

# 状態依存イベント駆動型 サンプル値フィードバックシステムの漸近安定化

## Asymptotic stabilization of state dependent event-driven sampled-data feedback system

○渥美 萩, 佐藤 淳

○ Shu Atsumi, Atsushi Satoh

岩手大学

Iwate University

キーワード: サンプル値フィードバック (sampled-data feedback), リセットシステム (reset system),  
イベント駆動型 (event-driven), LMI アプローチ (LMI approach)

連絡先: 〒 020-8551 岩手県盛岡市上田 4-3-5  
岩手大学大学院 総合科学研究科 理工学専攻 機械・航空宇宙コース  
佐藤 淳, Tel: 019-621-6404, E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

### 1. 諸言

サンプル値フィードバックシステムとは, 連続時間制御対象が出力する連続時間信号の, サンプルング周期と呼ばれる一定の周期ごとの値のみを用いてフィードバックを行うシステムである. 1990 年代以降のコンピュータ環境の急速な発展に伴ってその実装の容易さから, 今日の多くの制御系はサンプル値フィードバックシステムの手法が用いられている<sup>1)</sup>. このとき, 連続時間信号を離散時間信号へと変換して取り出すことをサンプリング動作といい, またこの機構をサンプラと呼ぶ. また, 制御対象へのフィードバック入力は連続時間信号でなければならない為, 離散時間コントローラで計算された離散時間信号を連続時間信号へと変換を行う必要がある. これを行う機構をホールドと呼び, 特に次のサンプリング周期まで一定の値を与える, ゼロ次ホー

ルドと呼ばれる手法を実装の容易さから採用する場合がほとんどである.

しかしながら, サンプル値フィードバックシステムは, サンプルングが周期的に行われる仮定を下に成り立っているが, 実システムに関して, 無線通信等のネットワーク制御システムにおいて通信経路を独占してしまう等の影響や, 組込制御系においてコントローラの性能が低い場合など, 周期的な制御が困難なため仮定が成立しないシステムが存在する.

こういった背景から, 近年イベントトリガー型, もしくはイベント駆動型などと呼ばれる, サンプルング動作を非周期的に行うサンプル値制御系への関心が高まると共に, 様々なアプローチが研究されてきた<sup>2)3)</sup>.

そこで, 新たなアプローチの一つとして, 自身の状態に基づいてサンプリング動作を行う, 状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバック

システムを提案したい. 従って, 本稿では実現のために, 二次錐型リセットシステムと呼ばれる制御系を導入し, その枠組みで非周期的にサンプリング動作を行うサンプル値フィードバックシステムを実現する. また, 実現するシステムに関する漸近安定条件を LMI アプローチに基づいて導出する.

本稿において用いられる二次錐型連続時間線形リセットシステムに関しては文献<sup>4)5)</sup>等を参照されたい.

以下において, 対称行列  $P$  に関して,  $P > 0$  ( $\geq 0$ ) は  $P$  が正定 (準正定) であることを示し, 行列  $A^T$  は  $A$  の転置を表す.

## 2. 問題設定

次の連続時間制御対象  $\mathcal{P}$  を考える.

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (1a)$$

$$u = Kx \quad (1b)$$

ここで  $u$  は定数ゲイン  $K$  による状態フィードバックである.

この制御対象に関して, 以下の問題設定で実現される状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムを考える.

- サンプリング動作を行う条件 (イベント) は次式で与えられる.

$$x \in \mathcal{J} := \{x \mid x^T M x \leq 0\} \quad (2)$$

ここで,  $M = M^T$  は不定な対称行列である.

- ホールドはゼロ次ホールドである.

以上の問題設定を満足する, 状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムの漸近安定化を考える.

## 3. 状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムの定式化

サンプル値フィードバックシステムは連続時間制御対象と離散時間コントローラで構成される, ハイブリッドシステムの種類である. そこで, 状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムを Fig. 1 で示されるハイブリッドダイナミクスで考える.

