計測自動制御学会東北支部 第 301 回研究集会 (2016.5.23)
資料番号 301-5

出力フィードバック型リセット則を持つリセットシステムの安定条件について

On the stability condition of reset system with output-feedback type reset law

○伊深　恭平，佐藤　淳

○ Kyohei Ibuka，Atsushi Satoh

岩手大学

Iwate University

キーワード： リセットシステム (reset system)，ハイブリッドシステム (hybrid system)，ジャンプ不動点 (jump fixed-point)，出力フィードバック (output-feedback)

連絡先： 〒 020-8551　岩手県盛岡市上田 4-3-5
岩手大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻
佐藤　淳，Tel: 019-621-6404，E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

1.　緒言

リセットシステムは連続時間ダイナミクスと連続時間ダイナミクスを併せ持つハイブリッドシステムの一種である．通常は連続的な状態遷移 (フロー) しているが，システムの状態がある条件を満たしたとき，リセットと呼ばれるイベントが発生し，不連続な状態遷移 (ジャンプ) が起こる．

通常の連続時間システムにリセット則を導入することで，好ましい特性を得ようとするリセット制御の研究が古くから行われており，その始まりは 1958 年の Clegg integrator といわれている．参考文献 1) などで，リセット制御器を用いることによって，線形制御器では安定化不可能なシステムを安定化可能としたりと，システムの速応性や $\mathcal{L}_2$ 性能を向上することが示されている．

リセットシステムに関する既存の研究として，状態フィードバック型のリセットシステムの安定解析や設計がある [2, 3]．状態フィードバック型のリセットシステムとは，リセットの発生条件および状態のジャンプが, システムの全ての状態量に依存しているものを指す．一方， 出力フィードバック型のリセットシステムとは，リセット条件，状態ジャンプがシステムの出力に依存しているものを指す.

Satoh は，Nesic et al.[5] が示した，フローとジャンプのいずれの状態遷移においても厳密に減少するタイプのリアプノフ関数に基づく安定条件を利用し，出力フィードバック型リセットシステムの安定条件を LMI アプローチにより示した [4]．しかし，その結果では，リセット条件と状態ジャンプのそれぞれは出力のみに依存している場合を考えているが，システムが漸近安定とな

るには，実質的に全状態量の情報を必要とすることが示された．

そこで本発表では，真の出力フィードバック型の安定条件導出に向け，ジャンプ不動点の性質について，いくつかの考察を示す．

2. 導入

2.1 線形リセットシステム

線形リセットシステムのダイナミクスは次のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bd, && \text{if } x \in \mathcal{F} && \text{(1a)}\\
x^+ &= \mathcal{A}x, && \text{if } x \in \mathcal{J} && \text{(1b)}\\
y &= Cx && && \text{(1c)}
\end{aligned}
$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とする．x, d, y はそれぞれ状態，入力，出力ベクトルであり，x^+ はジャンプ直後の状態量である．$\mathcal{A}$ をジャンプ行列と呼ぶ．状態空間の閉集合 $\mathcal{F}, \mathcal{J} \subset \mathbb{R}^n$ はそれぞれフローセット，ジャンプセットと呼び，$\mathcal{F}\cup\mathcal{J} = \mathbb{R}^n$ である．システムのダイナミクスは，x がフローセット内にあり，フロー可能なときは (1a) 式に従う．x がジャンプセット内にあるときは (1b) 式に従ってジャンプが可能である．

本稿では，非ゼロのリセット行列 $M = M^T \in \mathbb{R}^n$ を用いて，フロー/ジャンプセットを次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} &:= \{x \in \mathbb{R}^n | x^T M x \geqq 0\} && \text{(2a)}\\
\mathcal{J} &:= \{x \in \mathbb{R}^n | x^T M x \leqq 0\} && \text{(2b)}
\end{aligned}
$$

