

回転型倒立振り子における安定姿勢のための 適応極配置制御系の設計

Design Of Adaptive Pole Placement Control for Stable Postures in Rotary Model Handstand Pendulum

武田修一*, 天野耀鴻*

Shuichi Takeda*, Yoko Amano*

*日本大学大学院 工学研究科 電気電子工学専攻

*Nihon University Graduate School of Engineering, Electrical and Electronic Engineering

キーワード： 適応極配置法 (Adaptive Pole Placement Method), 回転型倒立振り子 (Rotary Inverted Pendulum)

連絡先： 〒 963-8642 日本大学大学院 工学研究科 電気電子工学専攻 天野研究室
武田修一, Tel.(024)956-8796:E-mail: control_lab_8@yahoo.co.jp

1. 序論

近年, 機械システムは大規模化・複雑化しており, このような機械システムを安定に動作させるためには制御システムの設計が必要となる。制御システムの設計には機械システムの運動方程式・状態方程式を用いるが, その際得られる運動方程式・状態方程式は簡略化されたものとなる。また, 実際のシステムには外乱などの不確定要素が存在し, これらを無視して制御システムを設計すると, 制御しているにも関わらず機械システムが不安定になることがある。そのため不確定要素に対して頑強(ロバスト)な制御が求められ, ロバスト制御システムの設計方法には様々な手法が提案されている。

本研究では, 回転型倒立振り子を制御対象として, 動特性が絶えず変動するシステムに対応できる適応極配置法を用いて制御システムを設計し, ロボットシステムの安定性を確立する。

2. 回転型倒立振り子のモデリング

本研究では, Fig.1 に示す回転型倒立振り子実験装置モデルより運動方程式・状態方程式を導き, 制御システムを構築する。

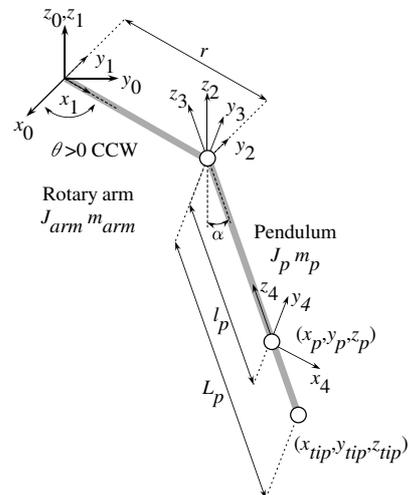


Fig. 1 Rotary Inverted Pendulum Model

Table 1 Physical Parameters

L_p	Length of Pendulum
m	Pendulum mass
r	Length of Rotary Arm
h	Pendulum length to the top of the ground
θ	Rotation angle of the Rotary Pendulum
α	Gradient angle of the Pendulum
J_{Arm}	Moment of inertia of the Rotary Arm
J_P	Moment of inertia of the Pendulum

Fig.1 より回転型倒立振り子の数学モデルは導出さ

れ，各要素のパラメータの数値を代入すると次のように算出される。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

$$u(t) = V_m \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 53.1012 & -0.6586 & 0.6575 \\ 0 & 98.3814 & -0.6575 & 1.2182 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 274.4012 \\ 273.9627 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで， θ は Rotary Arm の回転角度， α は Pendulum の傾斜角度， V_m は Rotary Arm Motor の制御電圧である。

3. 適応極配置

適応極配置法とは，極配置法に最小二乗法を組み合わせた構造となっており，プラントの動特性の変動に応じてコントローラを自動調整することでパラメータを変化させていく制御法である。

Fig.2 に適応制御システムの一般原理を示す。

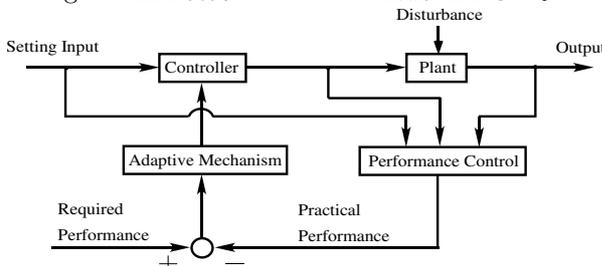


Fig. 2 General principles of adaptive pole placement

要求性能は設計者が仕様として与えた望ましいプラントであり，設定入力，プラントの入手力を用いてプラントの性能を常時測定し，この結果を要求性能と比較する。この比較結果に基づいて適応機構が働き，コントローラのパラメータの同定を行うことで制御入力を調整する。

