

## 非標準形LMS適応アルゴリズムの収束条件解析

### Analysis of the Convergence Condition of Non-canonical LMS Adaptive Algorithm

○高橋 強\*, 恒川佳隆\*\*

○Kyo Takahashi\*, Yoshitaka TSUNEKAWA\*\*

\*岩手県立産業技術短期大学校, \*\*岩手大学

\*Iwate Industrial Technology Junior College, \*\*Iwate University

キーワード: NCLMSアルゴリズム(Non-canonical LMS Algorithm), 収束条件(Convergence Condition), 出力滞在時間(Output Latency)

連絡先: 〒028-3615 岩手県紫波郡矢巾町大字南矢幅10-3-1 岩手県立産業技術短期大学校電子技術科  
高橋 強, Tel.: (019)-697-9082, Fax.: (019)-697-9089, E-mail:kyo@iwate-it.ac.jp

## 1. はじめに

適応フィルタは、エコーキャンセラ、ノイズキャンセラ、アダプティブイコライザなど幅広く用いられており、ますます応用範囲を広げている。適応フィルタを実現するには、高速性、短い出力滞在時間、良好な収束特性、低消費電力、小規模なハードウェアなど様々な性能が要求される。しかし、これらの要求を同時に満たすことは非常に困難であるため、高性能なアルゴリズムや効果的なアーキテクチャが望まれている。

LMS適応フィルタのある構造に対する転置形構造に基づいた適応アルゴリズム(Non-canonical LMS Algorithm)と適応フィルタ(Non-canonical LMS Adaptive digital Filter, NCLMS-ADF)が提案されている<sup>1, 2, 3, 4)</sup>。この適応フィルタでは、非常に短い出力滞在時間を達成することが可能である反面、LMSアルゴリズムよりも収束速度が大幅に劣化することが知られている<sup>4)</sup>。

NCLMSアルゴリズムに対する収束条件の解析はこれまでGanらによって行われており、安定限界はタップごとに異なり、入力信号の分散と推定勾配の分散に依存することが示された<sup>4)</sup>。しかし、安定限界を規定する推定勾配の分散に関する検討が行われていないため、導出された収束条件より安定限界を規定することはできない。そして、NCLMSアルゴリズムの安定限界がLMSよりも小さいことを適応等化の問題に対する計算機シミュレーションによって確認しているのみである。

本論文では、アルゴリズムの性能改善と効果的なアーキテクチャの提案を前提として、Ganらとは異なるアプローチによりNCLMSアルゴリズムの収束条件を導出する。導出した収束条件式は付加項を持たない簡潔な再帰式で表現される。条件式の導出において、NCLMSのタップ係数を交換することによりNCLMSの出力計算式を通常のLMSと同じタップ係数を用いた計算式に書き換え

る。これにより、収束条件式を簡潔な再帰式で表現することを可能にした。検討の結果、安定限界はタップ数、タップ係数の更新履歴、初期値、入力信号の分散によって規定され、タップ数が増加するにしたがいLMSの約50%を有することが明らかになった。

## 2. NCLMS アルゴリズム

入力信号を  $x(k)$  とすると NCLMS 適応フィルタの出力信号  $\tilde{y}(k)$  は次のように表される。

$$\tilde{y}(k) = \mathbf{X}^T(k) \tilde{\mathbf{H}}(k) \quad (1)$$

ここで、入力信号ベクトル  $\mathbf{X}(k)$  と時間差を伴うフィルタ係数ベクトル  $\tilde{\mathbf{H}}(k)$  は  $N$  をタップ数とする

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k) &= [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)]^T \\ \tilde{\mathbf{H}}(k) &= [\tilde{h}_0(k), \tilde{h}_1(k), \dots, \tilde{h}_{(N-1)}(k)]^T \\ &= [h_0(k), h_1(k-1), \dots, h_{(N-1)}(k-N+1)]^T \end{aligned}$$

