

# 複数のリセット則を伴うリセットシステムの安定解析

## Stability analysis of reset system with multiple reset laws

○佐藤 哲朗, 佐藤 淳

○ Tetsuro Sato, Atsushi Satoh

岩手大学

Iwate University

キーワード： リセットシステム, LMI アプローチ, ハイブリッドシステム

連絡先： 〒 020-8551 岩手県盛岡市上田 4-3-5  
岩手大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻

佐藤 淳, Tel: 019-621-6404, E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

### 1. 諸言

リセットシステムは連続的なダイナミクスと、離散的なダイナミクスとを併せ持つことから、ハイブリッドシステムの一つに位置づけられる。リセットシステムの振る舞いとしては、通常は連続的な遷移(フロー)しているが、状態量がある条件を満たすとき、リセットというイベントに伴う状態の不連続な遷移(ジャンプ)が発生する。実際の物理例としてはバウンドするボールなど、状態が瞬間的に変化するような物体の衝突現象をリセットシステムとしてみなすことができる。

また、既存の研究として、Baker et al.<sup>1)</sup>によってリセットシステムに関するリアプノフベースでの初めての安定解析が、Nesic et al.<sup>2)</sup>によりリセットシステムの  $\mathcal{L}_2$  安定、および指数安定性が示されている。また、Satoh.<sup>4)</sup>によってLMIアプローチによる指数安定性の十分条件が示されている。さらにリセットシステムはリセット動作を含むオブザーバであるリセットオブザー

バ<sup>5)</sup><sup>6)</sup>などさらなる応用がみられる。

上で述べたような結果は全て状態空間内において、不連続な遷移が発生する集合であるジャンプセットが1つであり、それを伴うリセット則も1つであるようなシステムが対象とされていた。しかしながら、リセット動作を伴う制御器であるリセットコントローラを含むシステムに対し、さらにリセットコントローラをフィードバック結合していく場合や、リセットシステムをリセットオブザーバによって状態を推定するような場合、それぞれのリセットシステムは同期的にリセットが生じ、また同じようにジャンプが発生するとは限らない。この場合、各リセットシステムはそれぞれのリセット則に従っており、システム全体としては複数のリセット則が存在していると考えることができる。これらに既存の結果を適応させるとき、プラントとオブザーバやコントローラが常に同期的にリセットする必要があり、この仮定は制約に厳しい。

そこで本論文では Nesic et al.<sup>2)</sup>の結果に基づ

き、その拡張として複数のリセット則を伴うリセットシステムの指数安定条件を示す。また、得られた条件に基づき、LMIアプローチによる十分条件を示す。

本論文中において、行列  $A$  に対して行列の補集合を  $\bar{A}$ 、行列の転置を  $A^T$ 、行列の全ての固有値の集合を  $\text{eig}(A)$  と表記する。また行列  $A(n \times n)$  の要素を  $a_{ij}$  とした時、 $a_{ij} = 0 (i \neq j)$  で  $a_{ii}$  が正行列である正方のブロック行列を  $\text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$  と表記する。

## 2. 導入

### 2.1 線形リセットシステム

線形リセットシステムの状態方程式は次のようである。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bd, & \text{if } x \in \mathcal{F}, \\ x^+ &= A_r x, & \text{if } x \in \mathcal{J}, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  であるものとする。ここで、 $A$  はフロー行列、 $A_r$  はジャンプ行列と呼ぶ。

$\mathcal{F}, \mathcal{J}$  は適当な状態空間の部分集合で、 $\mathcal{F}$  をフローセットと呼び、状態が連続的に遷移する集合、一方  $\mathcal{J}$  をジャンプセットと呼び、状態の不連続な遷移が発生する集合である。その和集合  $\mathcal{F} \cup \mathcal{J}$  は状態空間のすべてを覆うものとする。 $\mathcal{F}, \mathcal{J}$  はそれぞれ閉集合で、フローセットとジャンプセットは境界だけを共有しているものとする。また、 $x = 0$  はこのシステムの平衡点の一つである。

### 2.2 時間正則化

リセットシステムには有限時間でリセット間隔がゼロに収束し、リセット回数が発散してしまうゼノ解や、ジャンプのみが連続的に発生する離散解が存在する。このような解を取り除く手法の一つとして時間正則化が Zaccarian et al.<sup>(3)</sup> によって示されている。