リセットシステムはハイブリッドシステムの一種であるため，システム (1) 式の解はハイブリッド時間 $(t, k) \in \mathbb{R}_{\geqq 0} \times \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ によってパラメータ化される．このときの t は連続時間 (通常時間)，k は離散時間 (リセット回数) である．したがって，システム (1) 式の解はハイブリッド信号 $x : dom\, x \to \mathbb{R}^n$ であり，$dom\, x \subset \mathbb{R}_{\geqq 0} \times \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ はハイブリッド時間領域を示す．

2.2 時間正則化 (Temporal regularization)

リセットシステム (1) 式には，有限時刻でリセット間隔が 0 に収束し，解が連続時間方向に発展しなくなるゼノ解や離散解が存在し，制御の実行やシミュレーションを難しくする．このような解を取り除くために，最小のリセット間隔 $\rho > 0$ を導入し，ρ 以上の時間が経過しない限りリセットの発生しないよう制限するための条件を追加する．これを時間正則化といい，(1) 式のシステムを時間正則化したシステムは次のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bd,\ \dot{\tau} = 1,\ \text{if } x \in \mathcal{F} \text{ or } \tau \leqq \rho, && \text{(3a)}\\
x^+ &= \mathcal{A}x,\ \tau^+ = 0,\ \text{if } x \in \mathcal{J} \text{ and } \tau \geqq \rho. && \text{(3b)}
\end{aligned}
$$

2.3 リセットシステムの安定条件

フローとジャンプのいずれにおいても厳密に減少するタイプのリアプノフ関数に基づくリセットシステムの指数安定条件が，Lemma 1[4]，Theorem 5[3] より，以下の定理 1 によって示されている [4]．

定理 1

$d = 0$ としたシステム (1) 式を考える．ある τ_F, $\tau_J \geqq 0$ に対して，(4), (5) 式を満たす $P = P^T > 0$ が存在するならば，$\rho^* > 0$ が存在して，どのような $\rho \in (0, \rho^*)$ に対しても，時間正則化されたシステム (1) 式の x ダイナミクスの原点は指数安定である．

$$
\begin{aligned}
A^T P + PA + \tau_F M &< 0 && \text{(4)}\\
\mathcal{A}^T P \mathcal{A} - P - \tau_J M &< 0 && \text{(5)}
\end{aligned}
$$

(4) 式，(5) 式はそれぞれフロー，ジャンプ時のリアプノフ関数の減少を保証する．

2.4　フルビッツ可安定とフルビッツ可検出

参考文献 4) において, 以下のように定義されている.

定義 1
$A_1^{n\times n}, A_2^{n\times m}, A_3^{n\times l}$ が与えられる.

1) $\Re(s) \geqq 0, v^*A_1 = sv^*, v \neq 0$ となるような，すべての $(s,v) \in \mathbf{C}\times\mathbf{C^n}$ に対して $v^*A_2 \neq 0$ のとき，(A_1, A_2) をフルビッツ可安定と呼ぶ.

2) $\Re(s) \geqq 0, A_1u = su, u \neq 0$ となるような，すべての $(s,u) \in \mathbf{C}\times\mathbf{C^n}$ に対して $A_3u \neq 0$ のとき，(A_3, A_1) をフルビッツ可検出と呼ぶ.

なお、u, v をモードベクトルど呼ぶ.

3.　問題設定

3.1　出力フィードバック型リセット則を持つリセットシステム

制御対象と制御器が同期してリセットする出力フィードバック型の閉ループ系を考える.

制御対象のダイナミクスは次のように与える.

$$\dot{x}_p = A_px_p + B_{pd}d + B_{pu}u, \tag{6a}$$

$$x_p^+ = \mathcal{A}_px_p + \mathcal{B}_{pu}u, \tag{6b}$$

$$z = C_{pz}x_p, \tag{6c}$$

$$y_{pc} = C_{pc}x_p, \tag{6d}$$

$$y_{pr} = C_{pr}x_p \tag{6e}$$

$x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ である。(6) 式では，z は性能評価のための制御出力である．出力 y_{pc}，y_{pr} はそれぞれ制御器とリセット判定用の測定出力である.

