

## 2リンクマニピュレータのゲインスケジューリング制御系設計

### A gain-scheduling control system design for a two link robot manipulator

平元和彦\*, ○武田泰史\*, 中村悠介\*,

Kazuhiko Hiramoto\*, ○Taishi Takeda\* and Yusuke Nakamura\*

\*秋田大学

\*Akita University

キーワード: ロボットマニピュレータ (robot manipulator), ゲインスケジューリング制御 (gain scheduling control), パラメータ凍結法 (frozen parameter method)

連絡先: 〒010-8502 秋田市手形学園町1-1 秋田大学 工学資源学部 機械工学科

平元和彦, Tel.: (018)889-2348, Fax.: (018)837-0405, E-mail: hira@ipc.akita-u.ac.jp

## 1. はじめに

マニピュレータに要求される高速化に対応するため, 回転関節から減速機構を取り除いたダイレクトドライブアーム (DDアーム) に関する研究が行われている<sup>1)</sup>. しかしながら, DDアームは減速比が1:1であるため, 負荷変動や, 姿勢変化に伴う動特性の変化が大きく, 制御が困難である.

本報告では, 減速機のない2リンクのマニピュレータの制御系設計について考える. 前述の制御系設計に関する困難さのうち, 姿勢変化に伴う動特性変動に着目し, 関節角度に応じて連続的にフィードバックコントローラを変化させるゲインスケジューリング制御手法を適用する. はじめに, マニピュレータの運動方程式を求める. ゲインスケジューリングコントローラは, 複数の基準点で固定されたマニピュレータに対して設計された固定コントローラを補間するパラメータ凍結法<sup>2)</sup>を用いて設計する. 固定コントローラとして, 最適サー

ボ系に, オブザーバを組み合わせたものを使用する. 得られたレギュレータゲインと, オブザーバゲインを関節角度に応じて補間する. 得られた制御則を用いて, シミュレーションを行う.

## 2. 2リンクマニピュレータのモデル化

図1に, 平面内を運動する2リンクマニピュレータのモデル図を示す. 各リンクの長さを $l_1, l_2$ , 質量を $m_1, m_2$ , 慣性モーメントを $I_1, I_2$ とし, 関節間の粘性摩擦係数を $D_1, D_2$ とする. 各関節の角度を $\theta_1(t), \theta_2(t)$ とし ( $t$ は時刻), 各関節にトルク $\tau_1(t), \tau_2(t)$ が作用している. 一般化座標として次式を定義する.

$$q_1(t) = \theta_1(t) \quad (1)$$

$$q_2(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) \quad (2)$$

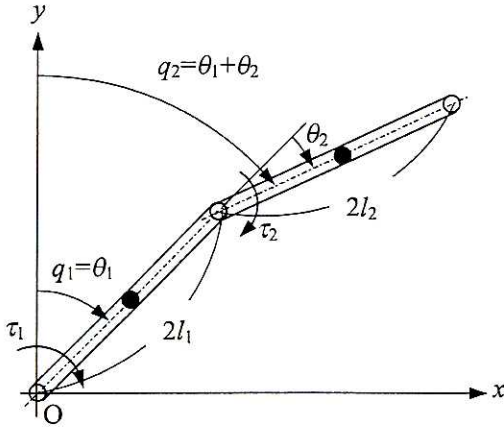


Fig. 1 Two link robot manipulator

ラグランジュの手法からこの系の運動方程式を求めると、次式ようになる。

$$\begin{aligned}
 & J_1 \ddot{q}_1(t) + \gamma \ddot{q}_2(t) \cos(q_2(t) - q_1(t)) \\
 & - \gamma \dot{q}_1^2(t) \sin(q_2(t) - q_1(t)) \\
 & + (D_1 + D_2) \dot{q}_1(t) - D_2 \dot{q}_2(t) \\
 & - (m_1 + 2m_2) l_1 g \sin q_1(t) = \tau_1(t) - \tau_2(t)
 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 & J_2 \ddot{q}_2(t) + \gamma \ddot{q}_1(t) + \gamma \dot{q}_1^2(t) \sin(q_2(t) - q_1(t)) \\
 & + D_2 (\dot{q}_2(t) - \dot{q}_1(t)) - m_2 l_2 g \sin q_2(t) = \tau_2(t)
 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $J_1 = (\frac{1}{3}m_1 + 4m_2)l_1^2$ 、 $J_2 = \frac{1}{3}m_2 l_2^2$ 、 $\gamma = 2m_2 l_1 l_2$ であり、 $g$ は重力加速度である。式(3)、(4)に対して、重力項をキャンセルする静的トルク $\bar{\tau}_1(t)$ 、 $\bar{\tau}_2(t)$ を作用させると、任意の姿勢で平衡状態となる。ある姿勢 $(\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t))$ まわりの微小関節変位を $\delta q_1(t)$ 、 $\delta q_2(t)$ 、微小トルクを $\delta \tau_1(t)$ 、 $\delta \tau_2(t)$ とおき、姿勢 $(\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t))$ まわりで式(3)、(4)を線形化すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & J_1 \delta \ddot{q}_1(t) + \gamma \cos(\bar{q}_2(t) - \bar{q}_1(t)) \delta \ddot{q}_2(t) \\
 & + (D_1 + D_2) \delta \dot{q}_1(t) - D_2 \delta \dot{q}_2(t) \\
 & - (m_1 + 2m_2) l_1 \cos \bar{q}_1(t) \delta q_1(t) = \delta \tau_1(t) - \delta \tau_2(t)
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$J_2 \delta \ddot{q}_2(t) + \gamma \cos(\bar{q}_2(t) - \bar{q}_1(t)) \delta \ddot{q}_1(t)$$