である。  $\tilde{\mathbf{H}}(k)$  は LMS 適応フィルタの係数ベクトル

$$\mathbf{H}(k) = [h_0(k), h_1(k), \dots, h_{(N-1)}(k)]^T$$

を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}(k) &= \mathbf{H}(k) - \boldsymbol{\gamma}(k) \\ \boldsymbol{\gamma}(k) &= 2\mu \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^1 \tilde{e}(k-i)x(k-1-i) \\ \sum_{i=1}^2 \tilde{e}(k-i)x(k-2-i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{e}(k-i)x(k-N+1-i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表される。係数更新式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(k+1) &= \mathbf{H}(k) + 2\mu \tilde{e}(k) \mathbf{X}(k) \\ \tilde{e}(k) &= d(k) - \tilde{y}(k) \end{aligned}$$

ここで、  $d(k)$  は所望信号である。NCLMS 適応フィルタの基本構成を図 1 に、出力計算における状態遷移を図 2 に示す。図 1 に示される通り、NCLMS

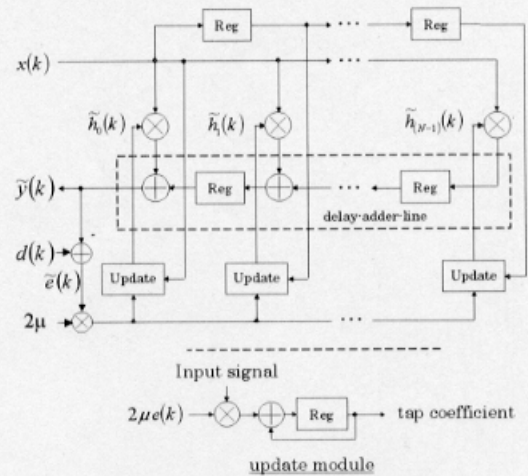


Fig. 1 Basic structure of NCLMS adaptive filter.

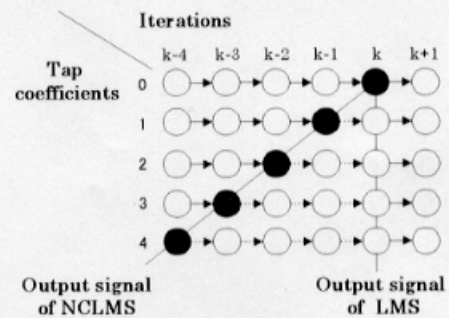


Fig. 2 State transition diagram of NCLMS adaptive filter for  $N=5$ .

アルゴリズムは出力の計算過程に特徴がある。通常の LMS とは異なり、タップ出力側に遅延器（レジスタ）と加算器が従属に接続されたディレー・アダー・ラインが配置されており、各タップの出力はこのディレー・アダー・ラインを伝播して行く。そして、フィルタ出力は最終タップの出力とディレー・アダー・ラインの出力の和として求められる。したがって、時刻  $k$  におけるフィルタ出力には、過去のタップ係数を用いて計算されたタップ出力が含まれることになる。タップ出力は、タップの番号に対応した段数のディレーを通過するため、  $i$  番目のタップに対する時間差は  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) である。この時間差は、出力計算式において用いるタップ係数  $\tilde{\mathbf{H}}(k)$  における各要素の時刻差として現わ

れている。図2は、 $N = 5$ のNCLMSとLMSに対するタップ係数の状態遷移を表している。LMSの出力信号は、時刻 $k$ におけるタップ係数を用いて得られるのに対し、NCLMSは時刻差を伴ったタップ係数を用いて求められる。タップ係数の遷移は矢印で示されており、更新値を表している。 $\gamma(k)$ の各要素は、この点線の矢印が示す更新値の和に対応している。

出力滞在時間は、出力計算に用いるフィルタ部のクリチカル・パスとなり

$$t_{add} + t_{mt} \quad (2)$$

である。ここで、 $t_{add}$ と $t_{mt}$ はそれぞれ加算器と乗算器の出力滞在時間である。この出力滞在時間は、LMSに基づく代表的な構成法の中では最も短い(5, 6, 7, 8)。

### 3. 収束条件式

NCLMSアルゴリズムの収束条件式を導く。まず、式(1)を次のように置く。

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k) &= \mathbf{X}^T(k) \tilde{\mathbf{H}}(k) \\ &= \mathbf{X}'^T(k) \mathbf{H}(k) \end{aligned} \quad (3)$$

