

スミス法のロバスト安定範囲の拡大

Enlargement of Robust Stability of Smith Predictor

山形大学○呉守利 渡部慶二 村松鋭一 有我祐一 遠藤茂

Shouli Wu, Keiji Watanabe, Eiich Muramatsu Yuichi Ariga Sigeru Endo
Yamagata University

Abstract We study the stability of Smith predictor and approximate one. It is shown that it will be possible which the stability range of the latter is wider than that of the former.

キーワード：スミス法 (Smith predictor), 近似スミス法 (Smith predictor), 安定範囲, ロバスト安定, 危険区域。

連絡先：〒992-0062 山形大学理工学研究院システム情報工学専攻 渡部研究室
呉守利, Tel.: 090-6254-4614 E-mail:

1. まえがき

むだ時間系の制御としてよく知られている方法に図 1 に示されるスミス法がある。(図 1)。 $G_p(s)e^{-sL_p}$ は安定的な制御対象、 $G(s)(1-e^{-sL})$ はスミス予測器、 $G_c(s)$ は制御器である。

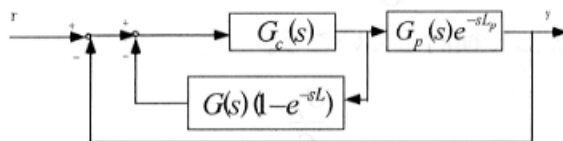


図 1 実際のスミス法の構成

制御対象と予測器の間に mismatches があると、ロバスト安定という問題が出て来るが、従来は制御構造を含めた十分な検討がなかった¹⁾。本研究では $G_c \neq G, L_p \neq L$ ときのロバスト安定性の特徴を検討する。

むだ時間 Pade 一次近似²⁾することによって、ロバスト安定範囲をどのように

拡大するかも検討する。

2. スミス法のロバスト安定性

図 1 のスミス法を考え、制御系の伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_c G_p e^{-sL_p}}{1 + G_c G (1 - e^{-sL}) + G_c G_p e^{-sL_p}} \quad \dots(1)$$

$$= \frac{G_c G_p e^{-sL_p}}{1 + G_c G} \frac{1}{1 + f(s)}$$

$$f(s) = \frac{G_c}{1 + G_c G} (G_p e^{-sL_p} - G e^{-sL}) \quad \dots(2)$$

スミス法が安定するための必要十分条件は、ナイキストの安定判別法により、 $f(j\omega)$ のベクトル軌跡が (-1,0) 点の右側を通ることである。

すべての ω ($\omega \geq 0$) に対し、 $|f(j\omega)| \leq 1$ とする

と、 $|L_p - L|$ の安定許容最大値 A_{\max} を求められる。むだ時間の mismatches に対し、次の

式を満足する範囲でシステムが安定である。

$$\begin{cases} \frac{L_p}{L} < 1 + \frac{A_{\max}}{L}, (L_p > L) \\ \frac{L_p}{L} > 1 - \frac{A_{\max}}{L}, (L_p < L) \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

$G_c = 5, G_p = G = 1/(1+s)$ の場合, $A_{\max} = 0.334$ であり, (4)式で求めた安定範囲と $f(j\omega)$ のベクトル軌跡から求めたものを図2に示す。

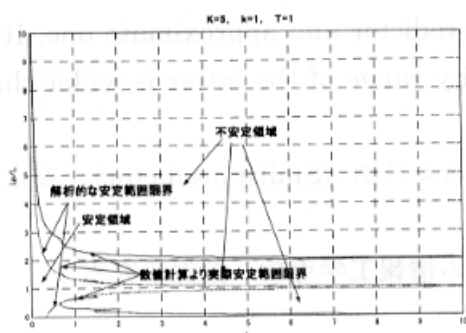


図2 むだ時間ロバスト安定の範囲
($G_c G = 5/(1+s)$)

図2からわかるように, 十分大きいLにたいし(上の例で $L > 0.664$), L_p は0から大きくなるにつれ, システムが安定, 不安定, 安定, 不安定と繰り返して変化していく。その原因は以下に述べる。

システムの開ループ伝達関数は

$$f_o = \frac{\frac{G_p}{G} e^{-L_p s}}{\frac{1}{G_c G} + (1 - e^{-Ls})} \dots\dots(4)$$

である。分母の中に e^{-Ls} を含むために ω の変化につれ, $|1 - e^{-Ls}|$ が0と2の間に周期的に繰り返して変化していく。その影響で $|f_o|$ が1の上下に変化していく。 $|f_o| > 1$ の

とき L_p が f_o の位相が $-\pi$ より小さくなるとシステムが不安定を生じる。

安定範囲を拡大するために, その周期性の変化を止めなければならない。それには e^{-Ls} を $(1 - 0.5s)/(1 + 0.5s)$ と Pade 一次近似することである。

