf{E} = 0 \quad (9)$$

このときAは次のような行列である.

$$\begin{array}{ccc}
 u_1 u'_1 & u_2 u'_2 & u_n u'_n \\
 u_1 v'_1 & u_2 v'_2 & u_n v'_n \\
 u_1 & u_2 & u_n \\
 v_1 u'_1 & v_2 u'_2 & v_n u'_n \\
 v_1 v'_1 & v_2 v'_2 & v_n v'_n \\
 & v_2 & v_n \\
 & u'_2 & u'_n \\
 & v'_2 & v'_n \\
 1 & 1 & \dots & 1
 \end{array} \quad (10)$$

($n \geq 8$)

ノイズがあるときは次式を用いる.

$$\|A\mathbf{h}\| = \min \quad (11)$$

\mathbf{h} は $A^T A$ の最小固有値に対する固有単位ベクトルである.

ここで単位ベクトル $\mathbf{T}_s = (T_{s1}, T_{s2}, T_{s3})^T$ と、(7)を用いて E のユークリッドノルムを求める.

$$\begin{aligned}
 \|E\|^2 &= \text{trace}\{EE^T\} \\
 &= \text{trace}\{[\mathbf{T}_s]_X R ([\mathbf{T}_s]_X R)^T\} \\
 &= \text{trace}\{[\mathbf{T}_s]_X ([\mathbf{T}_s]_X)^T\} \\
 &= 2(T_{s1}^2 + T_{s2}^2 + T_{s3}^2) = 2
 \end{aligned}$$

よって $E = \sqrt{2}\mathbf{h}$ である. これから次式を得る.

$$E = [\mathbf{E}_1 \ \mathbf{E}_2 \ \mathbf{E}_3] = \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_4 & h_7 \\ h_2 & h_5 & h_8 \\ h_3 & h_6 & h_9 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(7)より, $E^T \mathbf{T}_s = 0$ を得る. ノイズがあるときは、次の式を用いる.

$$\|E^T \mathbf{T}_s\| = \min \quad (13)$$

このとき, \mathbf{T}_s は EE^T の最小固有値に対する固有ベクトルである.このようにして対象の並進運動方向が求められる.

2.2 角速度の推定

(7)を満たす E と並進ベクトル \mathbf{T}_s が求まれば、誤差がない場合には、回転行列 R は次に示す行列 R_r と等しい.

$$\begin{aligned}
 R_r &= [R_{r1} \ R_{r2} \ R_{r3}] \\
 R_{r1} &= \mathbf{E}_1 \times \mathbf{T}_s + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3 \\
 R_{r2} &= \mathbf{E}_2 \times \mathbf{T}_s + \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_1 \\
 R_{r3} &= \mathbf{E}_3 \times \mathbf{T}_s + \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \quad (14)
 \end{aligned}$$

しかし、実際には誤差が含まれているので、 $\|R - R_r\| = \min$ を満たす R を求める.

4×4の行列 B を(15),(16)のように定義すると、 $\|R - R_r\| = \min$ となるためには、行列 B の最小固有値に対応する固有ベクトルがクォータニオン \mathbf{q} であれば良い¹⁾.

$$B = \sum_{i=1}^3 B_i^T B_i \quad (15)$$

ここで

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{I}_i - \mathbf{R}_{ri})^T \\ \mathbf{I}_i - \mathbf{R}_{ri} & [\mathbf{R}_{ri} + \mathbf{I}_i]_X \end{bmatrix} \quad (16)$$

クォータニオン $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ と回転変換の軸 ν と角度 θ の間には以下のような関係がある.

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \cos(\theta/2) \\
 q_1 &= \sin(\theta/2)\nu_1 \\
 q_2 &= \sin(\theta/2)\nu_2 \\
 q_3 &= \sin(\theta/2)\nu_3
 \end{aligned} \quad (17)$$

(17)によって ν と θ を求めることができる. また、 $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ を用いて回転行列 R を次のように表すことができる.

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\
 R_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3) \\
 R_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\
 R_{21} &= R_{12} \\
 R_{22} &= q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\
 R_{23} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\
 R_{31} &= R_{13} \\
 R_{32} &= R_{23} \\
 R_{33} &= q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2
 \end{aligned}$$

クォータニオンのスケール要素 q_0 から得られる θ と2枚の画像の微小時間差 Δt を用いて,角速度 ω は次のように表すことができる.

$$\omega_i = \frac{\theta}{\Delta t} \nu_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

3. 離散系カルマンフィルタ

画像等から観測された角速度等の運動パラメータには誤差が含まれていることが多い.誤差を含む観測データにカルマンフィルタ²⁾を適用することによって,実際の状態を推定することを考える.