ここで, 実線部分が連続時間ダイナミクス, 破

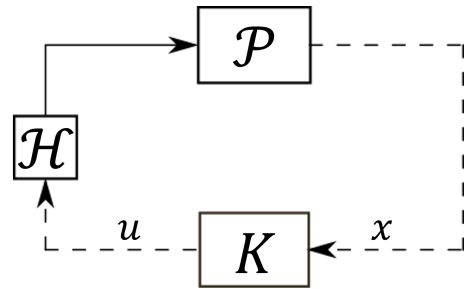


Fig. 1 ハイブリッドダイナミクス

線部分が離散時間ダイナミクスを示している. また, 問題設定からコントローラ  $K$  へのサンプリング動作によるフィードバックは (2) を満たした時に行われ, 制御対象への入力はゼロ次ホールド  $\mathcal{H}$  で生成される. このハイブリッドダイナミクスについて, 部分ごとに分解して考える.

いま Fig. 2 における (ゼロ次) ホールドは離散時間入力に従い, 連続時間出力を更新する. このことから, ホールドは連続時間と離散時間の両方のダイナミクスを有す, ハイブリッドダイナミクスを持つことが理解される. そこで, このダイナミクスを記述する為に, ホールドの状態量  $x_h$  を定義する.

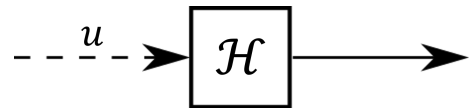


Fig. 2 ホールド

まずホールドのもつ連続時間ダイナミクス

について考える. いま, 問題設定よりホールドはゼロ次ホールドを採用しているため, 連続時間方向においてホールドの状態量は不変である. 従って, ホールドの連続時間ダイナミクスは以下のように記述される.

$$\dot{x}_h = 0 \quad (3)$$

これは制御対象への入力に相当する.

次にホールドの持つ離散時間ダイナミクスについて考える. ホールドは離散時間入力を受けて出力, つまりここでは自身の状態を更新する. 従って, ホールドの離散時間ダイナミクスは以下のように記述される.

$$x_h^+ = u \quad (4)$$

ここで上添え字 + は離散時間方向への 1 ステップ分の時間発展を表しており, これは制御入力の更新に相当する.

従って, (3), (4) 式よりホールド  $\mathcal{H}$  のダイナミクスは次式で記述される.

$$\mathcal{H} \begin{cases} \dot{x}_h = 0 \\ x_h^+ = u \end{cases} \quad (5)$$

いま, ホールドを含めた新たな拡大系状態量  $x := [x_p^T \ x_h^T]^T$  を定義する. このとき, Fig. 1 における連続時間ダイナミクス部分は Fig. 3 のように示すことができる. Fig. 3 において制御対

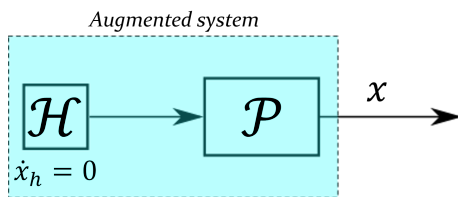


Fig. 3 連続時間ダイナミクス

象への入力はゼロ次ホールドで生成されることから,  $\mathcal{P}$  の連続時間ダイナミクスは次のように得られる.

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p x_h \quad (6)$$

従って, このとき拡大系の連続時間ダイナミクスは以下のように得られる.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (7)$$

Fig. 1 のハイブリッドダイナミクスにおける離散時間ダイナミクス部分は Fig. 4 のように示される.  $\mathcal{P}$  は連続時間システムであるため, 離散時

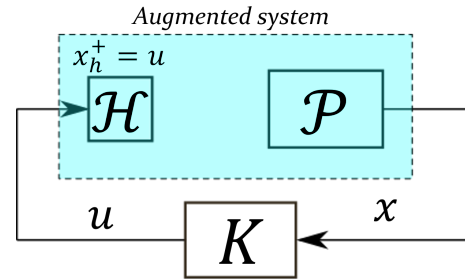


Fig. 4 離散時間ダイナミクス

間ダイナミクスにおいてその状態量は不変である. 従って,  $\mathcal{P}$  の離散時間ダイナミクスは次のように記述できる.

