

# Lotka-Volterra システムに対する一推定問題

## An Estimation Problem for Lotka-Volterra Systems

石原 正

Tadashi Ishihara

福島大学

Fukushima University

キーワード : ロトカ-ボルテラ方程式(Lotka-Volterra equation), 動的推定(dynamic estimation), 非線形オブザーバー (nonlinear observer), 最小次元オブザーバ(minimal order observer)

連絡先 : 〒960-1296 福島市金谷川 1 福島大学共生システム理工学類 石原 正,  
Tel./Fax: (024)548-8179, Email: ishihara@sss.fukushima-u.ac.jp

### 1. はじめに

本報告では, 良く知られている 2 次元 Lotka-Volterra システムにおいて, 状態変数の一つが測定可能であるものとし, その測定値から他方の状態変数を動的に推定する問題を考える.

この問題に対する動的推定器は, 非線形オブザーバの理論<sup>1)</sup>を適用することで構成できると考えられるが, ここでは, 非線形系に関する細かな知識を前提とせず, 初等的な方法で直接構成することを試みる.

まず, 測定値の時間微分値が利用可能であるものとし, 誤差システムを非線形変換により線形化し, 推定器を構成する. 次に, 測定値の微分を回避できるように推定器を再構成し, シミュレーションにより, 構成した動的推定器の有効性を確認する.

### 2. Lotka-Volterra システム

次のような 2 次元 Lotka-Volterra システムを考える.

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \quad (2)$$

ここで,  $x(t) \in R$ ,  $y(t) \in R$  であり, 4 つの係数  $a, b, c, d$  は正の実数であると仮定する.

捕食・被捕食種モデルの場合には,  $x(t)$  が被捕食種,  $y(t)$  が捕食種に対応する.

### 3. 動的推定器の構成

(1), (2)式において, 変数  $x(t)$  のみが測定可能であるとし, その測定値から変数  $y(t)$  を動的に推定する問題を考える. なお, 初期値  $x(0), y(0)$

は  $x(t) > 0, y(t) > 0, (t \geq 0)$  となるように選ばれていると仮定する.

### 3.1 測定値の微分値を利用する構成

変数  $y(t)$  の推定値を  $\hat{y}(t)$  とし, 次のような構造の動的推定器を考える.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{y}(t) = & -c\hat{y}(t) + dx(t)\hat{y}(t) \\ & + k[x(t)] \left[ \frac{d}{dt} x(t) - ax(t) \right. \\ & \left. + bx(t)\hat{y}(t) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで,  $k[x(t)]$  は推定ゲインであり, 推定値  $\hat{y}(t)$  が漸近的に  $y(t)$  に一致するように選ぶ. 次の結果は, 測定値の非線形変換による推定ゲインの決定法を与えている.

**命題 1** :  $\lambda > 0$  に対して, 推定ゲイン  $k[x(t)]$  を次のように選ぶ.

$$k[x(t)] = \frac{c - \lambda}{bx(t)} - \frac{d}{b} \quad (4)$$

このとき, (3) 式の推定器の推定誤差

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (5)$$

は, 任意の初期推定値  $\hat{y}(0)$  に対して,  $t \rightarrow \infty$  で 0 に収束する.

**証明** : (2), (3) 式から, 推定誤差  $\tilde{y}(t)$  は次の微分方程式を満たす.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = & \left\{ -c + dx(t) \right. \\ & \left. - k[x(t)]bx(t) \right\} \tilde{y}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, (4) 式の推定ゲインを用いると, 推定誤差方程式は次のように線形化される.

$$\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = -\lambda \tilde{y}(t) \quad (7)$$

すなわち,  $\lambda > 0$  に対して, 推定ゲインを (4) 式のように選ぶと, 推定誤差の 0 への収束が保証される. ■

### 3.2 測定値の微分を回避する構成

命題 1 で与えられる推定器は非線形最小次元オブザーバの一種とみなせる. 線形系に対する最小次元オブザーバの構成に用いられた手法  $\mathcal{O}$  を拡張することにより, (3) 式で必要とされる測定値  $x(t)$  の微分を以下のように回避できる.

