計測自動制御学会東北支部 第 218 回研究集会(2004.10.9)
資料番号 218-12

非最小位相系の状態フィードバックと逆システムによる非干渉化

Decoupling of Non-Minimum Phase Systems by State Feedback and Inverse system

○浅黄 義昭*，渡部 慶二* **，村松 鋭一*，有我 祐一*，遠藤 茂*

○Yoshiaki Asagi*, Keiji Watanabe* **, Eiichi Muramatsu*, Yuuichi Ariga*, Shigeru Endo*

*山形大学工学部 **理化学研究所
*Yamagata University **Riken

キーワード：非干渉化(Decoupling)，非最小位相系(Non-minimum phase)，逆システム(Inverse System)

連絡先：〒992 米沢市城南４－３－１６ 山形大学 工学部 応用生命システム工学科 渡部村松研究室
浅黄 義昭，℡：(0238)21-8426，E-mail：tr359@dipfr.dip.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

化学プラントの制御や内部モデル制御などでは、状態フィードバックや逆システムによる非干渉化が行われる。

非干渉化システムでは、零点と極の消去が生じるため、内部安定にするには不安定零点の取り扱いが鍵となる。不安定零点をもつ対象を、状態フィードバックによって内部安定に非干渉化するための必要十分条件は、不安定零点が行零点になっていることである。そして、この条件が満たされるときに限り、不安定零点は左側に対角に掃きだすことができ、残った最小位相系を非干渉化できる。

本稿では、不安定な非行零点をもつ系に対する状態フィードバック制御による内部安定な非干渉化法を提案する。さらに、この方法をもとに、不安定な非行零点がある場合の内部安定な低域通過右逆システムの包括的な構成法を提案する。

2. 制御対象

つぎの制御対象を考える。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{1}$$

ただし、$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$、$\mathbf{u},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^m$、$\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$、$\mathbf{B}\in\mathbf{R}^{n\times m}$、$\mathbf{C}\in\mathbf{R}^{m\times n}$、$(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 可制御、$(\mathbf{C},\mathbf{A})$可観測とする。

また、伝達関数は、

$$\mathbf{G}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{2}$$

とし、式（1）の制御対象は、虚軸上に零点を持たないとする。さらに、

$$rank\mathbf{\Phi}=m \tag{3}$$

を満たすものとする。ただし、

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix} c_1\mathbf{A}^{\nu_1-1}\mathbf{B}\\ \vdots\\ c_m\mathbf{A}^{\nu_m-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{4}$$

であり、ν_iは、

$$\begin{aligned}&c_i\mathbf{A}^j\mathbf{B}=0,\ j=0,1,2,\cdots,\nu_i-2\\ &c_i\mathbf{A}^{\nu_i-1}\mathbf{B}\neq 0\end{aligned} \tag{5}$$

を満たす正の整数である。

制御対象が不安定行零点をもつと、

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{G}_{\mathbf{RI}}(s)\mathbf{C}_0(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{6}$$

で表すことができる。ただし、$\mathbf{G}_{\mathbf{RI}}(s)$は対角行列で、対角要素は制御対象の不安定零点に等しい零点を持つインナである。さらに不安定非行零点をもてば、列零点に変換する適当な変換行列$\mathbf{J}\in\mathbf{R}^{m}$を用いて、

$$\mathbf{C}_0(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}=\mathbf{G}_{\mathbf{S}}(s)\mathbf{G}_{\mathbf{CI}}(s) \tag{7}$$

と表される。ただし、$\mathbf{G}_{\mathbf{CI}}(s)$は、

$$\mathbf{G}_{\mathbf{CI}}(s)=\begin{bmatrix} g_1(s) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & g_m(s) \end{bmatrix} \tag{8}$$

で、$g_i(s)$は不安定列零点を零点にもつインナである。$\mathbf{G}_{\mathbf{S}}(s)$は不安定零点をもたない行列で、各要素の相対次数、分子の最高次数の係数は、$\mathbf{G}_{\mathbf{0}}(s)\mathbf{J}$（$\mathbf{G}(s)\mathbf{J}$）のそれらに等しい。まとめると次式で表される。

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}=\mathbf{G}_{\mathbf{RI}}(s)\mathbf{G}_{\mathbf{S}}(s)\mathbf{G}_{\mathbf{CI}}(s) \tag{9}$$

3. 状態フィードバックによる非干渉化

不安定零点をもつ制御対象を状態フィードバックによって内部安定に非干渉化するための必要十分条件は不安定零点が行零点であることである。不安定非行零点をもつ式（5）の系を状態フィードバックで内部安定に非干渉化するには、不安定零点を行零点にする必要がある。

そこで、$g_1(s),\cdots,g_m(s)$の最小公倍多項式を$g_c(s)$とし、

$$g_{ci}(s)=\frac{g_c(s)}{g_i(s)} \tag{10}$$

とする。$g_{ci}(s)$を用いて次のような行列を定義する。

$$\mathbf{M}(s)=\begin{bmatrix} g_{c1}(s) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & g_{cm}(s) \end{bmatrix} \tag{11}$$

これを用いて拡大系を

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{M}(s)=\mathbf{C}_{\mathbf{a}}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_{\mathbf{a}})^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{a}} \tag{12}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{a}}=\begin{bmatrix} c_{a1} \\ \vdots \\ c_{am} \end{bmatrix} \tag{13}$$

