

2重振り子の第2アームの回転制御

Rotating control of secondary arm of double pendulum

土屋 幸男 浅坂 悠太

Yukio Tsuchiya Yuta Asazaka

八戸工業高等専門学校

Hachinohe National College of Technology

キーワード：2重振り子(double pendulum)、回転制御(rotating control)、
第2アーム(secondary arm)

連絡先：〒039-1101 八戸市田面木字上野平16-1 八戸高専 電気情報工学科

Tel:0178-27-7280, E-mail:tsuchiya-e@hachinohe-ct.ac.jp

1. はじめに

2重振り子はカオス現象を実現できる装置の一つとされている。本研究報告は、「2重振り子の振幅制御」¹⁾の継続研究にあたる。前回は2重振り子の第1アームを強制振動させ、第1アームの振幅角度と第2アームの振幅角度をほぼ同一にする制御方式について報告した。

本報告では前回の報告を進展させ、第1アームの振幅制御を行うことで第2アームをある一定時間の間、連続的に回転運動させるを試みた。結果として再現性のある回転運動を行う1つの制御方式を考案したので、これを「(2重振り子の)逆動作指令制御」と名付け、報告する。なおこの原理は古典制御理論の1つであるバングバング制御(bang-bang control)に近い。

2. 二重振り子装置の構成

装置の接続図は図1のとおりである。

第1アームはメガトルクモータとドライブユニット(ESA-J1003A25-21, ESA-25:日本精工)で駆動している。振り子の回転制御はシーケンサ(KZ-A500:KEYENCE)が行っている。

モータのレゾルバからは第1アームと鉛直線との角度 θ_1 がわかり、他方、関節部に取りつけ

たエンコーダ(0IH35-2000 P4-L6-5V:多摩川精機)からは第1アームと第2アームとの開き角度 θ_2 がわかり、それぞれA/D入力部から高速カウンタを用いて値を取り込んでいる。これらの θ_1 、 θ_2 の角度信号の状態に応じて次の出力状態を決定する。ここでフィードバック制御が構成されている。

また角度の計測では高速カウンタの2通倍モードを使用している。なおシーケンサを制御機器としているので、制御方法としては外部クロックに同期する形で第1アームを振らす制御や、逆に本体のスキャン時間を利用する実時間制御の2つの方法が考えられる。

2重振り子本体の外観を図2に示す。

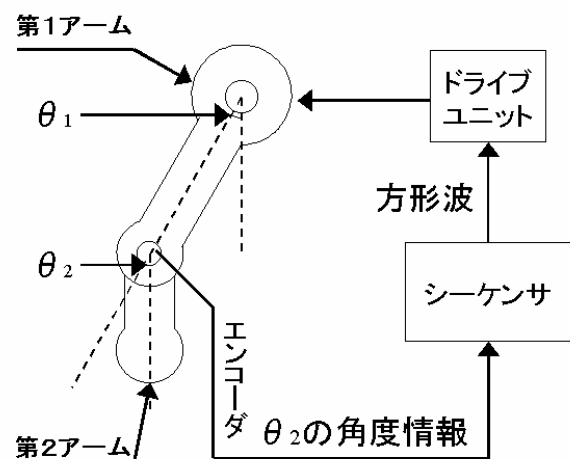


図1. 装置構成図



図2. 振り子の実体写真

3. 基本動作

3-1 駆動方法1（振幅制御）

ここで述べる振幅制御は第1アームの駆動にあたり、位置（角度 θ_1 ）とその時間をあらかじめ指定（プログラム化）する制御方法を言う。

まず θ_2 を0度として第1アームを正弦波振幅させるときの例を図3に示す。

第1アームの振幅角を確保するために必要とされるモータのトルクはドライブユニットの（入力）調節電圧を指定することで対応できる。図3での $+A_v$ 、 $-A_v$ は第1アームの正側と負側の最大の駆動振幅角を発生させるアナログ電圧に相当する。

