計測自動制御学会東北支部 第245回研究集会 (2008.10.24)
資料番号 245-19

線形入力むだ時間系のモデル追従形状態予測制御系

State Predictive Model Following Control System for the Linear System with Input Time-Delay

○王 大中，大久保 重範

○Dazhong Wang, Shigenori Okubo

山形大学 工学部

Faculty of Engineering, Yamagata University

キーワード： むだ時間(time-delay)，状態予測 (state predictive)，
外乱 (disturbances)，モデル追従制御系 (model following control system)

連絡先： 〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科
大久保 重範,Tel.: (0238)26-3245, E-mail: sokubo@yz.yamagata-u.ac.jp
王 大中，Tel.: (0238)26-3245, E-mail: wdzh168@hotmail.com

1. はじめに

モデル状態予測制御は，制御対象の有する制約が合理的に扱える制御法のひとつであり，オンライン計算により制御入力を逐次決定してゆく方法である．そして最近では，計算機の能力が非常に高まったことを背景に，サンプル時間の短い機械システムの制御，さらには高度な理論計算を要する制御問題にも応用の範囲が広げられている[4]．モデル状態予測制御の応用例(むだ時間を含むシステムがある)は化学プロセスを中心に数多い，文献[5]~[8]が参考になるであろう．

入力にむだ時間のシステムをうまく制御するには，むだ時間経過後に現在の制御入力の効果や兆候を予測しながら制御することである．これらの根本的解決する方法が状態方程式による状態予測制御である[9]．

本設計法では状態方程式に現在時刻の入力が存在することが設計条件の一つであり，現在時刻の入力が存在しない場合に対する設計法の構築が課題となっている．本研究では状態方程式に現在時刻の入力が存在しない線形むだ時間系に対する状態予測モデル追従形制御系の設計を考察する．

まず第2章では制御対象システムおよび参照モデルを設定し，第3章では制御系のMFCSの設計法について提案する．第4章では制御系の内部安定性を示し，第5章では具体的な数値例に基づき，外乱が存在する場合でも制御対象の出力は参照モデルに漸近的に追従することを確認し，実用性を保証した．最後に第6章でまとめる．

2. 問題の設定

入出力及び状態に複数のむだ時間が存在する制御対象は(1)，(2)式とする．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t-L_1) + B_2u(t-L_2) + d(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (2)$$

参照モデルを(3),(4)式で示す.

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r_m(t) \tag{3}$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \tag{4}$$

各ベクトルの次元は$x(t)$と$d(t) \in R^n$, $u(t)$; $y(t)$と$d_0(t) \in R^l$とする.ここで, $x(t)$は状態変数, $u(t)$は制御入力, $y(t)$は制御対象の出力, $d(t)$と$d_0(t)$は有界な外乱である. L_1, L_2はむだ時間であり, $0 \leqq L_1 < L_2$とする. $x_m(t) \in R^{n_m}$, $r_m(t) \in R^{l_m}$, $y_m(t) \in R^l$はそれぞれ参照モデルに関する状態変数, 参照入力, 参照出力である. A, B_1, B_2, C およびA_m, B_m, C_mは適合する次元の定数行列である. 内部状態$x(t)$は直接入手できないものとする. また, 制御対象と参照モデルの出力誤差は次式で与える.

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \tag{5}$$

この設計においては, 内部状態がすべて有界に保持され, 初期値関数$x(t) = x_0(t)$ $(t \leqq 0)$ $\quad u(t) = u_0(t)$ $(t < 0)$に対し, $t \to \infty$で$e(t) \to 0$にするような線形むだ時間系のモデル追従形状態予測制御系(MFCS)の設計法を示す.

3. 制御系の設計

一般に信号$z(t)$の時間L_2経過後の予測信号を$\hat{z}(t) = z(t + L_2)$と表すことにする. 予測信号$\hat{x}(t)$を用いて次のように求められる.

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= e^{AL_2} x(t) \\ &\quad + \int_{t-L_2}^{t} e^{A(t-\tau)} B_1 u(\tau + L_2 - L_1) d\tau \\ &\quad + \int_{t-L_2}^{t} e^{A(t-\tau)} B_2 u(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{t-L_2}^{t} e^{A(t-\tau)} \hat{d}(\tau) d\tau\end{aligned} \tag{6}$$

制御対象の状態方程式および出力方程式(1)と(2)式を書き換えれば, つぎの予測方程式が得られる.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \bar{B}u(t) + \hat{d}(t) \tag{7}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + \hat{d}_0(t) \tag{8}$$

ここで, $\bar{B} = e^{A(L_2 - L_1)} B_1 + B_2$である.