これより、 $\mathbf{X}'(k)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'(k) &= \begin{bmatrix} x(k) \\ \frac{\tilde{h}_1(k)}{h_1(k)} x(k-1) \\ \vdots \\ \frac{\tilde{h}_{(N-1)}(k)}{h_{(N-1)}(k)} x(k-N+1) \end{bmatrix}^T \\ &= \mathbf{F}(k) \mathbf{X}(k) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{F}(k)$ と $\mathbf{X}(k)$ は独立であると仮定した<sup>9)</sup>。 $\mathbf{F}(k)$ は $N \times N$ の対角行列であり、その対角要素は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(k) &= \text{diag}[f_0(k), f_1(k), \dots, f_{(N-1)}(k)] \\ &= \text{diag}\left[1, \frac{\tilde{h}_1(k)}{h_1(k)}, \dots, \frac{\tilde{h}_{(N-1)}(k)}{h_{(N-1)}(k)}\right] \end{aligned} \quad (4)$$

である。そして、 $\mathbf{F}(k)$ の逆行列は

$$\mathbf{F}^{-1}(k) = \text{diag}\left[1, \frac{h_1(k)}{\tilde{h}_1(k)}, \dots, \frac{h_{(N-1)}(k)}{\tilde{h}_{(N-1)}(k)}\right]$$

である。なお、 $\text{diag}[]$ は対角要素を表す演算子である。

更新式に誤差計算式と出力計算式を代入して展開する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(k+1) &= \mathbf{H}(k) + 2\mu \tilde{e}(k) \mathbf{X}(k) \\ &= \mathbf{H}(k) + 2\mu \{d(k) - \tilde{y}(k)\} \mathbf{X}(k) \\ &= \mathbf{H}(k) + 2\mu \{d(k) - \mathbf{X}'^T(k) \mathbf{H}(k)\} \\ &\quad \cdot \mathbf{F}^{-1}(k) \mathbf{X}'(k) \\ &= \mathbf{H}(k) + 2\mu \mathbf{F}^{-1}(k) d(k) \mathbf{X}'(k) \\ &\quad - 2\mu \mathbf{F}^{-1}(k) \mathbf{X}'(k) \mathbf{X}'^T(k) \mathbf{H}(k) \\ &= \{\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{F}^{-1}(k) \mathbf{X}'(k) \mathbf{X}'^T(k)\} \mathbf{H}(k) \\ &\quad + 2\mu \mathbf{F}^{-1}(k) d(k) \mathbf{X}'(k) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、係数誤差ベクトルを次のように定義する。

$$\mathbf{c}(k) \triangleq \mathbf{H}(k) - \mathbf{H}^{opt}$$

これを、式(5)へ代入して展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(k+1) &= \{\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^T(k)\} \mathbf{c}(k) \\ &\quad - 2\mu \mathbf{F}^{-1}(k) \mathbf{X}'(k) \mathbf{X}'^T(k) \mathbf{H}^{opt} \\ &\quad + 2\mu \mathbf{F}^{-1}(k) d(k) \mathbf{X}'(k) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。なお、 $\mathbf{H}^{opt}$ は $\mathbf{H}(k)$ の最適値であり、次式で表される。

$$\mathbf{H}^{opt} = [h_0^{opt}, h_1^{opt}, \dots, h_{(N-1)}^{opt}]^T$$

式(6)の両辺の期待値を求めると

$$\begin{aligned} E[\mathbf{c}(k+1)] &= \{\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}'(k)\} E[\mathbf{c}(k)] \\ &\quad - 2\mu E[\mathbf{F}^{-1}(k)] \mathbf{R}''(k) \mathbf{H}^{opt} \\ &\quad + 2\mu E[\mathbf{F}^{-1}(k)] \mathbf{q}'(k) \end{aligned}$$

となり、これにNCLMSの正規方程式(導出は付録に示す)

$$\mathbf{H}^{opt} = \mathbf{R}''^{-1}(k) \mathbf{q}'(k)$$

を代入すると、右辺の第2項と第3項は相殺されて

$$E[\mathbf{c}(k+1)] = \{\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}'(k)\} E[\mathbf{c}(k)] \quad (7)$$