3.1 システム同定

対称に関する物理的な情報やシステムにおける内部構造が不明確であっても，システムの入出力信号の観測値に基づいて伝達関数を推定し数学モデルを決定するアルゴリズムをシステム同定という。

3.2 同定モデルの選定

前項で回転型倒立振子のモデリングを行ったが，モデル誤差や回転型倒立振子の状態を考慮すると実システムを正確に表現出来ない可能性がある。このような問題に対してシステム同定を用いることで得られたシステム行列からより最適な制御系の設計を行うことが可能となる。

本研究では最小二乗法を用いた ARX モデルを適用し，閉ループ制御系に対してシステム同定が可能である同定法として予測誤差法を用いる。また，選定した同定モデルに対して適合率の評価を行うことで選定モデルに対しての有用性を検証する。

3.3 最小二乗法

出力の1段先予測値 $\hat{y}(k|\theta)$ が θ に関して線形，すなわち

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T \phi(k) \quad (4)$$

である線形回帰モデルの場合，このときの予測誤差は次式で与えられる。

$$\epsilon(k, \theta) = y(k) - \theta^T \phi(k) \quad (5)$$

この線形回帰モデルに対して最小二乗法を適用する。すなわち， l として

$$l(k, \theta, \epsilon(k, \theta)) = \epsilon^2(k, \theta) \quad (6)$$

と選ぶと，パラメータ推定のための評価規範は次式のようになる。

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon^2(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \theta^T \phi(k))^2 \quad (7)$$

(7) 式をさらに計算すると，

$$J_N(\theta) = c(N) - 2\theta^T f(N) + \theta^T R(N)\theta \quad (8)$$

が得られる。(8) 式の $J_N(\theta)$ を θ に関して微分して 0 とおく。すると，正規方程式と呼ばれる θ に関する連立 1 次方程式が得られる。

$$R(N)\hat{\theta}(N) = f(N) \quad (9)$$

このとき，行列 $R(N)$ が正定値である場合逆行列を用いてパラメータ推定値を求めることができ，この同定法は一括処理最小二乗法を次式に示す。

$$\hat{\theta}(N) = R^{-1}(N)f(N) \quad (10)$$

3.4 ARX モデル

二つの多項式

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (11)$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (12)$$

を導入する。ただし, $A(q)$ と $B(q)$ は規約なオペレータ q の多項式である。すると,

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + w(k) \quad (13)$$

と書きなおされる。この (13) 式のように記されるモデルを ARX モデルといい, 最小二乗法にとって都合のよいモデルであるため, 最小二乗モデルとも呼ばれる。ARX モデルは, 伝達関数 $G(q)$ と雑音モデル $H(q)$ をそれぞれ次式のようにおく。

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, H(q, \theta) = \frac{1}{A(q)} \quad (14)$$

さらに, ARX モデルの 1 段先予測値は次式のようになる。

$$\hat{\theta}(k|\theta) = [1 - A(q)]y(k) + B(q)u(k) = \theta^T \phi(k) \quad (15)$$

3.5 同定モデルの適合率

$$FIT(\%) = \left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N \{\hat{y}(k) - y(k)\}^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \{y(k) - \bar{y}(k)\}^2}} \right) \times 100 \quad (16)$$