(1) 式を時間正則化したシステムは次のように表せる。ただし  $\rho > 0$  とする。

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= 1, & \text{if } x \in \mathcal{F} \text{ or } \tau \leq \rho, \\ \dot{x} &= Ax + Bd, \\ \tau^+ &= 0, & \text{if } x \in \mathcal{J} \text{ and } \tau \geq \rho, \\ x^+ &= A_r x, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

この操作により  $x \in \mathcal{J}$  である場合でも、 $\tau \geq \rho$  の関係を満たしていない限りジャンプは発生しないことに注意する。

## 3. 問題設定

(1) 式のようなリセットシステムをサブシステムとして  $m$  個持つ次の (3) 式の場合を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 d_1, & \text{if } x_1 \in \mathcal{F}_1, \\ x_1^+ &= A_{r1} x_1, & \text{if } x_1 \in \mathcal{J}_1, \\ & \vdots & \vdots \\ \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m d_m, & \text{if } x_m \in \mathcal{F}_m, \\ x_m^+ &= A_{rm} x_m, & \text{if } x_m \in \mathcal{J}_m, \end{aligned} \quad (3)$$

各サブシステムのフローセットはそのジャンプセットの補集合  $\bar{\mathcal{J}}_i$  によって  $\mathcal{F}_i = \text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_i)$  と表され、それぞれのジャンプセット  $\mathcal{J}_i$  は共通する部分を持ち得るとする。

このようなシステムは個々のリセットシステムの併合系として次のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bd, & \text{if } x \in \hat{\mathcal{F}}, \\ x^+ &= A_{R1} x, & \text{if } x \in \hat{\mathcal{J}}_1, \\ x^+ &= A_{R2} x, & \text{if } x \in \hat{\mathcal{J}}_2, \\ & \vdots & \vdots \end{aligned} \quad (4)$$

この時  $x = [x_1, \dots, x_m]^T$  とし、 $\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{J}}_j$  は  $\mathcal{J}_i$  に依存して決まる。また、 $A_{Rj}$  もそれぞれのジャンプ行列  $A_{ri}$  に依存して決まる。 $\hat{\mathcal{J}}_j$  の個数はその組み合わせの数  $\beta = \sum_{i=1}^m \frac{m!}{i!(m-i)!}$  となる\*。 $\hat{\mathcal{F}}$  と  $\hat{\mathcal{J}}_j$  は次のように定義される。

$$\hat{\mathcal{F}} := \text{cl}\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{\mathcal{J}}_i\right), \quad \hat{\mathcal{J}}_j := \text{cl}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{B}_j} \mathcal{J}_i \bigcap_{i \in \bar{\mathcal{B}}_j} \bar{\mathcal{J}}_i\right) \quad (5)$$

ここで  $\mathcal{B}_j$  は  $\mathcal{J}_i$  の添え字集合で、 $\mathcal{B}_j \subseteq A$ ,  $A := \{1, \dots, m\}$ ,  $\forall j = 1, \dots, \beta$  である。また、 $\mathcal{B}_j$  の要素は次のように決定する。

\*  $\hat{\mathcal{J}}_j$  の中には空集合となるものが存在し得ることに注意する

$1 \leq j \leq m$  の時,  $\mathcal{A}$  の要素から 1 つ選択し, これを要素とする集合を  $\mathcal{B}_j$  とする.

$m+1 \leq j \leq m + {}_m C_2$  の時,  $\mathcal{A}$  の要素から 2 つ選択し, これを要素とする集合を  $\mathcal{B}_j$  とする.

⋮

$\sum_{r=1}^{m-1} {}_m C_r + 1 \leq j \leq \sum_{r=1}^m {}_m C_r$  の時,  $\mathcal{A}$  の要素から  $m$  個選択し, これを要素とする集合を  $\mathcal{B}_j$  とする.

例として  $m = 3$  の場合を考える. 各サブシステムのジャンプセットは  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$  であり, 併合系のジャンプセット  $\hat{\mathcal{J}}_j$  の数は  $\beta = 7$  だけ存在し得る. また  $m = 3$  なので,  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$  であり, (5) 式より併合系のフローセット  $\hat{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_2 \cap \bar{\mathcal{J}}_3$  を定義できる. 添え字集合  $\mathcal{B}_j$  と  $\hat{\mathcal{J}}_j$  を以下の Table .1 に記す.