出力フィードバック型のリセット制御器のダイナミクスは次のように与える.

$$\dot{x}_c = A_cx_c + B_cy_{pc}, \tag{7a}$$

$$x_c^+ = \mathcal{A}_cx_c + \mathcal{B}_cy_{pc}, \tag{7b}$$

$$u = C_cx_c \tag{7c}$$

$x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ である.

フロー/ジャンプセットは (2) 式のように与え，x，M は次のように与える.

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_p+n_r)} \tag{8}$$

$$M = \begin{bmatrix} C_{pr}^TM_1C_{pr} & C_{pr}^TM_2^T \\ M_2C_{pr} & M_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

以下の (10) 式から，リセット条件が制御対象の出力と制御器の状態に依存していることがわかる.

$$\begin{aligned} x^TMx &= \begin{bmatrix} x_p^T & x_c^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{pr}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 & M_2^T \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{pr} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{pr}^T & x_c^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 & M_2^T \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{pr} \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

(6)，(7) 式の閉ループ系は，$y = z$ とし，(1) 式の A，B，$C, \mathcal{A}$ を以下の (11) 式としたシステムになる.

$$A = \begin{bmatrix} A_p & B_{pu}C_c \\ B_cC_{pc} & A_c \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_{pd} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{11a}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{pz} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11b}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_p & \mathcal{B}_{pu}C_c \\ \mathcal{B}_cC_{pc} & \mathcal{A}_c \end{bmatrix} \tag{11c}$$

(9)，(11c) 式のような構造のリセット則 $(\mathcal{A}, M)$ を持つシステムを出力フィードバック型リセット則を持つリセットシステムと呼ぶ.

3.2　連続時間制御対象の場合

以後，連続時間制御対象に限定することとして，次の仮定 1 を導入する.

仮定 1
制御対象 *(6)* 式において，$(\mathcal{A}_p, \mathcal{B}_{pu}) = (I, 0)$ とする．このとき，ジャンプ行列は次のようになる.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B}_cC_{pc} & \mathcal{A}_c \end{bmatrix} \tag{12}$$

仮定1のもと，Satohにより，連続時間対象における，閉ループ系を漸近安定とする出力フィードバック型リセット制御器が存在するための必要条件が以下の補題1[4]によって示されている．

補題 1

仮定 *1* のもと，*(4)*，*(5)* 式が可解であるならば，以下のことが成り立つ．

1) (A_p, B_{pu}) がフルビッツ可安定である．

2) (C_{pc}, A_p) がフルビッツ可検出である．

3) $C_p := \begin{bmatrix} C_{pc} \\ C_{pr} \end{bmatrix}$ は列フルランクである．

4) $\tau_J > 0$ である．

補題1より，C_p が列フルランクである場合，連続時間部分やリセット条件をそれぞれ個別に見れば出力フィードバック型であるが，システム全体で見ると状態の完全な情報が必要であり、状態フィードバック型と同等なシステムになっている．よって，C_p が列フルランクでないとき，システムは真の出力フィードバック型リセットシステムであるといえる．

4. 出力フィードバック型リセットシステムの漸近安定条件について

C_p が列フルランクでない，出力フィードバック型リセット則を持つリセットシステムの漸近安定条件に関して考察する．以降，簡単のため，$C_{pc} = C_{pr} = \hat{C}_p$ のときを考える．$\hat{C}_p$ が列フルランクでないとき，C_p も列フルランクでない．

もし $\hat{C}_p$ が列フルランクでないとき，出力フィードバック型のリセットシステムについて以下の定理2が成り立つ．

ここで，

$$\hat{C} := \begin{bmatrix} \hat{C}_p & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{M} := \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

とすると，リセット行列 M は，

$$M = \hat{C}^T \hat{M} \hat{C} \tag{14}$$

で表される．

定理 2

各行列を *(11a)*，*(11b)*，*(12)* 式のように与えたシステム *(1)* 式を考える．C_p が列フルランクでないならば，

$$\mathrm{Ker}(\hat{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \mid v \in \mathrm{Ker}(\hat{C}_p) \right\} \tag{15}$$