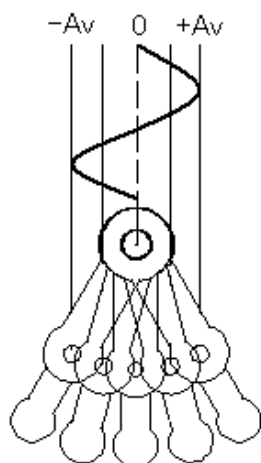


図3. 正弦波振幅での動作概念

一方、第1アームの振幅角度に対応するタイミングはシーケンサの内部クロックで与える。たとえば第1アームを正弦波で駆動する場合は、1パルスを 3° として120パルスで1周期 360° に相当する。もしも内部クロックが100[Hz]のパルス波であれば10[ms]ごとに 3° 進むので、その振動周期は1.2秒となる。そしてこの時間経過に同期しながら、調節電圧で指定する位置に第1アームが移動する。

しかし第2アームの動きに着目すると、第1アームの振動周波数や振幅の違いによりこの動きが異なる。一例をあげると図4に示すように方向転換時に第2アームが外側に振り出される基準振動（normal mode of vibration）が見られる。

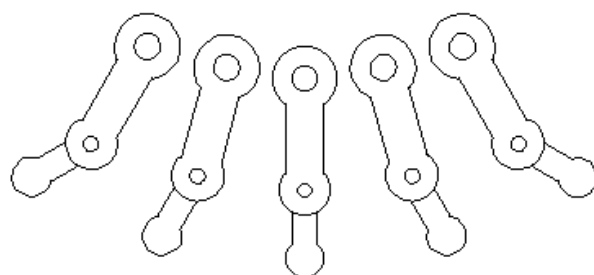


図4. 外側に振れる第2アーム

3-2 仮説

本研究では第1アームの振れをおよそ30度以内にしつつ、第2アームを回転させることを目的としている。このため第1アームの方向転換時のトルクを大きくすることにより第2アームの外側への振れを大きくできるのではないかと、またそのトルクが強ければ回転運動が起こるのではないかと仮説を立てた。

まず第1アームの方向転換時のトルクを強めるその単純な方法はバングバング制御のように逆方向動作のトルクを与えることである。このため図5の①正弦波の代わりに②矩形波を与えることとした。

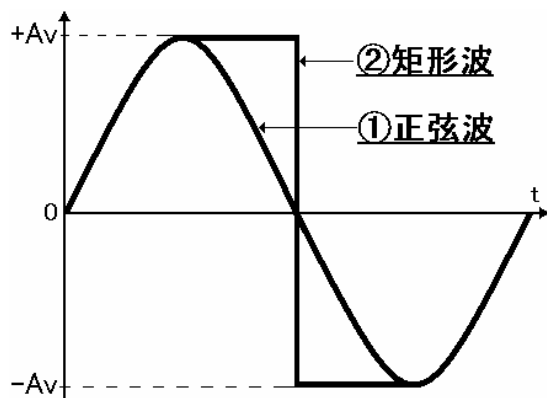


図 5. 波形の整形

3-3 駆動方法 2（逆動作指令制御）

第 1 アームと第 2 アームがそれぞれ自由振動をする場合の二重振り子はカオス運動をするとして知られている。しかし本研究では第 1 アームはその動きが 3-1 で示したようにプログラム化されている。まず始めに第 2 アームを回転させる目的で、 θ_2 の角度（状態）信号を第 1 アームを振らせるための制御信号として使用する。すなわち θ_2 の値に基づき θ_1 を制御するということである。図 6 に図示する。

この制御の考え方は第 2 アームが A の範囲にある時は第 1 アームを + 側へ回転させる。同様に B の範囲にあるときは - 側へ回転させるというものである。以下に詳しく述べる。

最初の立ち上げ時点では第 1 と第 2 アームをともに手で真下に下げる（鉛直にする）。ところが実際には間接部の摩擦が少なくなるようにベアリングを使用しているので、第 2 アームは微