適合率は時間応答シミュレーションを行い, 取得した出力と比較検証を時間領域で行う。

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \quad (17)$$

ここで, \hat{y} は次式で与えられる出力平均値である。

3.6 ARX モデルの適合率の評価

実機動作によって得られた入出力信号からモデルの選定を行う。

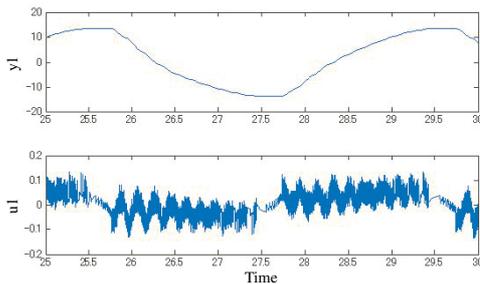


Fig. 3 Input output signal

Fig.3 に入出力信号を示し, 入力に電圧, 出力にアームの傾斜角度を用いる。

上記で得られた入出力信号から ARX 同定モデルの適合率における時間領域での評価を Fig.4 に示す。この結果から本研究に用いた回転型倒立振り子におけるアームの傾斜角度に対して 89.37 % が得られた。

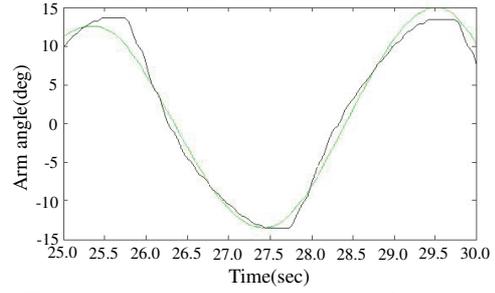


Fig. 4 Compliance rate of ARX model

3.7 極配置法

線形定数システムは

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (18)$$

$$x(0) = x_0 \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (19)$$

に対して, 二次評価関数 J を最小とするような状態フィードバックゲイン F , 及び最適制御入力 $u^*(t)$ を求めることができる。評価関数 J は

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (20)$$

となり, 評価関数 J を最小とする最適制御入力 $u^*(t)$ を求めるものとする。重み行列 Q, R は

$$Q = \text{diag} [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad R = 10 \quad (21)$$

と定義する。次式に示す Riccati 代数方程式によって正定対称行列 P は,

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} + Q - P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T P = 0 \quad (22)$$

によって得られると, 最適制御入力 $u^*(t)$ は,

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t) = -F x(t) \quad (23)$$

で得られる。

極の位置の設計として希望する閉ループシステムの極を予め選定し, 実際の閉ループ極が希望する状態フィードバックゲイン F を決定する。

$$F_1 = R^{-1}B^T P \quad (24)$$

システムの運動方程式より導出される状態方程式

(1) より, システムの特性方程式は,

$$|sI - (A + BF)| = 0 \quad (25)$$

で得られる。ここで I は単位行列であり, この特性方程式の解が極配置の根の位置となる。

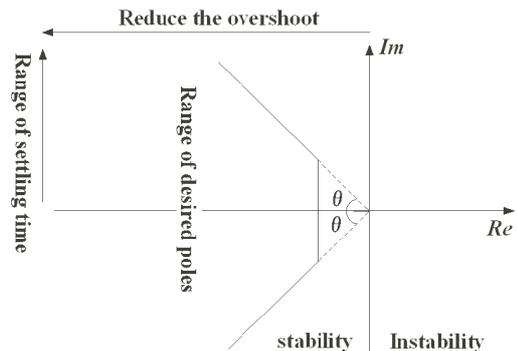


Fig. 5 Position of the desired poles

Fig.5 に示すように希望の極を配置することによってゲインを調整することができる。Fig.5 の望ましい極の範囲として、システムを安定させるために極の実数部を負側にし、極の虚部から指定した値だけ負側に離し整定時間を短くし、行過ぎ量を指定の値より抑えるには極を実軸から指定された値以上離してはならないという条件を満たしたものとなる。

3.8 ナイキスト安定判別法

ナイキストの安定判別法は、閉ループ伝達関数 $P(s)C(s)$ のナイキスト線図からフィードバック制御系が安定であるか否かを判別する方法であり、閉ループ伝達関数のベクトル線図は Fig.6 のようになる。安定条件として、閉ループシステムが安定である場合、伝達関数のベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ よりも内側を通ることで安定となり、外側を通ることで不安定となる。閉ループシステムが不安定になるまでの余裕を安定余裕といい、安定余裕を表わす指標としてゲイン余裕と位相余裕がある。