$$D_2 (\delta \dot{q}_2 - \delta \dot{q}_1) - m_2 l_2 g \cos \bar{q}_2(t) \delta q_2(t) = \delta \tau_2(t) \quad (6)$$

状態ベクトルを $x(t) := [\delta q_1(t) \delta q_2(t) \delta \dot{q}_1(t) \delta \dot{q}_2(t)]^T$ と定義し、角度センサで関節角度 $\delta \theta_1(t) := \delta q_1(t)$ 、 $\delta \theta_2(t) := \delta q_2(t) - \delta q_1(t)$ が観測されると仮定すると、式(5)、(6)は、以下のような状態方程式で記述できる。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $u(t) = [\delta \tau_1(t) \delta \tau_2(t)]^T$ 、 $y(t) = [\delta q_1(t) \delta q_2(t)]^T$ であり、係数行列は、以下のものである。

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -J^{-1}(t)K(t) & -J^{-1}(t)D \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ J^{-1}(t)E \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J(t) = \begin{bmatrix} J_1 & \gamma \cos(\bar{q}_2(t) - \bar{q}_1(t)) \\ \gamma \cos(\bar{q}_2(t) - \bar{q}_1(t)) & J_2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 + D_2 & -D_2 \\ -D_2 & D_2 \end{bmatrix},$$

$$K(t) = - \begin{bmatrix} (m_1 + 2m_2) l_1 \cos \bar{q}_1(t) & 0 \\ 0 & m_2 l_2 g \cos \bar{q}_2(t) \end{bmatrix}$$

行列 $J(t)$ 、 $K(t)$ は、姿勢 $(\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t))$ に依存していることに注意する。すなわち、式(7)で与えられるシステムは、マニピュレータの姿勢に依存して、その動特性が変化する。

### 3. ゲインスケジューリングコントローラ的设计法

本章では、前章で求められた2リンクマニピュレータの数学モデルに対するゲインスケジューリング制御則を設計する。設計には、Shammaらによって提案されているパラメータ凍結法<sup>2)</sup>を用いる。本手法は、マニピュレータのいくつかの姿勢に対して固定コントローラを設計しておき、それらを補間して、スケジューリングコントローラを求めるものである。固定コントローラとして、ス

テップ状の角度目標値にロバストに定常誤差なく追従するため、1型の最適サーボ系を用いる<sup>3)</sup>。検出不可能な状態量（関節速度）に関しては、オブザーバを用いて推定する。

式(7)で表されるシステムをある姿勢で固定すると線形時不変システムとなる。このシステムに対して、以下のような制御を考える。

$$u(t) = -Fx(t) + Lz(t) \quad (8)$$

$$\dot{z}(t) = -Cx(t) + r(t) \quad (9)$$

ここで、 $F \in \mathbf{R}^{2 \times 4}$ は状態フィードバックゲイン、 $L \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ は積分ゲイン行列、 $z(t) \in \mathbf{R}^2$ 、 $r(t) \in \mathbf{R}^2$ はそれぞれ積分器の状態量、角度目標値ベクトルである。閉ループ系のブロック線図は、図2のようになる。文献<sup>3)</sup>で提案されている最適サーボ系の設計手法を用いると、ゲイン行列 $F$ 、 $L$ は、以下のように求めることができる。

$$\begin{bmatrix} F & L \end{bmatrix} = F_e \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (10)$$