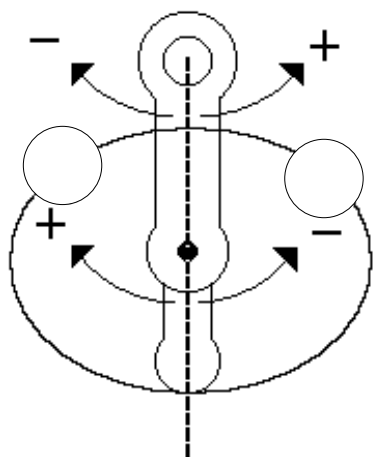


図 6. 第 1 アームの回転方向決定の考え方

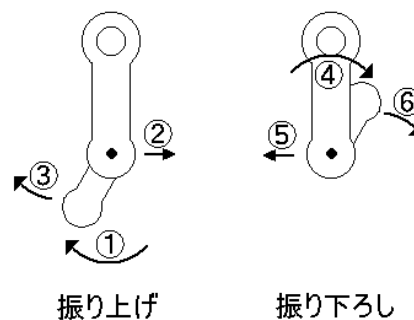


図 7. 回転時の動作概念図

妙に振動している。このためその位置は A 側、もしくは B 側のどちらかに入る。ここで第 1 アームは左右どちらかに振られ、結果として第 2 アームは強く振りあがる動きを見せ、さらには回転運動に入る。

回転運動時点の動作の概念を図 7 に示す。例えば①方向に第 2 アームが移動してきたときに、条件より第 1 アームは②方向にトルクが働く。その反動によって、第 2 アームは③の方向へと加速し、振りあがる力が働く。次に④方向に第 2 アームが回転してきたときには、条件より第 1 アームは⑤方向に力を受ける。その反動により第 2 アームは⑥方向へと加速され、振り下ろす力が働く。そしてこの振り上げと振り下ろしの繰り返しにより第 2 アームの回転が持続する。

図 7 は時計方向の回転の例であるが、反時計方向でも同一の原理で回転運動が持続する。

以上の制御の考え方はバングバング制御に近いのであるが、本研究ではこれを逆動作指令制御と名付ける。この方式の採用で 3.1 章の振幅制御のように第 1 アームの位置と時間をプログラム化する必要がなくなる。

3.4 振幅制御と逆動作指令制御との比較

この種の制御では、第 2 アームの最低の振動周期と同アームの角度サンプリング時間の長さの関係が制御方式を決める。すなわちほぼ満足できる第 2 アームの制御のためには高速応答が必要であり、このため

(第 2 アームの最低の振動周期) \gg

(同アームの位置のサンプリング時間) (1)

の関係が必要であり、およそこの値は 200 : 1 以上が欲しい。なおこの値は回転角に直すと約 $2[^\circ]$ に相当する。

まず実測によると実験に供した第 2 アームの最低の回転数は約 $2[\text{Hz}]$ で、その周期は $500[\text{ms}]$ である。

ここで振幅制御方式を採用するとき、今回の研究に使用したクロックパルスの最小周期は $10[\text{ms}]$ であり、3.1 章で述べたケースでは第 1 アームの振動の 1 周期に $1.2[\text{s}]$ を必要とし、現実性が無い。また $10[\text{ms}]$ に対応させて矩形波を発生させたと仮定してもその比は $500[\text{ms}] : 10[\text{ms}]$ すなわち 50:1 であり制御精度に期待が持てない。さらに第 2 アームが回転し続けたとしても、同アーム最低位置点から持ち上がる時と、最高位置点から降下する時（すなわち図 7 の振り上げ、振り下ろしのこと。）ではその動作に要する加速度が異なるので、加速トルクを与える第 1 アームの動作をプログラム化することは困難である。以上の点で今回の実験設備機器を使用する場合、振幅制御方式は現実性に欠ける。

一方、シーケンサのプログラムのスキャンタイムに注目するとこれは約 $1[\text{ms}]$ であり、単純に比率を計算するとこれは 500:1 であり、2 重振り子のモーション制御への適用が容易であることがわかる。そこで本研究ではこのスキャンタイムを使う実時間制御を採用する。

3.5 逆動作振幅角度

第 1 アームの振幅角を決めるトルクは 3.1 章で述べたようにドライブユニットの（入力）電圧 A_v で指定できる。しかし、この電圧と振幅角の関係はアームのサイズや材質が変わることで異なる。そこで装置に依存しない評価方法が求められる。そこで $\theta_2 = 0$ 度になるように固定した上で、第 1 アームの振幅角度 θ_1 を作るために必要なトルクを生み出す A_v の電圧値で表現する。