閉ループ伝達関数 $L(s)$ の位相が $\angle L(j\omega) = 180[\text{deg}]$ のときゲイン余裕が $|L(j\omega)| = 1$ となるのに必要な余裕度をデシベルで表わしたものがゲイン余裕 $GM[\text{dB}]$ となり、

$$GM := 20 \log_{10} \left| \frac{1}{L(j\omega_{pc})} \right| = -20 \log_{10} |L(j\omega_{pc})| \quad (26)$$

と定義される。また、 $L(s)$ のゲインが $|L(j\omega)| = 1$ のとき、位相が $\angle L(j\omega) = 180[\text{deg}]$ となるのに必要な余裕度を表わした位相余裕 $PM[\text{deg}]$ は、

$$PM := 180 + \angle L(j\omega_{pc}) \quad (27)$$

と定義される。ここで、 ω_{pc} は位相交差周波数を表わしており、ゲイン余裕 GM と位相余裕 PM はそれぞれ 0 より大きいほど安定度が高い。

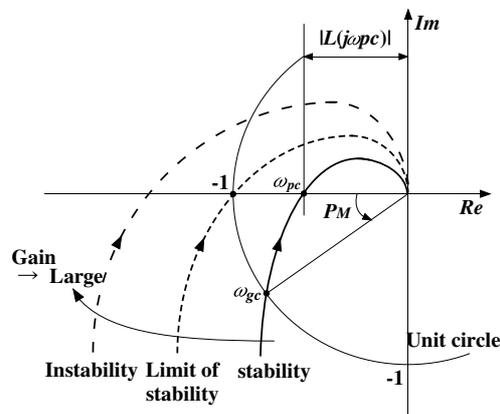


Fig. 6 Position of the desired poles

4. 実機実験の結果

実機実験におけるアームと振子の傾斜角度を Fig.7 と Fig.8 に示し、 P_t を適応極配置法での動作角度、 P_r をロバスト極配置法での傾斜角度とする。

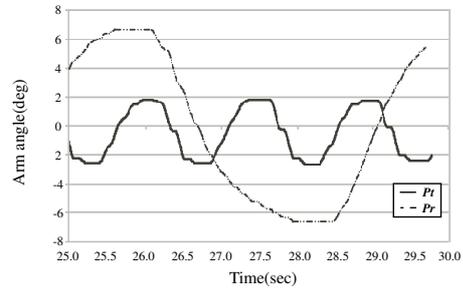


Fig. 7 Inclination angle of the arm

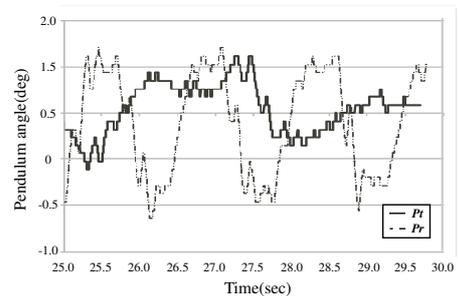


Fig. 8 Inclination angle of the pendulum

Table 2 Comparison of the inclination angle of the arm

	$\theta_{\max}[\text{deg}]$	$\theta_{\min}[\text{deg}]$	range[deg]
P_t	1.9523	-2.3215	4.7238
P_r	6.8336	-6.7699	13.6035

Table 3 Comparison of the inclination angle of the pendulum

	$\alpha_{\max}[\text{deg}]$	$\alpha_{\min}[\text{deg}]$	range[deg]
P_t	0.6152	-0.5273	1.1426
P_r	0.7031	-1.1426	1.8457

アームの動作角度を比較すると、ロバスト極配置制御に比べ最大振幅幅を 65 % 減少させることができた。また、振子の傾斜角度を比較してみても最大振幅幅が従来型に比べ 30 % 減少した。

5. 結言

本研究では回転型倒立振子を制御対象とし、適応極配置法を用いた制御システムを提案設計した。実機実験結果におけるアームと振子の動作角度から本研究での制御手法が比較対象に比べ安定性に優れていることが実証できた。今後の方針として、振子を手動立ち上げのみで無く自動立ち上げでの実験を条件に加え、更に安定したシステムの有効性を検証する。