Table 1 添え字集合 ( $m = 3$ )

$j$	$\mathcal{B}_j$	$\hat{\mathcal{J}}_j$	$A_{Rj}$
1	[1]	$\text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_2 \cap \bar{\mathcal{J}}_3)$	$\text{diag}[A_{r1}, I, I]$
2	[2]	$\text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_2 \cap \bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_3)$	$\text{diag}[I, A_{r2}, I]$
3	[3]	$\text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_3 \cap \bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_2)$	$\text{diag}[I, I, A_{r3}]$
4	[1,2]	$\text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_2 \cap \bar{\mathcal{J}}_3)$	$\text{diag}[A_{r1}, A_{r2}, I]$
5	[1,3]	$\text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_3 \cap \bar{\mathcal{J}}_2)$	$\text{diag}[A_{r1}, I, A_{r3}]$
6	[2,3]	$\text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_2 \cap \bar{\mathcal{J}}_3 \cap \bar{\mathcal{J}}_1)$	$\text{diag}[I, A_{r2}, A_{r3}]$
7	[1,2,3]	$\text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_2 \cap \bar{\mathcal{J}}_3)$	$\text{diag}[A_{r1}, A_{r2}, A_{r3}]$

(4) 式で表されるシステムにおいて, リセット発生タイミングが全てのリセットシステムにおいて同期している場合は既存の結果<sup>2)4)</sup>に対応する.

以上から複数のリセット則を伴うリセットシステムは次のように 1 つのフロー方程式と  $\beta$  個のジャンプ方程式より表される.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, & \text{if } x \in \hat{\mathcal{F}}, \\ x^+ &= A_{Rj}x, & \text{if } x \in \hat{\mathcal{J}}_j \end{aligned} \quad (6)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A_{Rj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  とし,  $A$  はフロー行列,  $A_{Rj}$  はジャンプ行列である. また,  $x = 0$  はこのシステムの平衡点の一つである.

以後, (6) 式の  $\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{J}}_j$  のことを単にフローセット, ジャンプセットと呼ぶことにする.

## 4. 指数安定条件

システム (6) 式の  $x = 0$  の指数安定性について考える. 以下の仮定 1 は Nesic et al.<sup>2)</sup> の Assumption 1 において内部安定性を議論するため  $y = d = 0$  とおき, 複数のジャンプセットの場合に拡張したものである.

### 仮定 1

システム (6) 式が与えられ,  $\eta_j \in (0, 1)$  と正数  $\lambda_k (k = 1, \dots, 4)$  が存在し正定関数  $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  は以下の (7) 式を満たすものとする.

$$\lambda_1 |x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_2 |x|^2, \quad (7a)$$

$$\langle \nabla V(x), Ax \rangle \leq \lambda_3 V(x), \quad \forall x, \quad (7b)$$

$$\langle \nabla V(x), Ax \rangle \leq -\lambda_4 V(x), \quad \forall x \in \mathcal{F}, \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} V(A_{Rj}x) &\leq \eta_j V(x), \\ \forall x \in \hat{\mathcal{J}}_j, &(j = 1, \dots, \beta) \end{aligned} \quad (7d)$$

上記, 仮定 1 の正定関数  $V(x)$  は (7c) 式よりフローセット内で状態軌道に沿った傾きは負であり, (7d) 式より  $\eta_j \in (0, 1)$  であることからジャンプによっても状態は減少する. このことから正定関数  $V(x)$  はシステム (6) 式のリアプノフ関数に相当するものである.

### 定理 1

仮定 1 を満たすような  $V(\cdot)$  が存在するならば, 時間正則化を伴うシステム (6) 式の  $x$  ダイナミクスの原点は大域的指数安定である.

すなわち, どのような  $x(0)$  に対しても  $|x(t)| \leq c|x(0)| \exp(-\lambda t), \forall t \geq 0$  が成り立つような正数  $c, \lambda$  が存在する.

### 証明

以下に続く証明は, Nesic et al.<sup>2)</sup> の Theorem 1 の証明を  $y = d = 0$  としたものにほぼ対応する為, 複数のジャンプセットに対応させた部分以外に関しては省略する.