が存在して，$x \in \mathrm{Ker}(\hat{C})$ のとき，x は $\mathcal{F}, \mathcal{J}$ の境界上に存在し，ジャンプの前後で状態量が変化しない点 *(*以後ジャンプ不動点と呼ぶ*)* である．

証明

仮定より $\mathrm{Ker}(\hat{C}_p)$ が存在するので，$\mathrm{Ker}(\hat{C})$ が定義できる．

$$x = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(\hat{C}) \tag{16}$$

とすると，*(12)* 式より，

$$\begin{aligned} x^+ = \mathcal{A}x &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B}_c C_{pe} & \mathcal{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= x \end{aligned} \tag{17}$$

よって，*(16)* 式の x はジャンプ不動点である．

また，*(9)* 式より，

$$\begin{aligned} x^T M x &= \begin{bmatrix} v^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_p^T M_1 \hat{C}_p & \hat{C}_p^T M_2^T \\ M_2 \hat{C}_p & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= v^T \hat{C}_p^T M_1 \hat{C}_p^T v + v^T \hat{C}_p^T M_2 v \\ &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

よって，x はフローセットとジャンプセットの境界上に位置する． □

$x \in \mathrm{Ker}(\hat{C})$ とする．(5) 式に x^T, x をそれぞれ左右から掛けると，(5) 式の左辺は，

$$x^T(\mathcal{A}^T P \mathcal{A} - P - \tau_J M)x = 0 \tag{19}$$

となる．よって，出力フィードバック型リセットシステムにおいて，$\hat{C}_p$ が列フルランクでないとき，(5) 式を満たす $P > 0$,$\tau_J \geqq 0$ は存在しない．したがって，(5) 式が可解とならないため，

定理 1 の安定条件は，真の出力フィードバック型リセットシステムの安定解析に利用できない．

定理 2 より，$\hat{C}_p$ が列フルランクでないとき，ジャンプ不動点が必ず存在する．もし同時にフロー不動点となっていれば，システムは絶対に漸近安定にならない．よって，ジャンプ不動点と同時にフロー不動点とならない条件について考える．$x \in \mathrm{Ker}(\hat{C})$ のとき，

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} A_p & B_{pu} \\ B_c\hat{C}_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_p v \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

より，$A_p v = 0$ のとき，$Ax = 0$ となる．よって，

$$\begin{bmatrix} A_p - 0 \cdot I \\ \hat{C}_p \end{bmatrix} v = 0, \quad \exists v \neq 0 \tag{21}$$

これは，$(\hat{C}_p, A_p)$ がフルビッツ可検出でないことを意味する．したがって，$(\hat{C}_p, A_p)$ がフルビッツ可検出ならば，$Ax \neq 0$ となり，x はフロー不動点でないことが保証される．

以上より，$x \in \mathrm{Ker}(\hat{C})$ がフロー不動点でないならば，時間正則化によって離散解を取り除けば，出力フィードバック型に由来するジャンプ不動点は取り除かれる．

5. 数値例

仮定 1 の下で，各行列を (11) 式のように与えた時間正則化された閉ループ系 (1) 式を考える．$x_p = \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \end{bmatrix}, x_c = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix}$ とする．制御対象 (6) 式の各行列を以下のように与える．

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_{pd} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_{pu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_{pz} &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, \\ C_{pc} &= C_{pr} = \hat{C}_p = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

このとき，(A_p, B_{pu}) はフルビッツ可安定であり，$(\hat{C}_p, A_p)$ はフルビッツ可検出である．また，C_p は以下のようになる．

$$C_p = \begin{bmatrix} C_{pc} \\ C_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

(23) 式より，明らかに C_p は列フルランクでない．

出力フィードバック型リセット制御器 (7) 式の各行列は次のように与える．

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ C_c &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_c &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

このとき，フロー行列 A の固有値は，$\mathrm{eig}(A) = \{-0.000, -2.000, -1.000, -1.000\}$ であり，すべて負であるため，A はフルビッツ安定である．