仮定 1 $[A, \bar{B}]$ はスペクトル可制御と$[C, A]$ はスペクトル可観測とする, 以下のようになる.

$$rank \begin{bmatrix} pI - A & , \bar{B} \end{bmatrix} = n \tag{9}$$

$$rank \begin{bmatrix} pI - A \\ C \end{bmatrix} = n \tag{10}$$

仮定 2 システムの不変零点$C[pI - A]^{-1}\bar{B}$は安定である.

仮定 3 $|pI - A| \not\equiv 0$

参照モデルの予測信号を用いて$\hat{x}_m(t) = x_m(t + L_2)$は現在の信号$x_m(t)$と過去から現在までの信号$r_m(t)$を用いて次のように求められる.

$$\begin{aligned}\hat{x}_m(t) &= e^{AL_2} x_m(t) \\ &\quad + \int_{t-L_2}^{t} e^{A_m(t-\tau)} B_m \hat{r}_m(\tau) d\tau\end{aligned} \tag{11}$$

参照モデルの状態方程式および出力方程式(3)式と(4)式を予測信号を用いて書き換えれば,次式のようになる.

$$\dot{\hat{x}}_m(t) = A_m \hat{x}_m(t) + B_m \hat{r}_m(t) \tag{12}$$

$$\hat{y}_m(t) = C_m \hat{x}_m(t) \tag{13}$$

制御対象と参照モデルの予測出力誤差は次式で与える.

$$\hat{e}(t) = \hat{y}(t) - \hat{y}_m(t) \tag{14}$$

(7)と(12)式より, $\hat{x}(t)$と$\hat{x}_m(t)$はそれぞれ次式のように表される.

$$\hat{x}(t) = [pI - A]^{-1}\bar{B}u(t) + [pI - A]^{-1}\hat{d}(t) \tag{15}$$

$$\hat{x}_m(t) = [pI - A_m]^{-1} B_m \hat{r}_m(t) \tag{16}$$

(8), (13), (15)と(16), $\hat{y}(t)$と$\hat{y}_m(t)$は

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= C[pI - A]^{-1}\bar{B}u(t) \\ &\quad + C[pI - A]^{-1}\hat{d}(t) + \hat{d}_0(t)\end{aligned}$$

$$\hat{y}_m(t) = C_m[pI - A_m]^{-1} B_m \hat{r}_m(t)$$

になる．$D(p)\hat{y}(t), D_m(p)\hat{y}_m(t)$は次式になる．

$$D(p)\hat{y}(t) = N(p)u(t) + \hat{w}(t)$$
$$D_m(p)\hat{y}_m(t) = N_m(p)\hat{r}_m(t)$$

ここで，$C[pI-A]^{-1}\bar{B} = N(p)/D(p)$, $N(p) = Cadj[pI-A]\bar{B} \in R^{l\times l}$, $D(p) = |pI-A|$, $C_m[pI-A_m]^{-1}B_m = N_m(p)/D_m(p)$, $N_m(p) = C_m adj[pI-A_m]B_m \in R^{l_m\times l_m}$と$D_m(p) = |pI-A_m|$である．

外乱はまとめて次式になる．

$$\hat{w}(t) = Cadj[pI-A]\hat{d}(t) + D(p)\hat{d}_0(t) \quad (17)$$

設計の都合上，$N(p)$と$N_m(p)$をそれぞれつぎのような形式で表す．

$$N(p) = diag(p^{\eta_i})N_r + \tilde{N}(p)$$
$$N_m(p) = diag(p^{\eta_{m_i}})N_{m_r} + \tilde{N}_m(p)$$

ここで，$\partial_{r_i}\tilde{N}(p) < \eta_i$，$\partial_{r_i}\tilde{N}_m(p) < \eta_{m_i}$．$\eta_i$は$N(p)$の各行の$p$に関する次数（最高次数）を表し，$\eta_{mi}$は$N_m(p)$の各行の次数（最高次数）である．$\hat{N}_r$は$l\times l$の定数行列であり,$|N_r| \neq 0$であるとする．外乱$\hat{d}(t)$, $\hat{d}_0(t)$は次式を満たすものとする．

$$D_d(p)\hat{d}(t) = 0,\ D_d(p)\hat{d}_0(t) = 0 \quad (18)$$

また，$D_d(p)$はモニックな多項式であり,外乱のモードを与える。(17)と(18)式より，$\hat{w}(t)$は次式を満たす．

$$D_d(p)\hat{w}(t) = 0 \quad (19)$$

つぎに,ρ次($\rho \geq n_d+2n-n_m-1-\eta_i$)のモニックで安定な多項式$T(p)$を選び，$T(p)D_m(p)$を$D_d(p)D(p)$で割った商と余りをそれぞれ$R(p)$,　$S(p)$とする．