関数  $W(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を以下のように定義する. ただし,  $L > 0$  である.

$$W(x, \tau) := \exp(-L \min\{\tau, \rho\})V(x) \quad (8)$$

$t \leq 0$ において、全ての  $x$  に対して  $W(x, \tau)$  が非増加であることを示す。  $x \in \mathcal{F}$  または  $\tau \leq \rho$  の時、(7b),(7c) 式より、  $W(x, \tau)$  は非増加であることが示せる。

次にジャンプによる  $W$  の変化を考える。まず、  $x \in \hat{\mathcal{J}}_1$  の時を考える。(7d) 式を使う事で、以下の関係が成り立つ。

$$W(A_{R1}x, 0) \leq \eta_1 \exp(L\rho)W(x, \tau) \quad (9)$$

$\rho$  を  $\eta_1 \exp(L\rho) \leq 1$  となるよう選択し、以下の  $\rho \leq \rho_1^*$  の関係を得る。

$$\begin{aligned} \exp(L\rho) &\leq \frac{1}{\eta_1} \\ \rho &\leq \frac{\log\left(\frac{1}{\eta_1}\right)}{L} = \rho_1^* \end{aligned} \quad (10)$$

同様に  $x \in \hat{\mathcal{J}}_j (j = 2, \dots, \beta)$  の場合で  $\rho_j^*$  を導き、  $\rho_{\min}^* = \min\{\rho_1^*, \dots, \rho_\beta^*\}$  とし、  $\rho$  を  $\rho \leq \rho_{\min}^*$  を満たすように選択する。この時、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} W(A_{R1}x, 0) &\leq W(x, \tau), \\ \forall x \in \hat{\mathcal{J}}_1 \text{ and } \tau &\geq \rho \end{aligned} \quad (11)$$

状態が  $\hat{\mathcal{J}}_1$  からジャンプするとき、  $W(x, \tau)$  が非増加であることが得られる。  $x \in \hat{\mathcal{J}}_j (j = 2, \dots, \beta)$  の場合に関しても同様の関係が成り立ち、状態が  $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{J}_i$  からジャンプするとき、  $W(x, \tau)$  が非増加であることが得られ、  $t \leq 0$  において、全ての  $x$  に対して  $W$  は非増加であるといえる。

この後、(7a),(7c),(8) 式を用い  $|x|$  の指数上界を導出する

## 5. LMI アプローチによる指数安定性の十分条件

線形行列不等式 (LMI) を用いて、定義 1 で示したリアプノフ関数  $V(x)$  が存在するための十分条件を示す。

以下では、ジャンプセット  $\mathcal{J}_i$  が次のように定義される場合について考える。

$$\mathcal{J}_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T M_i x \leq 0\} \quad (12)$$

ここで  $M_i$  は、その固有値に正のものと負のものを持つ *non-definite* な行列であるとする。またこの時フローセット  $\mathcal{F}$  と  $\hat{\mathcal{J}}_j$  は以下のように定義できる。

$$\mathcal{F} = \left\{ k \mid \text{cl} \left( \bigcap_{k=1}^n \bar{\mathcal{J}}_k \right) \right\}, \quad (13a)$$

$$\hat{\mathcal{J}}_i = \left\{ k \mid \text{cl} \left( \bigcap_{k \in \mathcal{B}_j} \mathcal{J}_k \cap \bigcap_{k \in \bar{\mathcal{B}}_j} \bar{\mathcal{J}}_k \right) \right\}, \quad (13b)$$

### 定理 2

システム (6) 式、並びに (13) 式を考える。ある  $\tau_{F_i}, \tau_{J_j} \geq 0$  について以下の (14) 式を満たす  $P = P^T > 0$  が存在するならば、仮定 1 を満たすリアプノフ関数  $V(x) := x^T P x$  が存在する。

$$A^T P + P A + \sum_{i=1}^n \tau_{F_i} M_i < 0, \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} A_{Rj}^T P A_{Rj} - P - \sum_{i \in \mathcal{B}_j} \tau_{J_j} M_i \\ + \sum_{i \in \bar{\mathcal{B}}_j} \tau_{J_j} M_i < 0 \end{aligned} \quad (14b)$$