となる。なお、

$$E[\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^T(k)] = \mathbf{R}'(k) \quad (8)$$

$$E[\mathbf{X}'(k)\mathbf{X}'^T(k)] = \mathbf{R}''(k) \quad (9)$$

と置いた。

次に、式(8)に示される $\mathbf{R}'$ の固有値について検討する。 $\mathbf{X}'(k)$ は次式で表された。

$$\mathbf{X}'(k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k)$$

ここで、対角行列 $\mathbf{F}(k)$ は式(4)に示されるようにタップ係数 $\mathbf{H}(k)$ と $\tilde{\mathbf{H}}(k)$ の各要素の比である。式(4)を再記する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(k) &= \text{diag}[f_0(k), f_1(k), \dots, f_{(N-1)}(k)] \\ &= \text{diag}\left[1, \frac{\tilde{h}_1(k)}{h_1(k)}, \dots, \frac{\tilde{h}_{(N-1)}(k)}{h_{(N-1)}(k)}\right] \end{aligned}$$

要素0は1であるが、他の要素は係数比であり、適応動作における収束状態によって決定される。また、収束過程におけるタップ係数は非定常であるため $\mathbf{R}'$ は時間平均ではなく集合平均によって評価しなければならない<sup>9)</sup>。 $\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^T(k)$ を以下に示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k)\mathbf{X}^T(k) &= \begin{bmatrix} f_0(k)x^2(k) \\ f_0(k)x(k)x(k-1) \\ f_0(k)x(k)x(k-2) \\ \vdots \\ f_0(k)x(k)x(k-N+1) \\ \dots \\ f_{(N-1)}(k)x(k-N+1)x(k) \\ f_{(N-1)}(k)x(k-N+1)x(k-1) \\ f_{(N-1)}(k)x(k-N+1)x(k-2) \\ \vdots \\ f_{(N-1)}(k)x^2(k-N+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_i(k) &= \frac{\tilde{h}_i(k)}{h_i(k)} \\ &= \frac{2\mu \sum_{j=0}^{k-1-i} \tilde{e}(j)x(j-i) + h_i(0)}{2\mu \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{e}(j)x(j-i) + h_i(0)} \\ i &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

である。なお、 $h_i(0)$ は初期値を表し、 $h_i(0) = 0$ と仮定すると

$$\begin{aligned} f_i(k) &= \frac{\tilde{h}_i(k)}{h_i(k)} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{k-1-i} \tilde{e}(j)x(j-i)}{\sum_{j=0}^{k-1} \tilde{e}(j)x(j-i)} \\ i &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

となる。

以下では、簡単のために $N=4$ について検討し、その結果を $N$ に一般化する。 $N=4$ に対する $\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^T(k)$ を次に示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k)\mathbf{X}^T(k) &= \begin{bmatrix} f_0(k)x^2(k) & f_1(k)x(k-1)x(k) \\ f_0(k)x(k)x(k-1) & f_1(k)x^2(k-1) \\ f_0(k)x(k)x(k-2) & f_1(k)x(k-1)x(k-2) \\ f_0(k)x(k)x(k-3) & f_1(k)x(k-1)x(k-3) \\ f_2(k)x(k-2)x(k) & f_3(k)x(k-3)x(k) \\ f_2(k)x(k-2)x(k-1) & f_3(k)x(k-3)x(k-1) \\ f_2(k)x^2(k-2) & f_3(k)x(k-3)x(k-2) \\ f_2(k)x(k-2)x(k-3) & f_3(k)x^2(k-3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

次いで、 $f_0(k) \sim f_3(k)$ を求めると

$$\begin{aligned} f_0(k) &= \frac{\tilde{h}_0(k)}{h_0(k)} = \frac{h_0(k)}{h_0(k)} = 1 \\ f_1(k) &= \frac{\tilde{h}_1(k)}{h_1(k)} \\ &= \frac{h_1(k) - 2\mu \tilde{e}(k-1)x(k-2)}{h_1(k)} \\ &= 1 - 2\mu \frac{\tilde{e}(k-1)x(k-2)}{h_1(k)} \end{aligned}$$

以下、同様にして、

$$\begin{aligned} f_2(k) &= 1 - 2\mu \frac{\tilde{e}(k-1)x(k-3) + \tilde{e}(k-2)x(k-4)}{h_2(k)} \\ f_3(k) &= 1 - 2\mu \frac{\tilde{e}(k-1)x(k-4) + \dots + \tilde{e}(k-3)x(k-6)}{h_3(k)} \end{aligned}$$