3. 近似スミス法のロバスト安定性

スミス法予測器の e^{-Ls} を $(1 - 0.5s)/(1 + 0.5s)$ に置き換えると, Pade 一次近似スミス法になる(図3)(ここで近似スミス法とよばれる)。開ループの構成と伝達関数は次になる。

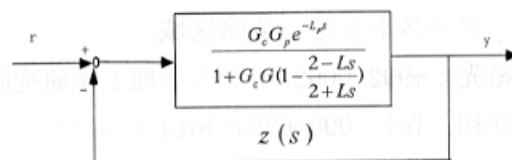


図3

$$f(s) = \frac{\frac{G_p}{G} e^{-L_p s}}{\frac{1}{G_c(s)G(s)} + \frac{2Ls}{2 + Ls}} \dots\dots\dots(5)$$

ここで $\frac{G_p}{G} = \rho$ (ρ は実数である)

として検討していこう。

$$f(j\omega) = \frac{\frac{G_p}{G}}{\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} + \frac{2j\omega L}{2 + j\omega L}} e^{-j\omega L_p} \dots\dots(6)$$

$$Q(j\omega) = \frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} + \frac{2j\omega L}{2 + j\omega L} \dots\dots(7)$$

とすると, 上の式が

$$f(j\omega) = \frac{\rho}{Q(j\omega)} e^{-j\omega L_p}$$

となる。

安定範囲を大幅に拡大するために以下の十分条件を提案する。

i). $Q(j\omega)$ のベクトル軌跡が半径 ρ の円から出ていく前に $\omega L_p < \beta$ 。ただし $\beta = \pi - \angle Q(j\omega)$ 。

ii). $Q(j\omega)$ のベクトル軌跡が半径 ρ の円から出ていってから $|Q(j\omega)| > \rho$ 。

任意の ω , L に対して以上の条件を満足するとシステムは安定である。

上述の Q に関する条件を $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)}$ に対する条件に変換する。

$$P(j\omega) = \frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} \dots\dots\dots(8)$$

$$W(j\omega) = \frac{2j\omega L}{2 + j\omega L} \text{ とすると}$$

$$Q(j\omega) = \frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} + \frac{2j\omega L}{2 + j\omega L}$$

$$= P(j\omega) + W(j\omega) \dots\dots(9)$$

となる。

上述の条件 ii) の式は $|P(j\omega) - (-W(j\omega))| > \rho$ となる。

$-W(j\omega)$ は $(-1,0)$ を中心に半径 1 の下半円である。 L に依存しないで上述の条件 ii) を成立させる十分条件は $P(j\omega)$ の軌跡が $-W(j\omega)$ を中心にし半径 ρ とする円たちが覆った範囲を入らないことである。その範囲は危険区域 Γ と呼ぶ (図 4)。

以上より $G_c(j\omega)G(j\omega)$ が対応する範囲が求めることができる。(図 5)

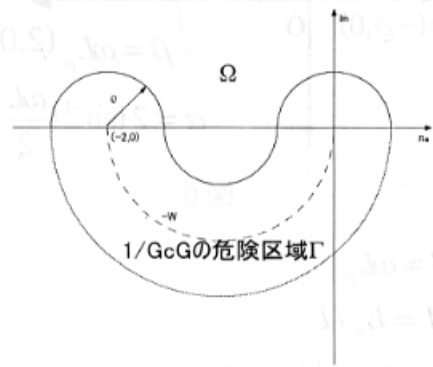


図 4

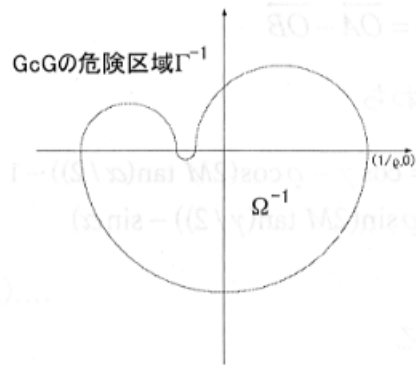


図 5

次に条件 i) から $\frac{L_p}{L} \leq M$ にシステ

ム安定させる $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)}$ の境界条件

を求めよう。

図 6 に A はちょうど $Q(j\omega)$ のベクトルが半径 ρ の円から出る点である。

$M = \frac{L_p}{L}$ という臨界条件とすると、次の

式が得られる。

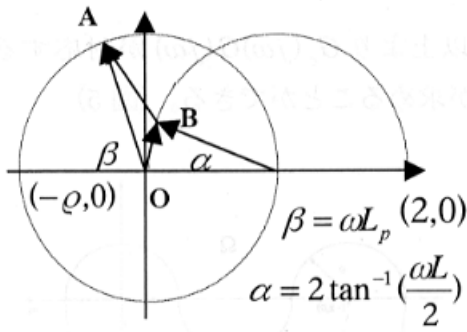


図 6

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \omega L_p \\ M = L_p / L \\ \alpha = 2 \tan^{-1}(\omega L / 2) \\ \overrightarrow{OA} = -\rho \cos \beta + j \rho \sin \beta \dots (10) \\ \overrightarrow{OB} = 1 - \cos \alpha + j \sin \alpha \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \end{array} \right.$$