### 証明

定理 2 が仮定 1 の各式を満たすことを示す。以下の証明に関しては、[Satoh](#)<sup>4)</sup> の Lemma 1 の同様の流れで示せるため、概要のみを示す。

(7a) 式について

$P$  の正定性より、(7a) 式が成立する。

(7b) 式について

(14a) 式に左右から  $x^T, x$  をかける。

$$x^T (A^T P + P A) x = \dot{V}(x) \leq - \sum_{i=1}^n \tau_{F_i} x^T M_i x \quad (15)$$

$x \in \mathcal{F}$ ,  $x \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{J}_i$  を満たす  $x$  についてそれぞれ考えることで (7b) 式が成立する。

(7c) 式について

$x \in \mathcal{F}$  を満たす  $x$  について、(15) 式が成り立つとき、以下の (16) 式を満たす  $\epsilon > 0$  が存在する。

$$x^T (A^T P + P A) x + \sum_{i=1}^n \tau_{F_i} x^T M_i x \leq -\epsilon |x|^2 \quad (16)$$

(7a),(16) 式より以下を得る.

$$x^T(A^T P + PA)x + \frac{\epsilon}{\lambda_2} V(x) \leq - \sum_{i=1}^n \tau_{F_i} x^T M_i x \quad (17)$$

ここで  $\lambda_4 := \frac{\epsilon}{\lambda_2}$  とおくと,  $\epsilon > 0, \lambda_2 > 0$  より  $\lambda_4 > 0$  となる.  $x \in \mathcal{F}$  を満たす全ての  $x$  について, (7c) 式が成立する.

(7d) 式について

$x \in \hat{\mathcal{J}}_j$  を満たす  $x$  について考える. (14b) 式の左右から  $x^T, x$  をかけ, その時以下の (18) 式を満たす  $\epsilon > 0$  が存在する.

$$x^T A_{R_j}^T P A_{R_j} x - x^T P x - \sum_{i \in \mathcal{B}_j} \tau_{J_j} x^T M_i x + \sum_{i \in \bar{\mathcal{B}}_j} \tau_{J_j} x^T M_i x \leq -\epsilon |x|^2 \quad (18)$$

(7a) 式, (18) 式より,

$$x^T A_{R_j}^T P A_{R_j} x - \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) x^T P x \leq \sum_{i \in \mathcal{B}_j} \tau_{J_j} x^T M_i x - \sum_{i \in \bar{\mathcal{B}}_j} \tau_{J_j} x^T M_i x \quad (19)$$

ここで  $\eta := 1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} < 1$  とおけば, (19) 式の右辺が負定であることから, (7d) 式が成立する.

## 6. 数値例

定理 2 に基づく安定解析の例を示す. 以下の Fig. 1 のブロック線図で表されるシステムを考える.

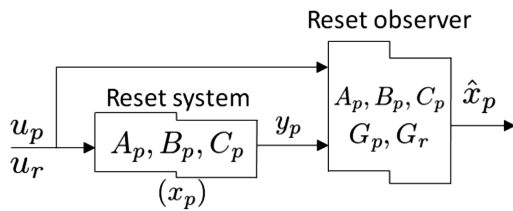


Fig. 1 線形リセットシステムに対するリセットオブザーバ

プラントであるリセットシステムを以下のように与える.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p, & \text{if } x_p \in \mathcal{F}_p \\ x_p^+ &= A_r x_p + B_r u_r, & \text{if } x_p \in \mathcal{J}_p \\ y_p &= C_p x_p, \\ \mathcal{F}_p &:= \{x_p : x_p^T C_p^T M_p C_p x_p \geq 0\} \\ \mathcal{J}_p &:= \{x_p : x_p^T C_p^T M_p C_p x_p \leq 0\} \end{aligned} \quad (20)$$