このときの角度を逆動作振幅角(the swing angle of reverse movement) θ_{1s} とする。また必要な電圧を振幅制御電圧（ただし、以下では振幅角と略記する。）とする。表 1 にこの考え方

表 1. 振幅角 θ_{1s} と制御電圧の対応表

$\theta_{1s}[^\circ]$	振幅制御電圧[V]
10	A_{v10}
12	:
14	:
16	:
18	:
20	A_{v20}
22	:
24	:
26	:
28	:
30	A_{v30}

を示す。なお両者の関係は線形関係にある。

4. 実験

4-1 制御可能範囲

逆動作指令制御を行った結果では以下のことが判明した。

- $\theta_{1s} = 10[^\circ]$ 以下では、周期的に振れるだけで回転運動を見せることはない。しかし、 $10[^\circ]$ の時は第 1 アームの最大振幅時に第 2 アームは外側に振れる基準振動を示す。（図 4 に示す状態の同じ様子）。
- $\theta_{1s} = 12 \sim 18[^\circ]$ で回転運動が見られる。しかし振りあがって回転運動を行うまでに往復する回数がランダムである。さらに回転運動が時計回り方向で始まるか反時計回り方向で始まるかランダムである。
- $\theta_{1s} = 20[^\circ]$ で、規則的な運動を見せた。第 1 アームの 2 往復後に第 2 アームが振れあがり、回転運動をする。約 15~20 回転したのち回転運動は停止し、そこからはランダムな動きとなった。これは回転終了時の第 2 アームの場所により、次の動きが決定されるためであると考えられる。したがって、一回目の回転が終わるまでは制御が出来ているが、そのあとは、制御できていない。分かりやすくまとめると図 8 のようである。
- 逆動作振幅角 $\theta_{1s} = 20[^\circ]$ 以上になると、さらに回転の速度が上がり、回転数も増加する。しかし、逆動作振幅角 $\theta_{1s} = 30[^\circ]$ を超えたあ

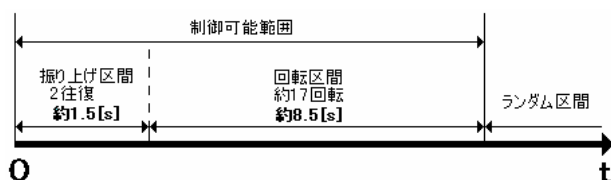


図 8. 制御可能範囲略図

たりでは、第 1 アームが回転しそうになるため、それ以上は計測していない。

4-2 むだ時間の挿入

逆動作指令制御の有効性を確認するため、第 2 アームの位置（角度）を計測してから第 1 アームを振るための指令を出すまでの遅れ時間について、どの程度のむだ時間が許されるのかについて調べた。

はじめにむだ時間が入ることで回転が継続するのかしないのかで判定した。ただし第 2 アームの回転が生ずる位置は、 θ_{1S} がおよそ 30°] である。その結果を図 9 に示す。ここで境目に当たるところではむだ時間を 1[ms] 単位で変化させてその状況を詳細に調査した。ここでむだ時間が無い状態では θ_{1S} が 20°] から回転運動が始まったが、むだ時間の挿入により θ_{1S} が 18°] 時から始まっていることが新たに判明した。これは第 2 アームが A もしくは B 領域に入った直後、直ちにトルク出力を出すことに比べて、むだ時間を少し入れる方が振り上げ時点のアームの移動速度の低下に伴い逆動作のトルクが少なく済み、逆に振り下ろしではアームの降下速度が加速されるからである。