とする。任意の安定な多項式 $s^{\nu_i}+\alpha_{i1}s^{\nu_i-1}+\cdots+\alpha_{i\nu_i}$ を選び、

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}=\begin{bmatrix} c_{a1}\mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{\nu_1-1}\mathbf{B}_{\mathbf{a}} \\ \vdots \\ c_{am}\mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{\nu_m-1}\mathbf{B}_{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{a}}=\begin{bmatrix} c_{a1}\mathbf{A}^{\nu_1}+\alpha_{11}c_{a1}\mathbf{A}^{\nu_1-1}+\cdots+\alpha_{1\nu_1}c_{a1} \\ \vdots \\ c_{am}\mathbf{A}^{\nu_m}+\alpha_{m1}c_{am}\mathbf{A}^{\nu_m-1}+\cdots+\alpha_{m\nu_m}c_{am} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{\Omega}=diag[\beta_1 \ \cdots \ \beta_m] \tag{16}$$

とする。リカッチ方程式、

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{a}}-\mathbf{B}_{\mathbf{a}}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}^{-1}\mathbf{\Psi}_{\mathbf{a}}\right) \\ &+\left(\mathbf{A}_{\mathbf{a}}-\mathbf{B}_{\mathbf{a}}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}^{-1}\mathbf{\Psi}_{\mathbf{a}}\right)^T\mathbf{X}_{\mathbf{a}} \\ &-\mathbf{X}_{\mathbf{a}}\mathbf{B}_{\mathbf{a}}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}^{-1}\mathbf{\Omega}^2\left(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}^{-1}\right)^T\mathbf{B}_{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}_{\mathbf{a}}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{17}$$

の安定化解$\mathbf{X}_{\mathbf{a}}=\mathbf{X}_{\mathbf{a}}^T\geq\mathbf{0}$を用いて、

$$\mathbf{F}_{\mathbf{a}}=\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}^{-1}\left[\mathbf{\Psi}_{\mathbf{a}}+\mathbf{\Omega}^2\left(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}^{-1}\right)^T\mathbf{B}_{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}_{\mathbf{a}}\right] \tag{18}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{a}}=\mathbf{\Phi}_{\mathbf{a}}^{-1}\mathbf{\Omega} \tag{19}$$

とおくと、$\mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a\mathbf{F}_a$は安定で、

$$\mathbf{C}_a\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a\mathbf{F}_a\right)^{-1}\mathbf{B}_a\mathbf{H}_a \\ = g_c(s)\mathbf{G}_{RI}(s)\Lambda(s) \tag{20}$$

と対角化される。ただし、

$$\Lambda(s) = diag\left[\frac{\beta_i}{s^{\nu_i} + \alpha_{i1}s^{\nu_i-1} + \cdots + \alpha_{i\nu_i}}\right] \tag{21}$$

4. 低域通過右逆システム

制御対象式（2）は安定とする。これに右から安定な$\mathbf{P}(s)$をかけ、

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}(s) \tag{22}$$

とする。$\mathbf{Q}(s)$を真にプロパーな対角行列にできるとき、$\mathbf{P}(s)$を低域通過右逆システムという。

式（7）の$g_{ci}(s)$の分母を分子と等しくとる。そして、極・零点消去を行わずに、可制御、不可観測の形で実現し、新たに拡大系をつくり、前節の計算を行うと次式が得られる。

$$\mathbf{C}_a\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a\mathbf{F}_a\right)^{-1}\mathbf{B}_a\mathbf{H}_a \\ = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{M}(s)\left[\mathbf{I} + \mathbf{F}_a\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a\right)^{-1}\mathbf{B}_a\right]^{-1}\mathbf{H}_a \\ = g_c(s)\mathbf{G}_{RI}(s)\Lambda(s) \tag{23}$$

上式の次数は、制御対象の次数に補償器の次数の２倍を足したものとなる。これを制御対象の次数と補償器の次数を足した次数まで下げるには、$\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}$にすることである。しかし、単に$\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}$にするだけでは、不安定非行零点を行零点にすることができない。そこで、式（１１）の対角要素$g_{ci}(s)$を、$g_{ci}(s)$の分母を分子と等しくした$\overline{g}_{ci}(s)$と置き換えることで、$\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}$かつ不安定非行零点を行零点にすることができる。

よって、低域通過右逆システムは、

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{J}\left[\mathbf{I} + \mathbf{F}_a\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a\right)^{-1}\mathbf{B}_a\right]^{-1}\mathbf{H}_a \tag{24}$$

で与えられる。

5. おわりに

不安定非行零点をもつ系に対する状態フィードバックによる非干渉化と低域通過右逆システムの設計方法を提案した。

今後の課題として、これらの方法を用いてシステムを設計し実験および検証を行っていく。

参考文献

1) 白石昌武著：入門現代制御理論、啓学出版、p131-147(1987)

2) 小林：非干渉制御、最適な制御系設計と各種制御方式の基礎・理論・応用の実際、アイ・エヌ・ジー出版部、p309-327(1993)

3) 山田、木下：状態空間法による安定な低域通過逆システムの新設計法、システム制御情報学会論文誌、16-2、p85-93(2003)