

巻き込み 2 変量正規分布に従う位相スペクトルをもつ 2 信号間の位相限定相関関数の統計的性質

Statistical Property of Phase-Only Correlation Functions Between Two Signals With Phase Spectrum Following Wrapped Bivariate Normal Distributions

鈴木亮*, 八巻俊輔*, 川又政征*, 吉澤誠*

Ryo Suzuki*, Shunsuke Yamaki*, Masayuki Kawamata*, Makoto Yoshizawa*

* 東北大学

*Tohoku University

キーワード : 方向統計学 (directional statistics), 位相限定相関関数 (phase-only correlation functions), 巻き込み 2 変量正規分布 (wrapped bivariate normal distributions)

連絡先 : 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05 東北大学大学院工学研究科 電気エネルギーシステム専攻 吉澤・杉田研究室

鈴木亮, Tel.:022-795-7130, E-mail: r-suzuki@yoshizawa.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

2つの信号の類似度を評価する方法の一つとして、信号のもつ位相情報を用いる位相限定相関関数 (POC 関数:Phase-only-Correlation Functions) を用いる方法がある。POC 関数は振幅スペクトルを 1 に正規化した信号 (位相限定信号) に対して相関を計算することで求められる。また POC 関数は、2 信号間の幾何学的な関係を求めることができる。例えば、信号の位置ずれを POC 関数のピークの出現する位置のずれに変換して表現することができる。これらの特徴から、POC 関数は指紋認証技術¹⁾ や画像マッチング技術²⁾、周期性のある DNA 配列の探索³⁾ などに応用されてきた。

2つの評価したい信号が等しいときは、それぞれの信号の持つ位相情報は等しく、2つの信号

の位相スペクトル差は 0 である。位相スペクトル差が 0 となる時の POC 関数はデルタ関数になる。また、2つの信号の位相スペクトル差が 0 ではない時、POC 関数はデルタ関数と異なる。しかし、これまでの研究では、2 信号間の位相スペクトル差が 0 ではない時に、POC 関数がどれだけデルタ関数と異なるかについて数学的な根拠が与えられていなかった。

著者らのグループでは、これまでに 2 信号間の位相スペクトル差が 0 でない場合について、信号の位相スペクトル差を 1 変量確率変数と仮定して、POC 関数の統計的解析を行った⁴⁾⁵⁾。文献⁴⁾ では、位相スペクトル差が直線上で与えられる確率分布に従うと仮定して、POC 関数の期待値と分散を導出した。また文献⁵⁾ では、位相スペクトル差のもつ周期性を考慮し、位相

ベクトル差が円周上で与えられる確率分布に従うと仮定し、POC関数の期待値と分散を導出した。

これらに対して本稿では、2信号の位相スペクトルを2変量確率変数と仮定して、POC関数の統計的解析を行う。2信号の位相スペクトルが平面上で与えられる2変量正規分布に従うと仮定してPOC関数の期待値と分散を導出する。次に2信号の位相スペクトルが平面上で与えられる確率密度関数に従うとした場合の問題点を指摘し、巻き込み法を用いて2変量正規密度関数を球面上の確率密度関数に変換する。その結果、2信号の位相スペクトルが巻き込み2変量正規分布に従うと仮定したときのPOC関数の期待値と分散は、平面上で与えられる2変量正規分布を仮定したときの結果と一致することを示す。

2. POC関数の統計的解析

2.1 位相限定相関関数の定義

まず最初に位相限定相関関数 (POC関数) を定義する。信号長が N の2つの複素信号を $x(n)$ と $y(n)$ とする。これらの信号 $x(n)$ と $y(n)$ の1次元離散フーリエ変換は以下の式で表される。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = |X(k)|e^{j\theta_k} \quad (1)$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{nk} = |Y(k)|e^{j\phi_k} \quad (2)$$

ここで $k = 0, \dots, N-1$ は離散周波数インデックスであり、 $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ は離散フーリエ変換の回転因子を表す。また $|X(k)|$ は信号 $x(n)$ の振幅スペクトルであり、 θ_k は $x(n)$ の位相スペクトルである。同様に $|Y(k)|$ は信号 $y(n)$ の振幅スペクトルであり、 ϕ_k は $y(n)$ の位相スペクトルである。POC関数は2つの信号のクロスパワースペクトルの離散フーリエ逆変換とし