ここで、 $F_e = R^{-1}B^T P$ であり、 $P$ は、以下の代数Riccati方程式の正定対称解である。

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + C^T WC = 0 \quad (11)$$

行列 $W \geq 0$ 、 $R > 0$ は、以下で示される誤差システム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{u}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ u_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v(t) \quad (12)$$

$$x_e(t) := x(t) - x(\infty), \quad u_e(t) := u(t) - u(\infty),$$

$$e(t) = y(t) - r(t), \quad v(t) \in \mathbf{R}^2$$

に対して定義される以下の二次形式評価関数 $J_p$ の重みである。

$$J_p := \int_0^{\infty} \{e(t)^T W e(t) + v(t)^T R v(t)\} dt \quad (13)$$

この手順により、固定されたいくつかの姿勢に対して、固定コントローラを求める。

次にゲインスケジューリングコントローラを導出する。図3に、 $q_1(t) - q_2(t)$ 平面内の4点 $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )を考える。一つの点が一の姿勢に対応しており、それぞれの点の座標は図のように与えられているとする。それぞれの点に対して、前述の方法で固定コントローラが得られており、フィードバックゲイン行列を $M_i := [F_i \ L_i]$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )とおく。本報告では、 $A_1$ から $A_4$ に囲まれた長方形領域内のある姿勢に対応する点 $A_5$ に対するゲイン行列 $M_5$ を、以下のように求める。

**Step 1:**  $q_1(t)$ 軸に沿って、

$$M_\alpha^1 := (1 - \alpha)M_1 + \alpha M_2, \quad (14)$$

$$M_\alpha^2 := (1 - \alpha)M_3 + \alpha M_4, \quad \alpha := \frac{q_1^5 - q_1^1}{q_1^2 - q_1^1} \quad (15)$$

を求める。

**Step 2:**  $M_5$ を以下のように求める。

$$M_5 = (1 - \beta)M_\alpha^1 + \beta M_\alpha^2, \quad \beta = \frac{q_2^5 - q_2^1}{q_2^3 - q_2^1} \quad (16)$$

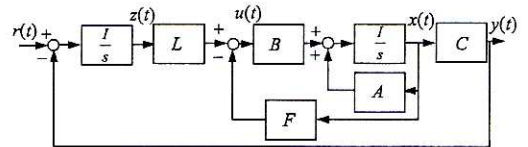


Fig. 2 Block diagram of the control system

本手法は、マニピュレータの任意の姿勢に対して、求められた複数の固定ゲインを、姿勢に応じて線形に補間するものである。

## 4. シミュレーション

前章の手法を用いて、ゲインスケジューリングコントローラを求めた。作業領域は $0 \leq q_1 \leq \frac{\pi}{2}$  [rad]、 $0 \leq q_2 \leq \frac{\pi}{2}$  [rad]を想定した。固定コントローラは、 $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ それぞれにおいて、 $\frac{\pi}{6}$  [rad]おきに

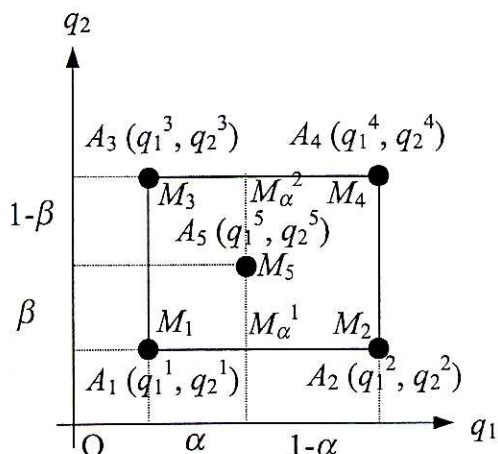


Fig. 3 Gain scheduling scheme

求めた。固定コントローラの合計個数は9個である。図4に、 $q_2 = 0$  [rad]に固定し、 $q_1$ を $0 \sim \frac{\pi}{2}$  [rad]と変化させた場合の、前章で計算されたゲインスケジューリングコントローラの状態フィードバックゲイン行列 $F$ の(1,1)成分と、 $\pi/18$  [rad]おきに計算された最適サーボコントローラの $F$ の(1,1)成分の比較を示す。姿勢の変化に応じて、フィードバックゲインの成分の数値が変化していることがわかる。さらに、 $\pi/18$  [rad]おきに求められた最適サーボ系のゲイン行列の成分と、本報告の手法で得られたゲイン行列の値がほぼ一致している。他の成分でも概ね同様の結果が得られ、本報告のゲインスケジューリング制御系が、想定している作業範囲で、(各々の姿勢に対する)最適サーボ系に近い応答をすることが期待できる。

設計されたゲインスケジューリングコントローラと、 $q_1 = q_2 = 0$  [rad]で設計された固定コントローラを用いて、シミュレーションを行う。各関節に表1のようなステップ上に変化する目標値を与えた。