3.1 基本システム

一般に測定可能なシステムの動的現象は,観測データに基づいて状態空間において発展する時系列としてとらえることができる.つまり,ある一定の時間ごとの観測データに着目すれば,多くの場合システムの動的現象は次のような状態空間のシステム方程式(20)と観測方程式(21)で与えられる差分方程式の組 (Y_k, Z_k) で記

述される.

$$Y_{k+1} = \Phi_k Y_k + W_k \quad (20)$$

$$Z_k = H_k Y_k + V_k \quad (21)$$

$$(k=0,1,2,\dots)$$

Y_k は時刻 t_k におけるシステムの状態ベクトルであり, Z_k は同時刻における観測値ベクトルである.そして Φ_k と H_k は現象を支配する物理法則,あるいは予め実験で測定された信号の相関性等から導き出される関係マトリックスである.また, W_k, V_k はそれぞれシステム誤差,観測誤差を表し,ここでは簡単のため,平均値0,分散 η_k と ξ_k の白色雑音と仮定する.

$$E[W_k W_i^T] = \delta_{ki} \eta_k$$

$$E[V_k V_i^T] = \delta_{ki} \xi_k$$

$$E[W_k V_i^T] = 0$$

以上の式は同種の雑音では同時刻でのみ相関があり,同種以外の雑音には相関性がないことを示す.

3.2 フィルタリングの手順

システムの動的現象に関して,過去の観測値 $Z_i(0,1,\dots,k-1)$ をもとに Y_k の先行推定を行う場合,

$$\hat{Y}_k^{(\alpha)} = E\{Y_k | Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1+\alpha}, Z_{k+\alpha}\}$$

(ただし, $\alpha = +, 0, -$ の時, $\alpha \cdot 1 = +1, 0, -1$)において条件付き推定ベクトル $\hat{Y}_k^{(\alpha)}$ をデータ $Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1+\alpha}, Z_{k+\alpha}$ に基づく Y のフィルタという. $\hat{Y}_k^{(+)}$ を取り出す操作を平滑(smoothing), $\hat{Y}_k^{(0)}$ を取り出す操作を濾波(filtering),そして $\hat{Y}_k^{(-)}$ を

取り出す操作を予測(prediction)と呼ぶ。まず条件付き推定ベクトル

$$\hat{Y}_k^{(-)} = E\{Y_k | Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1}\}$$

が得られているものとする。そして次の時刻 t_k で新たな観測値 Z_k を得たとき、新たに推定できる条件付き推定ベクトルは

$$\hat{Y}_k^{(0)} = E\{Y_k | Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_k\}$$

である。推定ベクトルの変化 $\hat{Y}_k^{(0)} - \hat{Y}_k^{(-)}$ とこれに対応する観測値を線形的に結び付けるカルマンゲイン K_k を次式で導入する。

$$\hat{Y}_k^{(0)} - \hat{Y}_k^{(-)} = K_k(Z_k - H_k \hat{Y}_k^{(-)}) \quad (22)$$

K_k は2乗誤差 $(Y_k - \hat{Y}_k^{(-)})^2$ の平均値を最小にする最適値として決定される。条件付き推定ベクトルは、式(20)から

$$\hat{Y}_{k+1}^{(-)} = \Phi_k \hat{Y}_k^{(0)} \quad (23)$$

が得られ、時刻 t_{k+1} でのシステムの状態ベクトル $\hat{Y}_{k+1}^{(-)}$ は対応する状態ベクトル $\hat{Y}_k^{(0)}$ によって推定される。

3.3 カルマンゲインの決定

前節では $\hat{Y}_k^{(-)}$ が得られているものとした。従って時刻 t_{k-1} までの観測データから状態ベクトル Y_k の推定誤差 $e_k^{(-)} = Y_k - \hat{Y}_k^{(-)}$ を考え、誤差の相関関数行列

$$P_k^{(-)} = E[e_k^{(-)} e_k^{(-)T}] \quad (24)$$

が定義できる。次の時刻 t_k での観測値 Z_k を得たときの状態ベクトル Y_k の推定誤差を $e_k^{(0)} = Y_k - \hat{Y}_k^{(0)}$ とすると、相対する誤差の相関関数行列は

$$P_k^{(0)} = E[e_k^{(0)} e_k^{(0)T}] \quad (25)$$

で定義される。これを式(22)を用いて表すと、 $P_k^{(0)} = E[\{(Y_k - \hat{Y}_k^{(-)}) - K_k(Z_k - H_k \hat{Y}_k^{(-)})\} \{(Y_k - \hat{Y}_k^{(-)}) - K_k(Z_k - H_k \hat{Y}_k^{(-)})\}^T]$ となる。さらに式(21)と e_k と V_k が無相関であることを用いて展開していくと、最終的に