**命題 2** : (3) 式で与えられる推定値  $\hat{y}(t)$  は次のように求めることも可能である.

$$\hat{y}(t) = z(t) - \theta[x(t)] \quad (8)$$

ここで,  $\theta[x(t)]$  は測定値  $x(t)$  の非線形関数

$$\theta[x(t)] = \frac{\lambda - c}{b} \ln x(t) + \frac{d}{b} x(t) \quad (9)$$

であり, 変数  $z(t)$  は次の動的システムにより生成される.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(t) = & -\lambda z(t) - ax(t)k[x(t)] \\ & + \lambda \theta[x(t)] \end{aligned} \quad (10)$$

**証明** : 明らかに, (4) 式と (9) 式の間には

$$\frac{d}{dt} \theta[x(t)] = -k[x(t)] \frac{d}{dt} x(t) \quad (11)$$

の関係が成立する. 変数  $z(t)$  を

$$z(t) = \hat{y}(t) + \theta[x(t)] \quad (12)$$

と定義すると, (3), (11) 式から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(t) = & -c\hat{y}(t) + dx(t)\hat{y}(t) \\ & - k[x(t)] \\ & \times [ax(t) - bx(t)\hat{y}(t)] \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる. さらに, (12) 式を用いて,  $\hat{y}(t)$  を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(t) = & \{bx(t)k[x(t)] - c \\ & + dx(t)\} \{z(t) - \theta[x(t)]\} \\ & - ax(t)k[x(t)] \end{aligned} \quad (14)$$

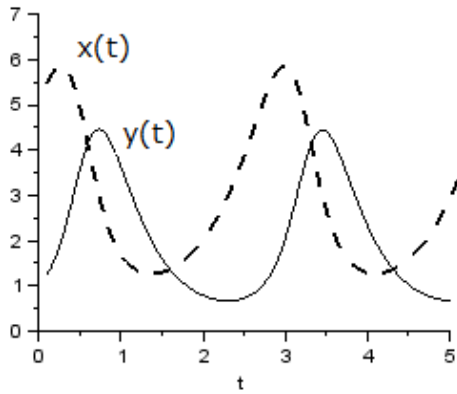


Fig. 1 Evolution of  $x(t)$  and  $y(t)$

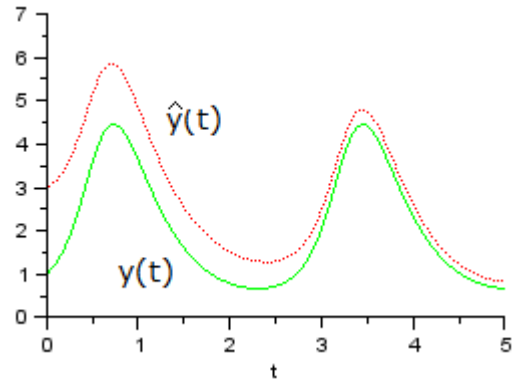


Fig. 2 Estimation result for  $\lambda = 0.5$

が得られる. 上式へ(4)式を用いると(10)式が導かれる. ■

#### 4. 数値例

前節で構成した動的推定器の有効性を Scilab/Xcos を用いた数値シミュレーションにより確認する.

(1), (2)式で

$$a = 2, b = 1, c = 3, d = 1$$

とした Lotka-Volterra システムを考える. 初期値は

$$x(0) = 5, y(0) = 1$$

と設定した.

Fig.1 にこの場合の $x(t)$ ,  $y(t)$ の推移を示す. 推定誤差を支配するパラメータ $\lambda$ を 0.5 とし, 初期推定値を $\hat{y}(0) = 3$ とした場合の推定値 $\hat{y}(t)$ と真値 $y(t)$ の推移を Fig.2 に示す. また,  $\lambda = 1$ とした場合の結果を Fig. 3 に示す. パラメータ $\lambda$ を増加させると, 推定値の真値への収束が速まることが確認できる.

#### 5. おわりに

2次元 Lotka-Volterra システムに対する動的推定器の構成について考察した. 今後, 確率的システムとしての定式化や3次元以上の系

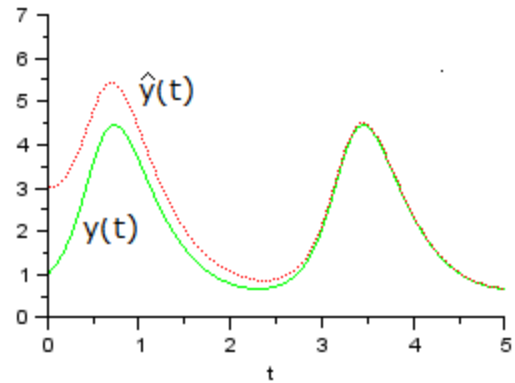


Fig. 3 Estimation result for  $\lambda = 1$

に対する拡張について検討する必要がある.

#### 謝辞

数値計算にご協力頂いた川田慶一氏に感謝致します.

#### 参考文献

- 1) A. J. Krener and W. Respondek: Nonlinear observers with linearizable error dynamics, SIAM. J. Control and Optimization, **23**-2, 197/216, (1985)
- 2) D, G, Luenberger: An introduction to observers, IEEE Transactions on Automatic Control, **16**-6, 596/602, (1971)