リセットオブザーバは以下のように与える.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_p &= (A_p + G_p C_p) \hat{x}_p + B_p u_p - G_p y_p, & \text{if } (\hat{x}_p, y_p) \in \mathcal{F}_o \\ \hat{x}_p^+ &= (A_r + G_r C_p) \hat{x}_p + B_r u_r - G_r y_p, & \text{if } (\hat{x}_p, y_p) \in \mathcal{J}_o \end{aligned} \quad (21)$$

$$\hat{y}_p = C_p \hat{x}_p,$$

$$e = x_p - \hat{x}_p$$

(20), (21) 式の状態方程式の併合系は以下のようである. ただし (6) 式に合わせるため  $u_p, u_r = 0$  とした. この時  $m = 2, \beta = 3$  である.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_p & \emptyset_{n_p} \\ -G_p C_p & A_p + G_p C_p \end{bmatrix} x = Ax \\ x^+ &= \begin{bmatrix} A_r & \emptyset \\ \emptyset & I_{n_p} \end{bmatrix} x = A_{R1} x \\ x^+ &= \begin{bmatrix} I_{n_p} & \emptyset_{n_p} \\ -G_r C_p & A_r + G_r C_p \end{bmatrix} x = A_{R2} x \quad (22) \\ x^+ &= \begin{bmatrix} A_r & \emptyset_{n_p} \\ -G_r C_p & A_r + G_r C_p \end{bmatrix} x = A_{R3} x \\ y &= \begin{bmatrix} C_p & \emptyset_{l_p \times n_p} \\ \emptyset_{l_p \times n_p} & C_p \end{bmatrix} x = Cx \end{aligned}$$

ここで  $x = [x_p \ x_o]^T$  とし  $\mathcal{F}_o$  と  $\mathcal{J}_o$  は以下の場合を考える.

$$M = \begin{bmatrix} M_p & M_{p2} \\ M_{p2}^T & M_{p3} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathcal{F}_o := \{x | x^T C^T M C x \geq 0\}$$

$$\mathcal{J}_o := \{x | x^T C^T M C x \leq 0\}$$

以上より  $M_1, M_2, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$  次のようである.

$$M_1 = \begin{bmatrix} C_p^T M_p C_p & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}, M_2 = C^T M C \quad (24)$$

$$\mathcal{J}_1 := \{x | x^T M_1 x \leq 0\}$$

$$\mathcal{J}_2 := \{x | x^T M_2 x \leq 0\}$$

定理 2 より  $\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{J}}_j (j = \{1, 2, 3\})$  が求まる.

$$\hat{\mathcal{F}} = \text{cl}(\bar{\mathcal{J}}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_2), \hat{\mathcal{J}}_1 = \text{cl}(\mathcal{J}_1 \cap \bar{\mathcal{J}}_2), \quad (25)$$

$$\hat{\mathcal{J}}_2 = \text{cl}(\mathcal{J}_2 \cap \bar{\mathcal{J}}_1), \hat{\mathcal{J}}_3 = \text{cl}(\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2)$$

(20),(21),(25) 式の各行列を以下のように与える場合を考える.

$$A_p = \begin{bmatrix} -7.9867 & 9.1867 \\ -8.9867 & 7.1867 \end{bmatrix}, \\ C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 1.4 & 1.1 \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_{p2} = \begin{bmatrix} 0.6752 & -0.4061 \\ -0.4061 & 0.2669 \end{bmatrix},$$

$$M_{p3} = \begin{bmatrix} -0.1485 & 0.0707 \\ 0.0707 & -0.1492 \end{bmatrix},$$

$$G_p = \begin{bmatrix} 0.2090 & 5.0297 \\ 5.1142 & -7.7033 \end{bmatrix},$$

$$G_r = \begin{bmatrix} -1.2552 & 0.1888 \\ 0.1688 & -0.0862 \end{bmatrix}$$

このシステムに対して  $P, \tau_{F_i}, \tau_{J_j}$  についてのLMIである(14)式を解くと以下のように求められた.

$$P = \begin{bmatrix} 2.5412 & -1.9534 & -0.2474 & -0.0372 \\ -1.9534 & 2.4812 & 0.0521 & -0.1698 \\ -0.2474 & 0.0521 & 0.2200 & -0.0043 \\ -0.0372 & -0.1698 & -0.0043 & 0.2100 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{F_1} = 0.0311, \tau_{F_2} = 0.0330, \tau_{J_{1_1}} = 1.9450,$$

$$\tau_{J_{1_2}} = 1.3066, \tau_{J_{2_1}} = 0.4759, \tau_{J_{2_2}} = 0.2581,$$

$$\tau_{J_{3_1}} = 0.4977, \tau_{J_{3_2}} = 0.2790$$

また  $\text{eig}(P) = \{0.1175, 0.2084, 0.6490, 4.4775\}$  であり,  $P > 0$  であることがわかる. システム