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(p)R(p) + S(p) \quad (20)$$

ここで,各多項式の次数は$\partial T(p) = \rho$, $\partial D_m(p) = n_m$, $\partial D_d(p) = n_d$, $\partial D(p) = n$, $\partial R(p) = \rho + n_m - n_d - n$と$\partial S(p) \leqq n_d + n - 1$である．$\hat{e}(t)$は次式のように求められる．

$$T(p)D_m(p)\hat{e}(t) = D_d(p)D(p)R(p)\hat{y}(t)$$
$$+S(p)\hat{y}(t) - T(p)N_m(p)\hat{r}_m(t) \quad (21)$$

すなわち，

$$\begin{aligned}T(p)D_m(p)\hat{e}(t) &= D_d(p)R(p)\{N(p)u(t)\\ &+\hat{w}(t)\} + S(p)\hat{y}(t) - T(p)N_m(p)\hat{r}_m(t)\\ &= D_d(p)R(p)N(p)u(t) + S(p)\hat{y}(t)\\ &-T(p)N_m(p)\hat{r}_m(t)\\ &= \{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\}u(t)\\ &+Q(p)N_r u(t) + S(p)\hat{y}(t)\\ &-T(p)N_m(p)\hat{r}_m(t) \quad (22)\end{aligned}$$

である．ここで，$Q(p)$は$|Q(p)|$が安定多項式であるような多項式行列であり，次式のように表す．

$$Q(p) = diag(p^{\rho+n_m-n+\eta_i}) + \widetilde{Q}(p)$$
$$\partial_{ri}\widetilde{Q}(p) < \rho + n_m - n + \eta_i$$

本設計法は$\hat{e}(t) \to 0 (t \to \infty)$になるような設計を考えているので,（22）式において$\hat{e}(t) = 0$となるように(22)式の右辺を0と置けば, $|\hat{N}_r| \neq 0$に注意して$u(t)$は次式のように求められる．

$$\begin{aligned}u(t) &= -N_r^{-1}Q^{-1}(p)\{D_d(p)\\ &\cdot R(p)N(p) - Q(p)N_r\}u(t)\\ &-N_r^{-1}Q^{-1}(p)S(p)\hat{y}(t) + u_m(t) \quad (23)\end{aligned}$$
$$u_m(t) = N_r^{-1}Q^{-1}(p)T(p)N_m(p)\hat{r}_m(t) \quad (24)$$

上式の各行列要素の分数式がプロパー(proper)であるためにはつぎの条件を満足しなければならない$(i = 1, 2, \cdots, l)$.

$$\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i \quad (25)$$
$$n_m - \eta_{m_i} \geq n - \eta_i \quad (26)$$

状態空間表示を使って$u(t)$を表すためにつぎのような状態変数を導入する．

$$u(t) = -H_1\xi_1(t) - E_2\hat{y}(t) - H_2\xi_2(t) + u_m(t)$$

$$(27)$$

$$u_m(t) = E_3\hat{r}_m(t) + H_3\xi_3(t) \tag{28}$$

ここで, $u_m(t)$は外生信号である．$\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$はつぎの状態

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1u(t) \tag{29}$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2\hat{y}(t) \tag{30}$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3\hat{r}_m(t) \tag{31}$$

である．多項式行列とシステム行列の間にはつぎの関係がある．

$$H_1[pI - F_1]^{-1}G_1 = N_r^{-1}Q^{-1}(p) \cdot\{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\} \tag{32}$$

$$E_2 + H_2[pI - F_2]^{-1}G_2 = N_r^{-1}Q^{-1}(p)S(p) \tag{33}$$

$$E_3 + H_3[pI - F_3]^{-1}G_3 = N_r^{-1}Q^{-1}(p)T(p)N_m(p) \tag{34}$$

(27)式の右辺は過去の入力信号$u(t)$, 過去から現在までの状態変数フィルタ$\xi_i(t)(i = 1, 2)$および予測出力信号$\hat{y}(t)$, 予測外生信号$u_m(t)$で構成されている．(27)式の$u(t)$は$\hat{e}(t) \to 0(t \to \infty)$すなわち$e(t) \to 0(t \to \infty)$を満足するから, 制御系を構成する内部状態が有界であれば, モデル追従形制御系が実現できる．