$$P_k^{(0)} = (I - K_k H_k) P_k^{(-)} (I - K_k H_k)^T + \xi_k K_k^T \quad (26)$$

と表される。ここで $\text{tr}(P_k^{(0)})$ は $P_k^{(0)}$ が誤差 $e_k^{(0)}$ の相関関数行列であることから、平均2乗誤差の広がりを表していることがわかる。したがって、式(26)が K_k の二次式であることに注意して K_k で微分すると $\text{tr}(P_k^{(0)})$ を最小にする K_k が最適な K_k として決定される。つまり、条件

$$\frac{\partial [\text{tr}(P_k^{(0)})]}{\partial (K_k)} = 0$$

から最適値 K_k は

$$K_k = P_k^{(-)} H_k^T (H_k P_k^{(-)} H_k^T + \xi_k)^{-1} \quad (27)$$

と決定される。この K_k を使うと $P_k^{(0)}$ は関係式(26)から、

$$P_k^{(0)} = (I - K_k H_k) P_k^{(-)} \quad (28)$$

に変形でき、 $P_k^{(-)}$ から求めることができる。以上の手順で $e_{k+1}^{(-)}$ は $\hat{Y}_{k+1}^{(-)}$ を使って、

$$e_{k+1}^{(-)} = Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1}^{(-)} = \Phi_k e_k^{(0)} + W_k \quad (29)$$

と定められる。すると、時刻 t_{k+1} での $P_{k+1}^{(-)}$ は

$$P_{k+1}^{(-)} = E[e_{k+1}^{(-)} e_{k+1}^{(-)T}] = \Phi_k P_k^{(0)} \Phi_k^T + \eta_k \quad (30)$$

と求められ、式(27)によって次段階の K_{k+1} を決定する。このようにしてカルマンゲインを更新していく。

4. カルマンフィルタの適用

宇宙空間を浮遊する対称剛体の運動方程式は、次に示すような外力の働かない場合のオイラー方程式で表すことができる。³⁾

$$\begin{aligned} J_t \frac{d\omega_1}{dt} + (J_s - J_t)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ J_t \frac{d\omega_2}{dt} + (J_s - J_t)\omega_3\omega_1 &= 0 \\ J_s \frac{d\omega_3}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

ω_i : i 軸周りの角速度($i = 1, 2, 3$)

J_t : 対称軸周りの慣性モーメント

($J_t = J_1 = J_2$)

J_s : スピン軸周りの慣性モーメント

($J_s = J_3$)

このオイラー方程式をカルマンフィルタに入力する状態方程式とし、推定する状態変数は角速度 ω とする。また、カルマンフィルタに入力する観測値の時系列を動画像等から求めた運動パラメータの時系列((19)等)とする。

タンプリング運動の1種であるニューテーション運動について、カルマンフィルタの性能を試すシミュレーションを行った。

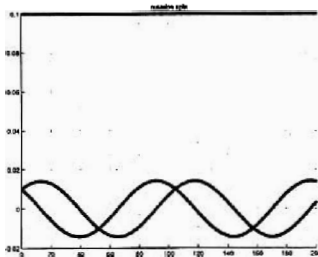


Fig. 3 ニューテーション運動

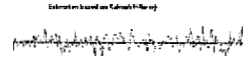


Fig. 4 カルマンフィルタを適用した様子

Fig.3はニューテーション運動の状態値である。この状態値に乱数を加えたデータを観測値とし、カルマンフィルタを適用すると、Fig.4のように誤差が含まれているデータから状態値に近い値を推定できていることがわかった。

5. おわりに

本稿ではタンプリング衛星の運動推定への第一歩として、誤差を含む観測値にカルマンフィルタを適用できる可能性について述べた。

画像を用いた運動推定は、様々な誤差の影響を受ける。観測誤差をできるだけ小さくするためには、テンプレートマッチングの精度を向上やロバストな推定法を検討する必要がある。

参考文献

- 1) J.Weng, T.S.Huang and N.Ahuja: Motion and structure from two perspective views: Algorithms, error analysis and error estimation, IEEE Trans. Pattern Analysis. Machine Intell, PAMI-11, 451/475 (1989)
- 2) Robert Grover Brown, Patrick Y.C Hwang: Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering (THIRD EDITION), 214/220(1997)
- 3) 木田 隆: スペースクラフトの制御, 60/66, コロナ社(1999)