出力フィードバック型のリセット行列 (9) 式における M_1, M_2, M_3 は次のように与える．

$$M_1 = -3, M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

以上のように考えたシステムについて，x の初期値を $x_0 = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ x_{c0} \end{bmatrix}$ とし，$x_{p0} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$x_{c0} = 0$ とする．このとき，

$$\hat{C}_p x_{p0} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{26}$$

より，$x_{p0} \in \mathrm{Ker}(\hat{C}_p)$ である．また任意の $k \in \mathbb{R}$ について

$$x_p = k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(\hat{C}_p) \tag{27}$$

である．

$x_0 = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ 0 \end{bmatrix}$，かつ，$x_{p0} \in \mathrm{Ker}(\hat{C}_p)$ より，$x_0 \in \mathrm{Ker}(\hat{C})$ である．

τ の初期値を $\tau_0 = 1$，最小リセット間隔を $\rho = 0.5[s]$，入力を $d = 0$ としたときの，初期値応答を図 1 に示す．

$x_0 \in \mathcal{J}$，$\tau_0 = 1$ であることから，$t = 0[s]$ においてリセットが発生する．また，$x_0 \in \mathrm{Ker}(\hat{C})$

より，この初期値は時間正則化を行う前のシステムのジャンプ不動点である．しかし図 1 の応答の計算では，時間正則化によって離散解が排除されているため，1 回のジャンプ後フローに転じる．閉ループ系のフロー行列 A がフルビッツ安定であることから，時間の経過とともに，状態は平衡点に収束しており，時間正則化により，x_0 が不動点でなくなったことが確認できる．

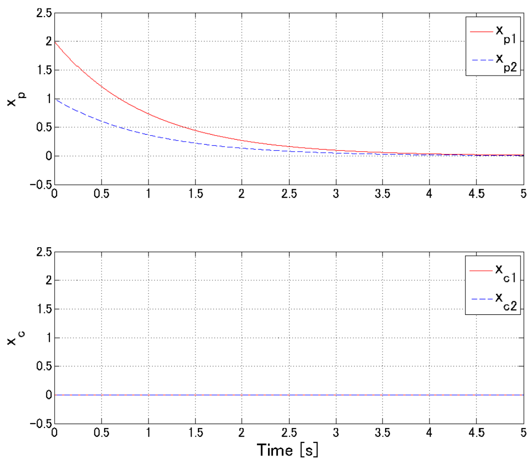

Fig. 1　出力フィードバック型リセット則を持つリセットシステムの初期値応答

6.　結言

出力フィードバック型リセット則を持つ閉ループリセットシステムに関して，C_p が列フルランクでないとき，フローセットとジャンプセットの境界上にジャンプ不動点が必ず存在するため，参考文献 5) の安定条件を安定解析に使用できない．

またそのようなジャンプ不動点と同時にフロー不動点となる場合，システムは漸近安定になることはないが，$(\hat{C}_p, A_p)$ がフルビッツ可検出であることが，このような状況を生じないための十分条件であることを明らかにした．

参考文献

1) D. Nesic, L.zaccarian, and A.Teel :Stability properties of reset system, in IFAC World Congress, Prague (CZ) 2004

2) A. Satoh, Synthesis of Continuous-time Linear Rest Feedback System with $\mathcal{L}_2$ Stability, Proc. of SICE2010, pp. 1100-1105, 2010.

3) A. Satoh, State Feedback Synthesis of Linear Reset Control with L2 Performance Bound via LMI Approach, Proc. of IFAC2011, pp. 5860-5865, 2011.

4) A. Satoh, Synthesis of Output Feedback Liner Reset Control Based on Common Quadratic Lyapunov-like Function, 2015.

5) D. Nesic, A. R. Teel and L. Zaccarian, On necessary and sufficient conditions for exponential and $\mathcal{L}_2$ stability of planer reset systems, Proc. of ACC2008, pp. 2019-2026, 2008.