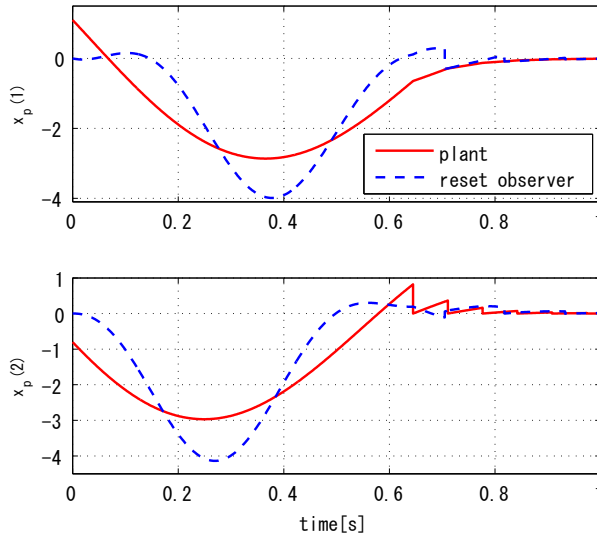


Fig. 2 初期値応答

(22)式について  $x_p(0) = [1.1 \ -0.8]^T, \hat{x}_p(0) = [0 \ 0]^T, \tau(0) = 0, \rho = 0.05[s]$  とした初期値応答は Fig.2 のようになり, 状態が平衡点  $x_p = 0$  に収束していることが確認できる. なお推定誤差も Fig.3 に示すのように収束している.

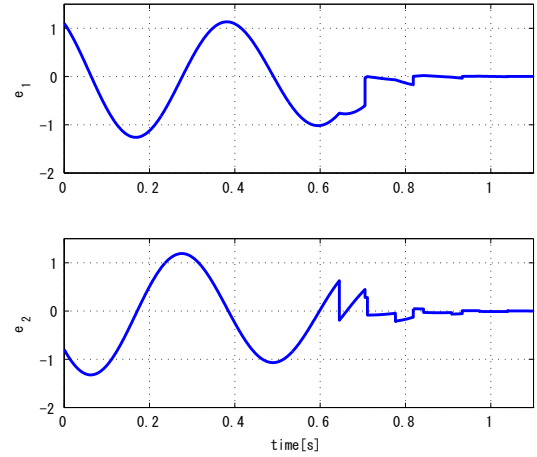


Fig. 3 推定誤差

## 7. 結言

本研究では, 複数のリセット則を伴うリセットシステムに関するリアプノフベースでの指数安定条件を導出した. また LMI アプローチによる指数安定性の十分条件を導出した.

今後は結果の  $\mathcal{L}_2$  安定性への拡張, 導出した条件に基づく制御系の設計を考えていきたい.

## 参考文献

- 1) O. Beker, C. V. Hollot, Y. Chait, and H. Han, *Fundamental properties of reset control systems*, Automatica, vol.40, pp.905-915, 2004.
- 2) D. Nesić, A. R. Teel and Zaccarian, *On necessary and sufficient conditions for exponential and  $\mathcal{L}_2$  stability of planer reset systems*, Proc. of ACC2008, (2008), pp.4140-4145.
- 3) L. Zaccarian., D. Nesić, and A. R. Teel, *First order reset elements and the Clegg integrator revisited*, Proc. of ACC2005, (2005), pp. 563-568.
- 4) A. Satoh, *Synthesis of Continuous-time Linear Reset Feedback System with  $\mathcal{L}_2$  Stability*, Proc. of SICE2010, (2010), pp. 1100-1105.
- 5) 伊藤陽介, 佐藤淳, 線形リセットオブザーバの設計及び実装, 第55回自動制御連合講演会, 同講演論文集 (CD-ROM)2D405:p1176-1180p (2012) 78-81.
- 6) D.Paesà, C.Franco, S.Llorente, G.Lopez-Nicolas, C.Sagues, *Reset observers applied to MIMO systems*, Journal of Process Control 21(2010) 613-619. ,