すなわち

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= \cos \gamma - \rho \cos(2M \tan(\alpha/2)) - 1 \\ &+ j(\rho \sin(2M \tan(\alpha/2)) - \sin \alpha) \end{aligned} \dots (11)$$

である。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= x + jy \text{ とすると,} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \cos \gamma - \rho \cos(2M \tan(\alpha/2)) - 1 \\ y = -\sin \gamma + \rho \sin(2M \tan(\alpha/2)) \end{array} \right. \end{aligned} \dots (12)$$

となる (図 7)。境界線と x 軸囲まれた範囲が Φ と呼ぶ。十分条件 i) より,

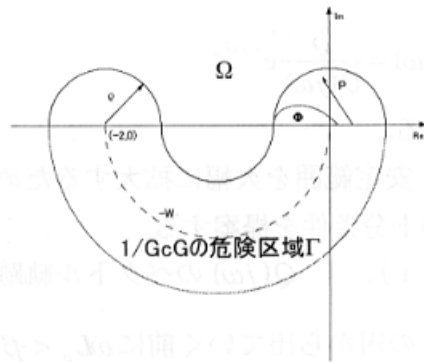


図 7

$\frac{L_p}{L} \leq M$ の範囲内でシステム安定するため、 $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)}$ の軌跡は半径 ρ の円から出る前に Φ に入られない。 $\rho=1, M=2.21$ のとき境界線が図 7 に示される。

$\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)}$ の条件を $G_c(j\omega)G(j\omega)$ の境界条件に変換するために、 $\frac{1}{BA} \equiv \frac{1}{x+jy} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とし、

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right. \dots (13)$$

が得られた。 $\frac{L_p}{L} \leq M$ の範囲内でシステム安定するため、 $G_c(j\omega)G(j\omega)$ の軌跡は入れない範囲 Φ^{-1} は

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \tan^{-1} \frac{\sin \alpha - \rho \sin(2M \tan(\alpha/2))}{\cos \alpha - \rho \cos(2M \tan(\alpha/2)) - 1} \\ r > \frac{1}{\sqrt{2 + \rho^2 - 2 \cos \alpha + 2 \rho \cos(2M \tan(\alpha/2)) - 2 \rho \cos(\alpha - 2M \tan(\alpha/2))}} \\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \quad (\sin \alpha = \rho \sin(2M \tan(\frac{\alpha_0}{2})), \alpha_0 \neq 0) \end{array} \right.$$

.....(14).
 である(図8)。

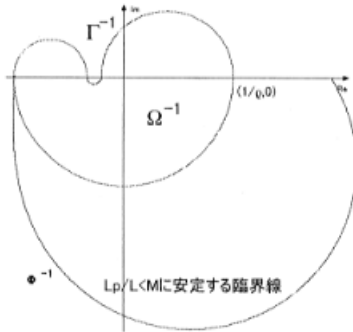


図8

つまり、 $G_c(j\omega)G(j\omega)$ の軌跡は Ω^{-1} に入ってからまた出てこないように L に依存しない

で広い範囲 $\frac{L_p}{L} \leq M$ でシステム安定することができる。しかも $G_c(j\omega)G(j\omega)$ の軌跡

は半径 $\frac{1}{\rho}$ の円に入る前に与えられた ρ と

式(14)によって入らない最大範囲 Φ^{-1} から M が求められる。逆に与えられた ρ と M に対して $G_c(j\omega)G(j\omega)$ の軌跡は Ω^{-1} に入る前に ρ と M に決定された区域 Φ^{-1} を入らないで、 Ω^{-1} に入ってからまた出てこないように

システムは $\frac{L_p}{L} \leq M$ の範囲で安定である。

そして、 $G_c(j\omega)$ が選ばれる。このほか、 M を大きくなるためにどのぐらい ρ を減少させる必要があるかも明らかになった。

4. 結論

この研究を通してスミス法は近似スミス法にすることで、 $G_c/G = \text{定数}$ の場合ロバスト安定範囲を拡大する問題を解決した。

システムが $L_p/L < M$ で安定させるために、制御器 G_c は何かによって選ぶかが明らか

かになった。

一方、近似スミス法で与えられた制御器 G_c に対してシステムのロバスト安定範囲が広くなれるか、また、できる場合、どのぐらい広くなれるかも分かるようになった。この方法はロバスト安定的な望ましいむだ時間予測システムを自由に設計することに役に立つと思っている。

5. 文献

- 1, 渡部慶二, むだ時間システムの制御, 計測自動制御学会, 1993年
- 2, 茅陽一, 自動制御工学, 共立出版社, 1969年