4.　内部状態の有界性の証明

制御系に対して外部から入る信号は参照入力$\hat{r}_m(t)$と外乱$\hat{d}(t)$，$\hat{d}_0(t)$である．外乱の特性多項式$D_d(p)$は一般に複素右半平面に根を有するが, (18)式は時間の有限区間で成立するものであり, $\hat{d}(t)$, $\hat{d}_0(t)$は有界とする．すなわち, $d(t)$，$d_0(t)$も有界とする．制御系の初期値関数$x(t) = x_0(t)(t \leqq 0), u(t) = u_0(t)(t < 0), \xi_i(t) = \xi_i^0(t)(t \leqq 0)(i = 1, 2)$は有界とする．参照モデルの状態変数$x_m(t)$は有界であるから$\hat{x}_m(t)$も有界となる．(7)~(8)と(27)~(31)から$u(t)$を消去すると次式が得られる．

$$E_s\dot{z}_s(t) = A_sz_s(t) + d_s(t) \tag{35}$$

$$y_s(t) = C_sz_s(t) + d_{s0}(t) \tag{36}$$

ここで，$z_s(t) = [\hat{x}^T(t), \xi_1^T(t), \xi_2^T(t), u^T(t)]^T$, $y_s(t) = [\hat{y}^T(t), 0, 0, 0]^T$, $C_s = [C, 0, 0, 0]$, $d_{s0} = [\hat{d}_0(t), 0, 0, 0]$ と

$$E_s = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_s = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \bar{B} \\ 0 & F_1 & 0 & G_1 \\ G_2C & 0 & F_2 & 0 \\ -E_2C & -H_1 & -H_2 & -I \end{bmatrix},$$

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} \hat{d}(t) \\ 0 \\ G_2\hat{d}_0(t) \\ -E_2\hat{d}_0(t) + u_m(t) \end{bmatrix}$$

である．内部状態の有界性を証明するために, $z_s(t)$の有界性を示せばよい．A_sの特性方程式は

$$|pE_s - A_s| = |Q(p)|D(p)|N_r|^{-1}\frac{T^l(p)D_m^l(p)}{D^l(p)}|N(p)|$$

となる．さらに, $C[pI - A]^{-1}\bar{B}$の不変零点の多項式を$V(p)$とおけば,

$$C[pI - A]^{-1}\bar{B} = N(p)/D(p)^l = U(p)^{-1}V(p)$$

となるから，$|pE_s - A_s|$は次式のようになる．

$$|pE_s - A_s| = |N_r|^{-1}T(p)^lD_m(p)^l|Q(p)||V(p)| \tag{37}$$

(37)式右辺の各pに関する多項式は恒等的にゼロとはならないため,

$$|pE_s - A_s| \not\equiv 0 \tag{38}$$

となって解の一意性を保証するレギュラー条件は満足されている。さらにE_sの階数及び(37)式の

pに関する多項式としての次数を求めれば,

$$rankE_s = deg|pE_s - A_s| = n + 2\sum_{i=1}^{l}(\rho + n_m - n + \eta_i) \quad (39)$$

を満足することから$z_s(t)$は指数関数モードのみで表されることがわかる．そこで, 式(37)において$T(p), D_m(p), |Q(p)|$は安定多項式であり, $V(p)$が安定ならば, A_sは安定なシステム行列となる．よって, $z_s(t)$は有界である. 以上の議論をまとめれば, つぎの定理を得る.

定理 1 むだ時間L_1, L_2を含む制御対象を次式とする.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t - L_1) + B_2u(t - L_2) + d(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + d_0(t)$$

制御対象の予測状態方程式は次のようになる.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + \bar{B}u(t) + \hat{d}(t)$$
$$\hat{y} = C\hat{x} + \hat{d}_0(t)$$

この系で，条件(1)~(4)を満せば，内部状態が有界なモデル追従形制御系が設計できる.

(1) $[A, \bar{B}]$ はスペクトル可制御と$[C, A]$ はスペクトル可観測とする，以下のようになる.

$$rank\begin{bmatrix} pI - A & ,\bar{B} \end{bmatrix} = n$$
$$rank\begin{bmatrix} pI - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

(2) システムの不変零点$C[pI - A]^{-1}\bar{B}$は安定である.

(3) $|pI - A| \not\equiv 0$.

(4) $rankE_s = deg|pE_s - A_s|$.

証明：本文参照.

5. 数値例

つぎのような入出力及び状態にむだ時間を有するシステムに対し,モデル追従制御を計算する.

参照モデルは次式のように表す.

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m(t)$$
$$y_m(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x_m(t)$$

制御対象は以下のようになる.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t - L_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t - L_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) \end{bmatrix}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} x(t) + d_0(t)$$

ここで,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$$

になる．この例では,

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -36 & -12 \end{bmatrix},\ G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ (i = 1, 2, 3)$$

と設定する.