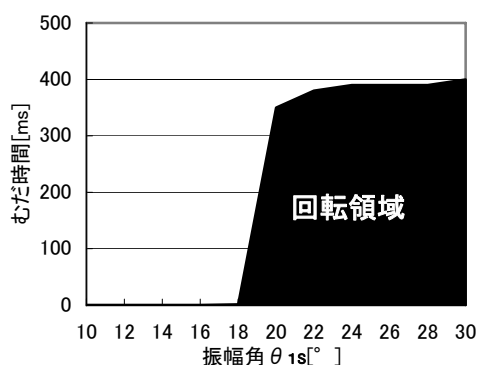


図 9. 回転領域

なお、 $\theta_{1S} = 30^\circ$] の制約を付けた理由は、これ以上では本システムが危険な動作に入ることが予想されたためである。

一方、図 9 によると回転運動が停止する限界のむだ時間は振幅角 18°] 以上では約 350～400[ms] である。この値は第 2 アームの理論的な最低回転数である約 2[Hz] の周期約 500[ms] の約 0.7～0.8 倍である。この値は第 2 アームの逆動作タイミングに入るため停止するためと考える。なお、 θ_{1S} が $12\sim 16^\circ$] では、反転に要するトルクが不足している。

その他気付いた事としては、 θ_{1S} が $20\sim 30^\circ$] の範囲では無駄時間が 30[ms] 程度挿入されていても、第 2 アームはある程度規則的に回転する。しかし、それ以上の無駄時間が入ると回転が始まるまでの振り方や、回転後においてもその動きにランダム性が見られることである。

4-3 第 2 アームの回転周波数の測定

第 2 アームの回転周波数と振幅角の関係についての特性を図 10 に示す。

回転周波数は、振幅角 θ_{1S} の増加に伴い増加している。この図からは第 1 アームの振幅角 θ_{1S} は、単純に第 2 アームを回転させようとする力だと考えることができ、その力が強いほど第 2 アームが早く回転する。さらに、 $\theta_{1S} = 12^\circ$] の時に 1.87[Hz] になることを確認したが、これ以下では回転しなかった。すなわち第 2 アームが回転するための最低周波数は 1.87[Hz] であると考えることができる。

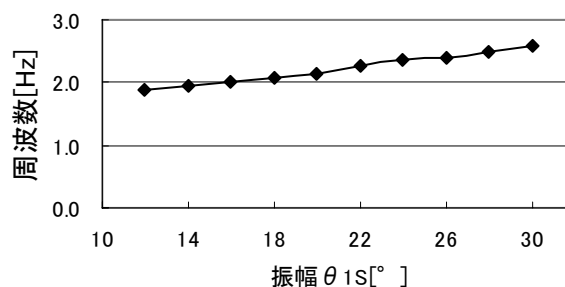


図 10. 振幅角—回転周波数特性

4-4 第2アームの理論回転周期

第2アームを固定軸の単振り子としたときの振り子の（回転時の）周期の理論式は²⁾ 次式で与えられる。

$$T = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \theta}} \quad [\text{s}] \quad (2)$$

この式に第2アームの重心、慣性モーメント³⁾ から求めた相当長さ $l = 0.081[\text{m}]$ 、重力加速度 $g = 9.8[\text{m/s}^2]$ 、 $k = 1.01[\text{rad}]$ を代入し、数値積分により理論周期 T を求めると、 $T = 0.43[\text{s}]$ 、周波数は $2.29[\text{Hz}]$ が得られ、実測値に近い値になっている。

5. まとめ

今回の研究では2重振り子の第1アームの振らせ方として、従来行っていた位置と時間をプログラム化する振幅制御を採用せず、新しく開発した逆動作振幅制御に従った。

結果として第2アームを一定時間回転させることに成功した。これは回転し始めてから一定の時間、回転運動を持続させるような動きを見せるものである。

さらに、第2アームの回転周波数を測定し、かつ単振り子としたときの最低回転周波数を求める一方、回転運動を行う限界周波数を理論的に求めた。結果としてこれら2つの値が近いことを確認した。

このほか逆動作指令制御にむだ時間を入れてもこれが $30[\text{ms}]$ 程度であれば第2アームはある程度規則的に回転するが、それ以上の無駄時間では第1アームや第2アームの振れはランダム性が増し、カオス的になることが判明した。

参考文献

- 1) 齊藤誠、土屋幸男：「2重振り子の振幅制御」，計測自動制御学会東北支部研究集会，188-2，(2000.6.23)
- 2) 「力学(改訂版)」裳華房、原島鮮著、昭和45年、pp. 84-94.

3) インターネット JavaScript による重心の計算

<http://www.fem.gr.jp/fem/calculus/green/green7.html>