となる。次に、これらの期待値を求める。

$$E[f_0(k)] = 1$$

$$E[f_1(k)]$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - 2\mu \frac{E[\tilde{e}(k-1)x(k-2)]}{E[h_1(k)]} \\
&= 1 - 2\mu \frac{E[\{d(k-1) - \tilde{y}(k-1)\}x(k-2)]}{E[h_1(k)]} \\
&= 1 - 2\mu \frac{E[\{d(k-1) - \mathbf{X}^T(k-1)\tilde{\mathbf{H}}(k-1)\}x(k-2)]}{E[h_1(k)]}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&E[\{d(k-1) - \mathbf{X}^T(k-1)\tilde{\mathbf{H}}(k-1)\}x(k-2)] \\
&= E[d(k-1)x(k-2)] \\
&\quad - E[\mathbf{X}^T(k-1)\tilde{\mathbf{H}}(k-1)x(k-2)] \\
&= \sigma^2 h_1^{opt} - \sigma^2 E[h_1(k-2)] \\
&= \sigma^2 E[c_1(k-2)]
\end{aligned}$$

であるので、

$$E[f_1(k)] = 1 + 2\mu\sigma^2 \frac{E[c_1(k-2)]}{E[h_1(k)]}$$

となる。以下、同様にして、

$$\begin{aligned}
E[f_2(k)] &= 1 + 2\mu \\
&\quad \sigma^2 \frac{E[c_2(k-3)] + E[c_2(k-4)]}{E[h_2(k)]} \\
E[f_3(k)] &= 1 + 2\mu \\
&\quad \sigma^2 \frac{E[c_3(k-4)] + \dots + E[c_3(k-6)]}{E[h_3(k)]}
\end{aligned}$$

となる。以上より、タップ数  $N$  に対して

$$\begin{aligned}
E[f_i(k)] &= 1 + 2\mu\sigma^2 \frac{\sum_{j=1}^i E[c_i(k-i-j)]}{E[h_i(k)]} \\
&\quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

を得る。入力信号が平均0、分散 $\sigma^2$ の白色ガウス雑音であると仮定すると

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \text{diag}[\sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2] \\
&\quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

であるため、 $\mathbf{RE}[\mathbf{F}(k)]$ は対角行列となり、その固有値は

$$\begin{aligned}
\text{eig}[\mathbf{RE}[\mathbf{F}(k)]] &= \sigma^2 E[f_i(k)] \\
&\quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

となる。

以上より、 $\mathbf{RE}[\mathbf{F}(k)]$ は対角行列となり、収束条件式はタップ毎に独立して検討することが可能である。まず、 $N=4$ に対する各タップ毎の収束条件式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
E[c_0(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2\}E[c_0(k)] \\
E[c_1(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2 \\
&\quad - 4\mu^2\sigma^4 \frac{E[c_1(k-2)]}{E[h_1(k)]}\}E[c_1(k)] \\
E[c_2(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2 - 4\mu^2\sigma^4 \\
&\quad \frac{E[c_2(k-3)] + E[c_2(k-4)]}{E[h_2(k)]}\}E[c_2(k)] \\
E[c_3(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2 - 4\mu^2\sigma^4 \\
&\quad \frac{E[c_3(k-4)] + \dots + E[c_3(k-6)]}{E[h_3(k)]}\}E[c_3(k)]
\end{aligned} \tag{10}$$

これらに、

$$\begin{aligned}
c_i(k) &= h_i(k) - h_i^{opt} \\
&\quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned}
E[c_0(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2\}E[c_0(k)] \\
E[c_1(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2 \\
&\quad - 4\mu^2\sigma^4 \frac{E[c_1(k-2)]}{E[c_1(k)] + h_1^{opt}}\}E[c_1(k)] \\
E[c_2(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2 - 4\mu^2\sigma^4 \\
&\quad \frac{E[c_2(k-3)] + E[c_2(k-4)]}{E[c_2(k)] + h_2^{opt}}\}E[c_2(k)] \\
E[c_3(k+1)] &= \{1 - 2\mu\sigma^2 - 4\mu^2\sigma^4 \\
&\quad \frac{E[c_3(k-4)] + \dots + E[c_3(k-6)]}{E[c_3(k)] + h_3^{opt}}\}E[c_3(k)]
\end{aligned}$$