て以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} r(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)Y^*(k)}{|X(k)||Y(k)|} W_N^{-mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k} W_N^{-mk} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで ‘*’ は複素共役を表し、 $\alpha_k = \theta_k - \phi_k$ は2つの信号の位相スペクトル差を表す。つまり位相スペクトル差 α_k がわかるとPOC関数を求めることができる。

2.2 POC関数の期待値と分散の一般式

著者らのグループでは、文献⁴⁾で、位相スペクトル差 α_k を確率変数と仮定して、位相スペクトル差 α_k が0でない場合のPOC関数の期待値と分散を導出した。POC関数の期待値 $E[r(m)]$ および分散 $\text{Var}[r(m)]$ の一般式は以下の式で表される。

$$E[r(m)] = A\delta(m) \quad (4)$$

$$\text{Var}[r(m)] = \frac{1}{N}(1 - |A|^2) \quad (5)$$

ここで位相因子 $e^{j\alpha_k}$ の期待値を

$$A = E[e^{j\alpha_k}] \quad (6)$$

とおいている。式(4)と(5)、(6)より位相スペクトル差 α_k の確率密度関数を与えることで、POC関数の統計的性質を表すことができる。

2.3 特性関数を用いたPOC関数の期待値と分散の導出

位相スペクトル差 α_k の確率密度関数が与えられた時、式(6)の計算にその特性関数を用いることができる。確率変数 α の確率密度関数 $p(\alpha)$ の特性関数 $\psi_\alpha(t)$ は以下で定義される。

$$\psi_\alpha(t) = E[e^{j\alpha t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha t} p(\alpha) d\alpha \quad (7)$$

ここで $t = 1$ とすることで、位相因子の期待値を求めることができる。つまり、上式は以下のように表せる。

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(1) &= E[e^{j\alpha}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha} p(\alpha) d\alpha \\ &= A\end{aligned}\quad (8)$$

従って、位相スペクトル差 α が確率変数に従う場合は、上式を用いることで POC 関数の期待値と分散を導出することができる。

3. 2変量正規分布に従う位相スペクトルをもつ2信号間のPOC関数の統計的性質

著者らのグループがこれまでに行ってきた POC 関数の統計的解析では、2信号の位相スペクトル θ_k と ϕ_k について次のように仮定していた。信号 $x(n)$ の位相スペクトル θ_k を確定信号とし、一方、信号 $y(n)$ の位相スペクトル ϕ_k を確率信号であると仮定をおいていた。この時、 ϕ_k は周波数領域で確率的に変動する特性をもつと仮定し、POC 関数の統計的解析をしていた。実際の信号処理においては、2信号 $x(n)$ と $y(n)$ の位相スペクトル θ_k と ϕ_k がともに確率信号である場合も考えられる。本研究では、2信号の位相スペクトル θ_k と ϕ_k に周波数領域で確率的に変動する雑音が重畳すると仮定して、POC 関数の統計的解析を行う。この時、2信号の位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) は、2変量の確率変数であると仮定している。

3.1 2変量正規分布に従う場合

2信号の位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) が2変量 (θ, ϕ) の確率変数であると仮定する。 (θ, ϕ) が平均 $\mathbf{0} = (0, 0)$ 、共分散行列 Σ の2変量正規分布 $N(\mathbf{0}, \Sigma)$ に従う時、その確率密度関数は以下の式で定義される。

$$\begin{aligned}f(\theta, \phi) &= \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\Theta \Sigma^{-1} \Theta^t} \\ \Theta &= \begin{pmatrix} \theta & \phi \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_\theta^2 & \rho\sigma_\theta\sigma_\phi \\ \rho\sigma_\theta\sigma_\phi & \sigma_\phi^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (9)$$