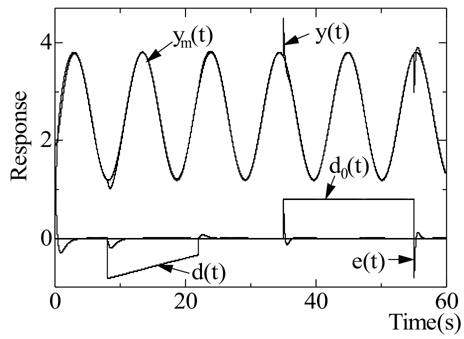

Fig. 1 Responses of the state predictive model following control system for the linear system with input time-delay

外乱$d(t)$，$d_0(t)$と参照入力$r_m(t)$は

$$d(t) = 0.035t - 1.1 \ (8 \leqq t \leqq 22)$$

$$d_0(t) = 0.8\ (35 \leqq t \leqq 55)$$
$$r_m(t) = \begin{cases} 0\ (-L_2 \leqq t < 0) \\ 4sin0.6t + 7.5\ (t \geq 0) \end{cases}$$

とおく．シュミレーションの応答をFig. 1に示す．応答より，$y(t)$は漸近的に$y_m(t)$に収束していることがわかる．

6. おわりに

本稿では状態方程式に現在時刻の入力が存在せず，入力むだ時間が含まれる線形系に対してモデル追従形制御系の設計法を提案し，数値例によりその有効性を示す．

通信ネットワークが発展した現在，ネットワークを介してフィードバックループを構成する制御方式が増えてくるものと考えられる[10]~[14]．この場合，時変の遅延が問題となってきますので，今後これに関連した時変むだ時間系の研究がホットな話題として注目を集めて行く可能性がある．むだ時間システムのモデル追従形制御系の設計もこれに関連の問題へ拡張することである．

参考文献

1) 大久保 重範：外乱を考慮した非線形のモデル追従形制御系の設計,計測自動制御学会論文集，Vol.21, No. 8, 792/799(1985)

2) 大久保 重範：零点の安定配置を使った非線形系モデル追従形制御系，計測自動制御学会論文集，Vol. 28, No. 8, 939/946(1992)

3) 秋山 孝夫，服部 秀郎，大久保 重範：むだ時間を含むシステムに関するモデル追従形制御系の設計,電気学会論文誌C，Vol.118-c,No.4,497/502(1998)

4) 井村　順一：ハイブリッドシステム－今世紀の新しいシステム理論を目指して－，計測と制御，Vol. 42, No. 4,(本号)(2003)

5) 大嶋　正裕：モデル予測制御－理論の誕生．展開．発展－，計測と制御，Vol. 39, No. 5, 321/325(2000)

6) E. F. Camacho and C. Bordons: Model Predictive Control, Spriger-Verlag, London(1999)

7) F.Allgower and A. Zheng (Eds.): Nonlinear Model Predictive Control, Birkhauser, Basel(2000)

8) B. Kouvaritakis and M. Cannon: Nonlinear Model Predictive Control, Theory and Practice, IEE, London(2001)

9) 渡部 慶二： むだ時間システムの制御，計測自動制御学会, コロナ社(1993)

10) J. Cao and J. Wang: Global Exponential Stability and Periodicity of Recurrent Neural Networks With Time Delays, IEEE Transaction on Circuits and System-I: Regular Papers, Vol. 52, No. 5, 920/931(2005)

11) J. Cao and J. Wang: Global Asymptotic and Robust Stability of Recurrent Neural Networks With Time Delays, IEEE Transaction on Circuits and System-I: Regular Papers, Vol. 52, No. 2, 417/426(2005)

12) L. Chen and K. Aihara: Stability of Genetic Regulatory Networks With Time Delay, IEEE Transaction on Circuits and System-I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 49, No. 5, 602/608(2002)

13) M. Yan and Y. Jing: Binary ABR flow control over ATM networks with uncertainty using discrete-time variable structure controller, Journal of Control Theory and Applications, Vol. 6, No. 1, 16/21(2008)

14) J. Yang, Y. Liu, S. Tjin, and N. Ngo: Tunable Chirped Fiber Grating Based Variable Time-Delay Network for Phased-Array Antenna Beamforming, International Journal of Infrared and Millimeter Waves, Vol. 24, No. 4, 593/601(2003)

15) Y. Gu, D. Towsley, C. V. Hollot and H. Zhang: Congestion Control for Small Buffer Hight Speed Networks. In Proceedings of IEEE/INFOCOM, 2007.