となる。これらより、タップ0は通常のLMSの収束条件式と同じであるが、タップ1～3には新たな項が追加されている。この付加項は、ステップサイズパラメータ、入力信号の分散、そして現時刻と過去における係数誤差の平均値によって決まる。また、タップ番号*i*に対して考慮される係数誤差の時間差は*i*、数は*i*である。

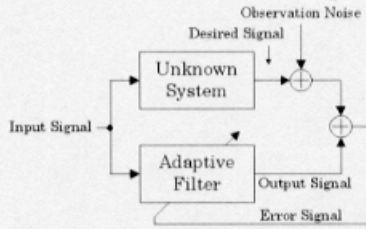


Fig. 4 Simulation model.

以上の結果をタップ数  $N$  に一般化すると,

$$E[c_i(k+1)] = \{1 - \mu D_i(k)\} E[c_i(k)] \quad (11)$$

$$D_i(k) = 2\sigma^2 + 4\mu\sigma^4 \frac{\sum_{j=1}^i E[c_i(k-i-j)]}{E[c_i(k)] + h_i^{opt}} \quad (12)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

となる. 2乗平均の意味での収束条件は,  $D_i(k)$  の和によって上限が規定され次のように表される<sup>9)</sup>.

$$0 < \mu < \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} D_i(k)} \quad (13)$$

## 4. 安定限界

適応過程において, 式 (12) を評価する. 計算機シミュレーションにより, 繰り返しに対する各要素の変化を求めた. シミュレーションは, 図4に示されるシステム同定問題について行った. ここで, 未知システムはタップ数4の低域通過フィルタ, 入力信号の分散は1.0である. 係数の初期値を0として, 500回の独立試行を行いその平均を求めた. 4種類のステップサイズパラメータに対するシミュレーション結果を図3に示す. (a)はステップサイズパラメータが十分に小さい場合であり, 各要素の値は単調に増加して2に収束している. これは, 収束状態に近づくにつれて式 (12) における平均誤差が小さくなる. さらに収束が進むと第2項が第1項に比べて無視できるようになり, 第1項の値である2に収束する. (b), (c)はともに比較的大きなステップサイズパラメータの場合であるが, 各要素とも振動的に増加して2に収束する. (c)は

(b)よりも振動が大きい. しかも, タップ番号が大きいかほど振幅が大きく, 収束するまでに多くの繰り返しが必要である. (d)は上限に近いステップサイズパラメータを選択した場合である. 突発的に大きな値を示しており, 不安定であることがわかる. より高次に対しても同様の傾向を示すことを確認している.

次に, 式 (11) と式 (13) に基づいてステップサイズパラメータの上限を求めるが, 固有値は収束状況に応じて振動的となるため, ステップサイズパラメータの上限も設定したステップサイズパラメータに依存する. 図5に, タップ数4, ステップサイズパラメータ0.11の場合の上限値の変化を示す. これより, 最小値は0.120であり, 時刻の経過とともに0.125に収束することがわかる. 収束状態において0.125に収束する理由は, 前述の通り  $D_i(k)$  の各要素は2に収束するためそれらの総和は8となる. 上限値は総和の逆数であるため, 0.125に収束するのである. また, この例では設定したステップサイズ0.11に対して上限値は0.120であるために安定である. 図6は, ステップサイズを0.02~0.14まで変化させた場合の上限値を表している. ステップサイズが小さい0.02~0.04では, 式 (12) は単調に増加するため上限値は0.125であるが, ステップサイズが増加するにつれて振動的となるため上限値が減少する. これらより, ステップサイズの設定値と上限値が一致する値が安定性を保証する上界となることがわかる.