このとき、 Σ は共分散行列を表し、 $\sigma_\theta^2, \sigma_\phi^2$ はそれぞれ2信号の位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) の分散を表している。このとき、 $\sigma_\theta, \sigma_\phi$ は $\sigma_\theta > 0$ と $\sigma_\phi > 0$ の関係を満たす。また ρ は2変量 θ, ϕ の関係を表すもので相関係数と呼ばれる。相関係数 ρ は $-1 \leq \rho \leq 1$ を満たす。相関係数 $\rho = 1$ の時は、 $\theta = \phi$ であり、 $\rho = -1$ の時は、 $\theta = -\phi$ となる。相関係数が $0 < \rho < 1$ の時は、 θ と ϕ がともに増加する関係を満たし、 $-1 < \rho < 0$ の時は、 θ と ϕ がともに減少する関係を満たす。

次に位相スペクトル差 α_k と2変量 (θ_k, ϕ_k) の関係について考える。位相スペクトル差 α_k は2信号の位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) の差であるため、位相スペクトル差 α_k と (θ_k, ϕ_k) の間には以下のような関係を満たす行列 \mathbf{T} が与えられる。

$$\alpha_k = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \theta_k \\ \phi_k \end{pmatrix} = \theta_k - \phi_k \quad (10)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

位相スペクトル差 α_k の確率密度関数 $p(\alpha_k)$ は以下の式で表される。

$$p(\alpha_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\alpha_k^2}{2\sigma^2}} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbf{T} \Sigma \mathbf{T}^t \\ &= \sigma_\theta^2 - 2\rho\sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2\end{aligned}\quad (12)$$

つまり2信号の位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) が平均 $\mathbf{0} = (0, 0)$ 、共分散行列 Σ の2変量正規分布 $N(\mathbf{0}, \Sigma)$ で与えられる場合、位相差 α_k は平均0、分散 σ^2 の1変量正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うことがわかる。この時、位相因子の期待値は式(8)

より

$$\begin{aligned} A &= \psi_\alpha(1) = E[e^{j\alpha}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha} p(\alpha) d\alpha \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

と導出できる．この時，式 (4) から (6) と (13) より

$$E[r(m)] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \delta(m) \quad (13)$$

$$\text{Var}[r(m)] = \frac{1}{N} (1 - e^{-\sigma^2}) \quad (14)$$

を得る．式 (12) を式 (14) と (15) に代入すると，以下のように POC 関数の期待値と分散の一般式を導出できる．

$$E[r(m)] = e^{-\frac{1}{2}(\sigma_\theta^2 - 2\rho\sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2)} \delta(m) \quad (15)$$

$$\text{Var}[r(m)] = \frac{1}{N} \left\{ 1 - e^{-(\sigma_\theta^2 - 2\rho\sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2)} \right\} \quad (16)$$

3.2 POC 関数の挙動

信号 $x(n)$ の位相スペクトル θ_k の分散 σ_θ^2 を 1 とし，信号 $y(n)$ の位相スペクトル ϕ_k の分散 σ_ϕ^2 を 1 とし，相関係数 ρ の変化に対する POC 関数 $r(m)$ の期待値 $E[r(0)]$ および分散 $\text{Var}[r(m)]$ のそれぞれの値を Fig. 1 と 2 に図示する． $\sigma_\theta^2 = 1$ かつ $\sigma_\phi^2 = 1$ である時，式 (15) と (16) に代入すると以下の式を得る．

$$E[r(m)] = e^{-(1-\rho)} \delta(m) \quad (17)$$

$$\text{Var}[r(m)] = \frac{1}{N} \left\{ 1 - e^{-2(1-\rho)} \right\} \quad (18)$$

式 (17) より $m = 0$ の時の POC 関数の期待値は，以下のようにできる．

$$E[r(0)] = e^{-(1-\rho)} \quad (19)$$

式 (18) と (19) より相関係数の値が -1 から 1 に増加するに従い，それぞれ POC 関数の分散 $\text{Var}[r(m)]$ は減少し，期待値 $E[r(0)]$ は増加することがわかる．