結果を図5, 6に示す。なお、サーボコントローラを求める際の二次形式評価関数(式(13))の重みとしては、いずれの場合も $W = \text{diag}(1000, 1000)$ ,  $R =$

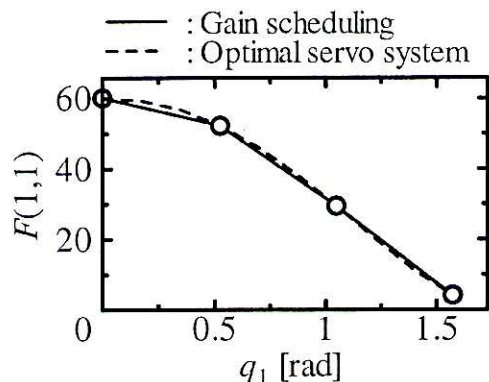


Fig. 4 (1,1) entry of the state feedback gain matrix  $F$

Table 1 Reference values

Joint	Reference [rad]		
	0~25 [s]	25~50 [s]	50~75 [s]
$q_1$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$q_2$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$

$\text{diag}(1, 1)$ を採用した。いずれの場合も、ゲインスケジューリングを行うことにより、操作量の最大値にほとんど変化なく、応答性が改善していることが確認でき、本制御則の有効性が示されている。

## 5. おわりに

本報告では、2リンクマニピュレータに対してゲインスケジューリング制御法を適用し、シミュレーションでその有効性を示した。今後は、近年注目されているLMIベースのゲインスケジューリング制御手法<sup>4)</sup>の適用について検討する。

## 参考文献

- 1) 美多勉, 大須賀公一, ロボット制御工学入門, コロナ社(1989).
- 2) Shamma, S. J. and Athans, M., IEEE Trans. Automat. Contr., **35**, 8, 898-907 (1990).

3) 武田常広, 北森俊行, 計測自動制御学会論文  
集, 14, 4, 359-364 (1978).

4) Apkarian, P. and Gahinet, P., IEEE Trans.  
Automat. Contr., 40, 5, 853-864 (1995).

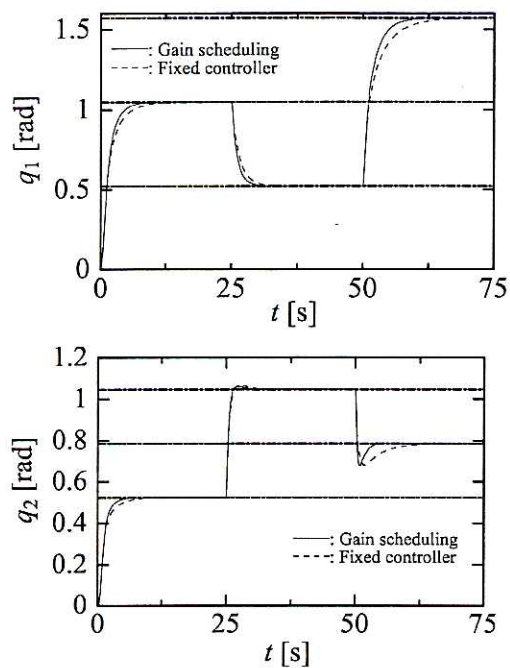


Fig. 5 Time history of  $q_1(t)$  and  $q_2(t)$

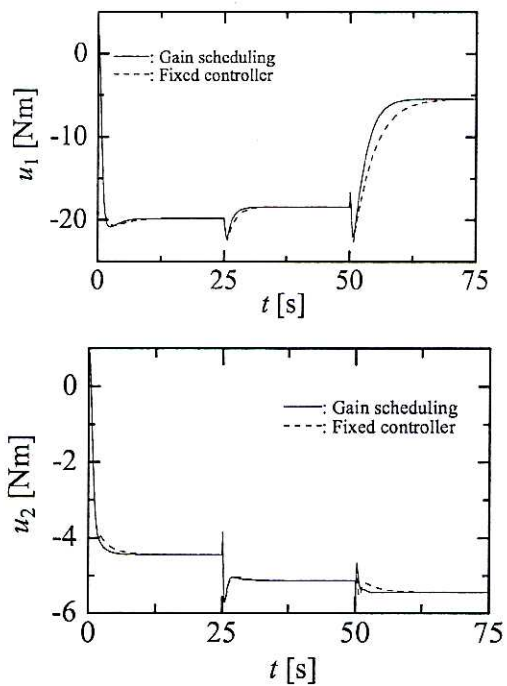


Fig. 6 Time history of  $u_1(t)$  and  $u_2(t)$