式 (12) に基づいて求めたNCLMSの安定限界と計算機シミュレーションによる適応動作により求めた安定限界を図7に示す. なお, 入力信号の分散は1.0, 係数の初期値はランダムに与え, タップ数は2~128の2のべき乗値について求めた. また, 比較対象としてLMSの安定限界の理論値も示した. 計算機シミュレーションでは500回の独立試行により安定性を判断したが, 十分な繰り返しの

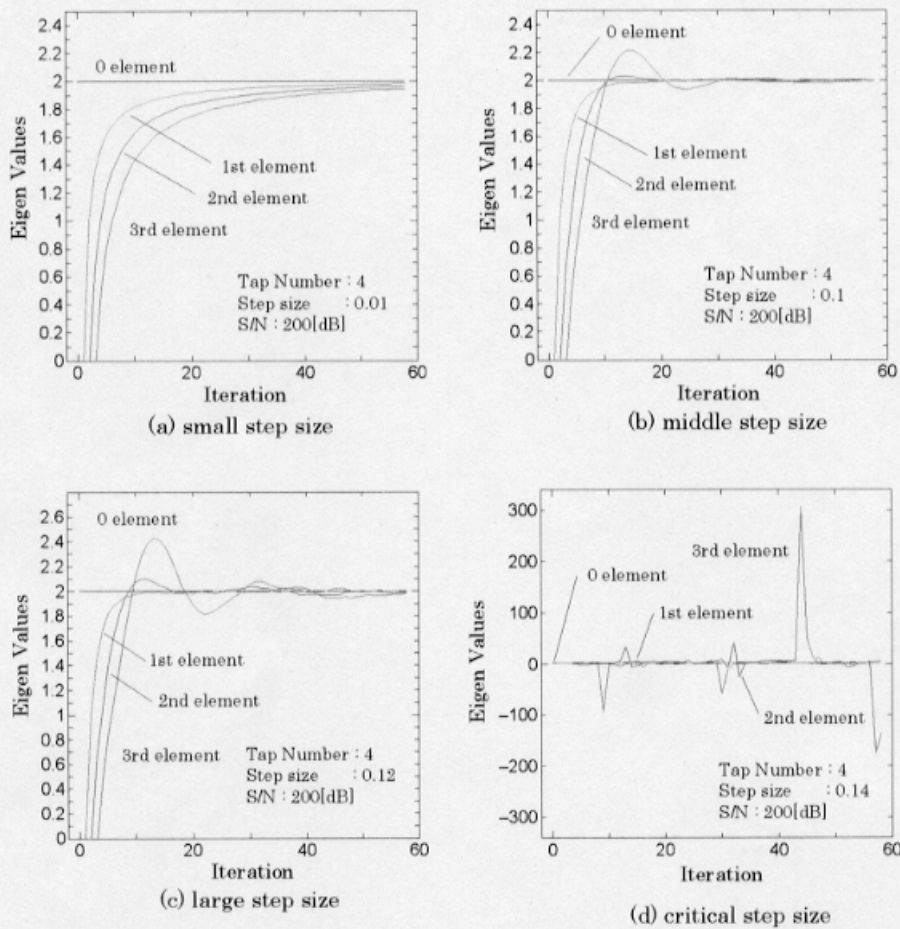


Fig. 3 Variation of  $D_i(k)$  for  $N = 4$ .(a) for small  $\mu$ .(b) for middle  $\mu$ .(c) for large  $\mu$ .(d) for critical  $\mu$ .

後にMSEが0を超える場合を不安定とした。そして、500回の試行において全ての試行が安定である場合に、設定したステップサイズは安定限界を下回ると判断した。

シミュレーション結果は、全ての分散とタップ数において理論値に良く一致している。そして、NCLMSの上限値はLMSよりも小さく、その差はタップ数が32程度までは徐々に広がり、それ以降はLMSの約50%の値で減少している。なお、異なる入力信号の分散に対しても同様の結果が得られることを確認している。

## 5. まとめ

本論文では、NCLMSアルゴリズムの収束条件を導出した。NCLMSとLMSのタップ係数の比を

導入して出力計算式を変換することにより、係数誤差ベクトルの収束条件式を簡潔な再帰式として表現した。次いで、安定限界は適応過程において収束状況に応じて振動的に変化することを示し、ステップサイズパラメータを大きく設定するほど振動が大きくなることも示した。これより、適応過程において示される最小の安定限界値が安定限界となることが明らかになった。タップ数に対する安定限界をLMSと比較すると、タップ数2ではLMSの約78%、タップ数8では約57%、タップ数32～では約50%となることを示した。