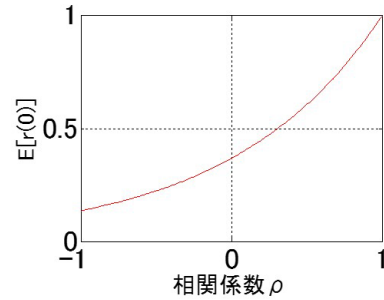


Fig. 1 2 信号の位相スペクトルの相関係数が変化した時の POC 関数の期待値の挙動

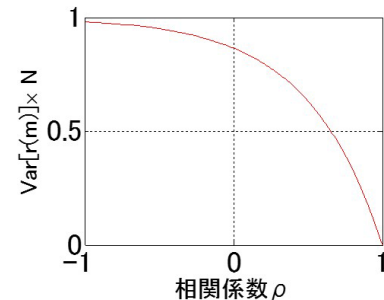


Fig. 2 2 信号の位相スペクトルの相関係数が変化した時の POC 関数の分散の挙動

4. 位相スペクトルが巻き込み 2 変量正規分布に従う場合の POC 関数の統計的性質

3 章で定義した 2 変量正規分布は確率変数 (θ, ϕ) が平面上で定義されているものであった．確率変数 (θ, ϕ) は 2 信号それぞれの位相スペクトルを表すものであり，定義域 $-\pi \leq \theta < \pi$ ， $-\pi \leq \phi < \pi$ を満たさなければいけない．周期的な性質をもつデータは，角度データとしてみなすことができ，方向統計学に基づいて解析することができる．位相スペクトル (θ, ϕ) は 2π [rad] の周期性をもつため，2 変量の角度データとして取り扱うことができ，球面上の点と対応付けることができる．今回は，方向統計学の概念を導入し確率変数 (θ, ϕ) を球面上の分布を用いて解析する．

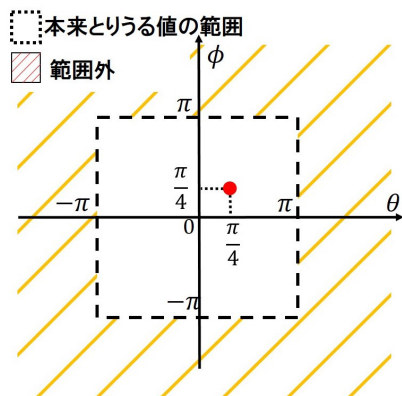


Fig. 3 2変量位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) を平面上にプロットした例

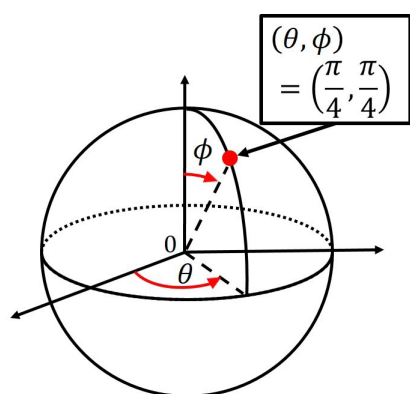


Fig. 4 2変量位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) を球面上にプロットした例

4.1 角度データの統計的処理

3章では、2変量 (θ_k, ϕ_k) は平面上で表される1点と対応づけて、統計的にPOC関数の解析をしてきた。例えば、2変量 $(\theta_k, \phi_k) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ の時、平面上ではFig. 3のように表すことができる。位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) は、本来Fig. 3の点線で示される範囲をとりうる。この時、Fig. 3の斜線で示される範囲で表される点は、 (θ_k, ϕ_k) の定義域外での値をとっている。角度データのもつ周期性を考慮するために、角度データを球面上の1点に対応付けしてこの問題を解決する。2変量 $(\theta_k, \phi_k) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ の時、球面上ではFig. 4のように表すことができる。

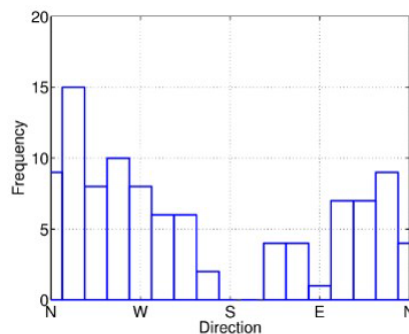


Fig. 5 線形ヒストグラム

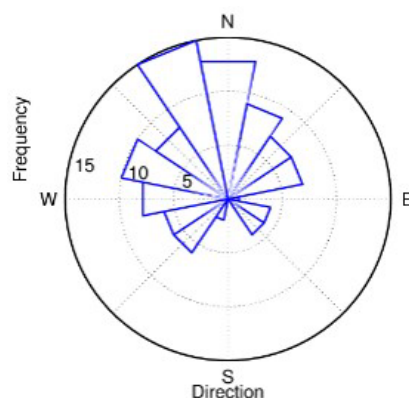


Fig. 6 円周ヒストグラム

4.2 方向統計学の基礎

方向統計学とは、気象学における風向データや渡り鳥の移動方向のデータなど、方向や角度データを統計的に解析する学問である。角度データは円周上の点と対応させ、円周上の分布を用いて解析することができる⁶⁾。例としてある地点で観測した風向きを線形ヒストグラムと円周ヒストグラムで表した場合について、Fig. 5と6にそれぞれ示す。Fig. 5では、角度データを線形データのように扱い、図示した。Fig. 5を見ると、北西と北東の2つの方向に風向が集中しているように見える。一方で、Fig. 6のように円周上にプロットすると、北の方向に風向が集中していることが確認できる。Fig. 5と6の2つは、同じデータを用いているが線形ヒストグラムと円周ヒストグラムの2つを用いてデータの表示方法を変えている。風向きの方角の例では、円周ヒストグラムで表示すると風向きを集中方向を理解しやすい。このように、角

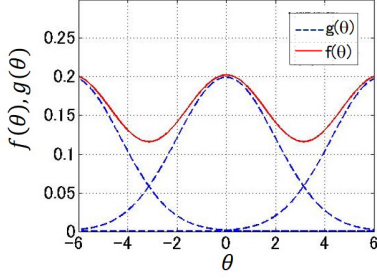


Fig. 7 1変量正規分布の巻き込み分布

度データを取り扱う際には、線形データを統計的に解析する方法とは違う統計的手法がある。

4.3 巻き込み分布

球面上で与えられる確率密度関数は周期性を持つ必要がある。平面上で与えられた確率密度関数を球面上に巻き込んだ分布を巻き込み分布という。2変量確率密度関数の巻き込み分布は以下の式で与えられる。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} g(\theta + 2\pi k_1, \phi + 2\pi k_2) \quad (20)$$

この時、 $g(\theta, \phi)$ と $f(\theta, \phi)$ はそれぞれ、平面上と球面上の確率密度関数を表す。例として、平均0、分散3の正規分布 $N(0, 3)$ を円周上に巻き込んだ分布を Fig. 7 に示す。ここでは簡単のため、円周上に巻き込む分布を1変量正規分布と定義している。この時、 $g(\theta)$ と $f(\theta)$ は、それぞれ1変量正規分布と巻き込み1変量正規分布を表している。

4.4 巻き込み2変量正規分布

式(9)で表される平均 $\mathbf{0} = (0, 0)$ 、共分散行列 Σ の2変量正規密度関数 $N(\mathbf{0}, \Sigma)$ を球面上に巻き込んだ分布を以下の式で表す。この時、 $f(\theta, \phi)$ は、平均方向 $(0, 0)$ の巻き込み2変量正規密度

関数を表している。

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi\sigma_\theta\sigma_\phi\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} e^{\frac{Q}{2}} \quad (21)$$

$$Q = \frac{(\theta - 2\pi k_1)^2}{\sigma_\theta^2} + \frac{(\phi - 2\pi k_2)^2}{\sigma_\phi^2} - \frac{2\rho(\theta - 2\pi k_1)(\phi - 2\pi k_2)}{\sigma_\theta\sigma_\phi}$$

4.5 位相因子の期待値の導出

位相因子の期待値の導出を行う。式(4)と(5)、(6)により位相因子 $e^{j\alpha_k}$ の期待値 A がわかれば、POC関数の期待値および分散を導出することができる。式(6)で与えられている α は2信号間の位相スペクトル差 α_k を表しているため、2変量の位相スペクトル (θ_k, ϕ_k) を用いて以下のように表すことができる。

$$A = E[e^{j\alpha_k}] = E[e^{j(\theta_k - \phi_k)}] \quad (22)$$

オイラーの公式を使い、式(22)の右辺を以下のように展開する。

$$\begin{aligned} E[e^{j(\theta_k - \phi_k)}] &= E[\cos(\theta_k - \phi_k) + j \sin(\theta_k - \phi_k)] \\ &= E[\cos(\theta_k - \phi_k)] + jE[\sin(\theta_k - \phi_k)] \\ &= E[\cos \theta_k \cos \phi_k] + E[\sin \theta_k \sin \phi_k] \\ &\quad + jE[\sin \theta_k \cos \phi_k] - jE[\cos \theta_k \sin \phi_k] \end{aligned} \quad (23)$$