今後は、今回の検討結果をもとにNCLMSアルゴリズムの収束速度の改善と効果的なパイプラインアーキテクチャの検討を進める予定である。

## 参考文献

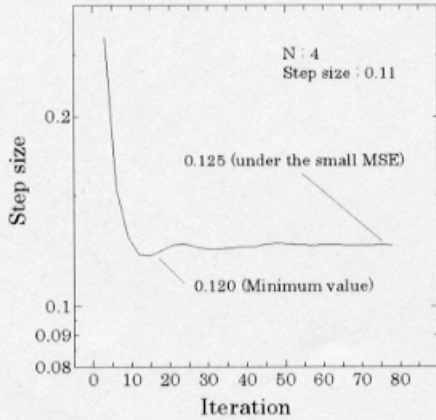


Fig. 5 Variation of the upper bound.

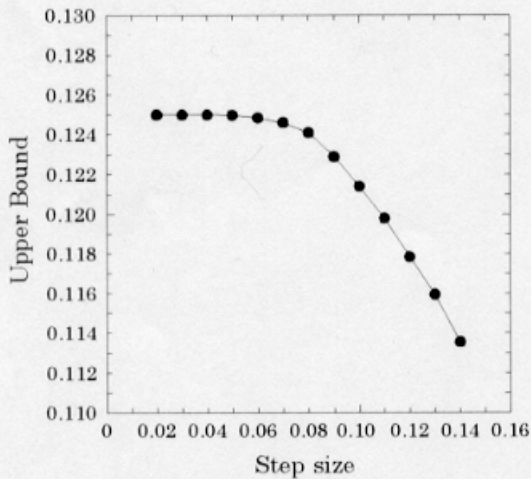


Fig. 6 Variation of the upper bound for the  $\mu$  from 0.02 to 0.15.

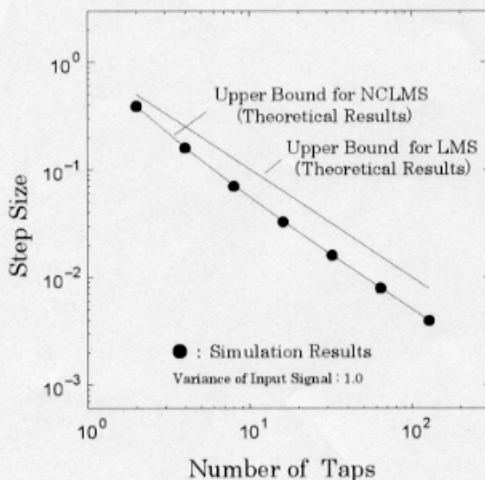


Fig. 7 The upper bound of the NCLMS algorithm for the input variance of 1.

- 1) W.S.Gan, J.J.Soraghan, R.W.Stewart, and T.S.Durrani, "The Non-canonical LMS algorithm(NCLMS):Characteristics and Analysis," IEEE International Conference Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol.3,pp.2137-2140,1991.
- 2) R.W.Stewart, J.J.Soraghan, and T.S.Durrani, "Noncanonical FIR Filters and Adaptive Signal Processing," ELECTRONICS LETTERS 16th March 1989, Vol.25 No.6,pp.414-415.
- 3) W.S.Gan, J.J.Soraghan, R.W.Stewart, and T.S.Durrani, "Comparative Analysis between Noncanonical LMS and LMS Adaptive Filtering," ELECTRONICS LETTERS 23rd May 1991, Vol.27 No.11, pp.947-950.
- 4) W.S.Gan, J.J.Soraghan, R.W.Stewart, and T.S.Durrani, "Stability Bound for Noncanonical LMS," ELECTRONICS LETTERS 27th February 1992, Vol.28 No.5, pp.504-506.
- 5) N.R.Shanbhag and K.K. Parhi, Pipelined Adaptive Digital Filters, Kluwer, Boston, MA, 1994.
- 6) R. Haimi-Cohen, H. Herzberg, and Y. Be'ery, "Delayed adaptive LMS filtering: Current results," Proc. IEEE ICASSP '90, pp.1273-1276, April 1990.
- 7) S.C. Douglas, Q. Zhu, and K.F. Smith, "A pipelined LMS adaptive FIR filter architecture without adaptation delay," IEEE Trans. Signal Processing, vol.46, no.3, pp.775-779, March 1998.