4.6 POC関数の期待値の導出

文献⁷⁾により、2変量 (θ, ϕ) が巻き込み2変量正規分布に従う場合に、2変量の角度データを表す統計量として以下の式が与えられる。

$$E[\sin \theta \sin \phi] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2)\right\} \sinh(\rho\sigma_\theta\sigma_\phi) \quad (24)$$

$$E[\cos \theta \cos \phi] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2)\right\} \cosh(\rho\sigma_\theta\sigma_\phi) \quad (25)$$

$$E[\sin \theta \cos \phi] = E[\cos \theta \sin \phi] = 0 \quad (26)$$

式(24)と(25), (26)を式(23)に代入すると, 位相因子の期待値は以下のように導出できる.

$$E[e^{j(\theta_k - \phi_k)}] = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_\theta^2 - 2\rho\sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2) \right\} \quad (27)$$

この時, POC 関数の期待値と分散は式(23)を式(4)と(5)に代入することにより, 以下の式で導出できる.

$$\begin{aligned} E[r(m)] &= A\delta(m) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_\theta^2 - 2\rho\sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2) \right\} \delta(m) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[r(m)] &= \frac{1}{N}(1 - |A|^2) \\ &= \frac{1}{N} \left(1 - \exp \left\{ -(\sigma_\theta^2 - 2\rho\sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2) \right\} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで式(28)と(29)は2変量 (θ_k, ϕ_k) に2変量正規分布を仮定して導出された式(15)と(16)とそれぞれ一致している. すなわち, 2変量正規分布に巻き込み分布を仮定した場合の結果は, もとの平面上で表される確率分布を仮定した場合の結果と一致することがわかった.

5. まとめ

2信号の位相スペクトルを2変量正規分布に従うと仮定して, 位相スペクトルの変化に対するPOC関数の変化を調べた. この時, 位相スペクトル差は1変量正規分布に従い, 分散は2変量正規分布の共分散行列を線形変換することで求められる. また, 2信号の位相スペクトルを巻き込み2変量正規分布に従うと仮定してPOC関数の期待値と分散を導出した. その結果, 2信号の位相スペクトルが巻き込み2変量正規分布に従うと仮定したときのPOC関数の期待値と分散は, 平面上で与えられる2変量正規分布を仮定したときの結果と一致することを証明した. これより, 2信号の位相スペクトルが巻き込み2変量正規分布に従う場合のPOC関数の統計的性質は, 方向統計学の概念を用いて説明できることが示された.

参考文献

- 1) H. Nakajima, K. Kobayashi, T. Aoki, and T. Higuchi, "Pattern collation apparatus based on spatial frequency characteristics (USP 5915034)," US patent, May 1995.
- 2) C. D. Kuglin and D. C. Hines, "The Phase Correlation Image Alignment Method," Proc. IEEE, Int. Conf. on Cybernetics and Society, pp. 163-165, 1975.
- 3) Andrzej K. Brodzik, "Phase only filtering for the masses(of DNA data): A new approach to sequence alignment," IEEE Trans. Signal Processing, VOL. 54, NO. 6, pp. 2456-2466, June 2014.
- 4) S. Yamaki, J. Odagiri, M. Abe and M. Kawamata, "Effects of Stochastic Phase Spectrum Differences on Phase-Only Correlation Functions Part I: Statistically Constant Phase Spectrum Differences for Frequency Indices," Proceedings of IEEE 3rd International Conference on Network Infrastructure and Digital Content, pp. 360-364, September 2012.
- 5) S. Yamaki, M. Abe and M. Kawamata, "Statistical Analysis of Phase-Only Correlation Functions Based on Directional Statistics," IEICE Trans. Fundamentals, VOL. E97-A, NO. 12, pp. 2601-2610, DECEMBER 2014.
- 6) KANTIV. MARDIA and PETER E. JUPP, "Directional Statistics," John Wiley and Sons Ltd, 2000.
- 7) N. I. Fisher and A. J. Lee, "A correlation coefficient for circular data," Biometrical. 70. 2, pp. 327-332, 1983.