$$x_p^+ = x_p \quad (8)$$

また制御入力は状態フィードバックで更新されるため, ホールドの離散時間ダイナミクスは入力行列  $\mathcal{B}_h$  を用いて以下のように記述できる.

$$x_h^+ = Kx = \mathcal{B}_h u \quad (9)$$

このとき, 拡大系の離散時間ダイナミクスは以下のように得られる.

$$x^+ = \begin{bmatrix} x_p^+ \\ x_h^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{B}_h \end{bmatrix} u \quad (10a)$$

$$u = Kx \quad (10b)$$

以上より, 問題設定を満足する拡大系パラメータ  $(A, \mathcal{A}, \mathcal{B})$  は以下のように与えられる.

$$A = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{B}_h \end{bmatrix} \quad (11)$$

行列  $A$  の二行目はシステムへの入力がゼロ次ホールドで与えられることを示しており, また  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  の一行目成分から制御対象が連続時間システムであることを満足していることが読み取れ

るであろう。

いま,問題設定から(2)をサンプリング動作を行う条件として与えると,問題設定を満足する状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムは,パラメータ(11)式およびリセットフィードバック則  $(K, M)$  を持つ二次錐型連続時間線形リセットシステムとして以下のように帰着させることが出来る。

$$\dot{x} = Ax, \text{ if } x \in \mathcal{F} \quad (12a)$$

$$x^+ = Ax + Bu, \text{ if } x \in \mathcal{J} \quad (12b)$$

$$u = Kx \quad (12c)$$

ここで,

$$\mathcal{F} := \{x \mid x^T M x \geq 0\} \quad (13)$$

このとき,システム(12)はリセット則  $((A+BK), M)$  を有す。この拡大系は,リセット則による状態  $x_h$  のジャンプによってゼロ次ホールドによる制御入力を更新する。

#### 4. 指数安定性に関する十分条件

本セクションでは,実現した状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムが漸近安定となるための代数的な条件を示す。

Satoh<sup>5)</sup> は二次錐型連続時間線形リセットシステムが指数安定となる条件を,LMIアプローチで示している。

##### 補題 1(Satoh[2011]<sup>5)</sup>)

二次錐型連続時間線形リセットシステムを考える。ある  $\tau_F, \tau_J \geq 0$  に関して以下を満たすような  $P = P^T > 0$  が存在するならば,二次の Lyapunov-like 関数  $V(x) := x^T P x$  が存在する。またこの時,ある  $\rho^* > 0$  が存在し,時間正則化を施したりセットシステムの  $x$ -ダイナミクスの原点は任意の  $\rho \in (0, \rho^*]$  に関して指数安定である。

$$A^T P + PA + \tau_F M < 0 \quad (14)$$

$$(A + BK)^T P (A + BK) - P - \tau_J M < 0 \quad (15)$$

##### LMI アプローチに基づく設計

いま,二次錐型連続時間線形リセットの枠組みで実現された,状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムに関して,拡大系パラメータ(11)式の構造から,補題 1 における  $\tau_F, \tau_J$  に関して,常に  $\tau_F, \tau_J > 0$  である。

従って,(14),(15)式が,ある  $\tau_F, \tau_J$  に関して可解であると仮定する。このとき,状態空間変換行列  $X := \tau_F P^{-1} > 0$  が存在し,Schur complement<sup>6)</sup>を適用することで以下の等価な不等式が得られる。

$$X > 0 \quad (16)$$

$$X A^T + A X + H < 0 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} -X - \tau_{FJ} H & G^T B^T + X A^T \\ A X + B G & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

ここで,

$$X := \tau_F P^{-1} \quad (19a)$$

$$G := K X \quad (19b)$$

$$H := X M X \quad (19c)$$

(16),(17),(18)式はある固定された  $\tau_{FJ} := \tau_J / \tau_F > 0$  における,  $(X, G, H)$  に関する LMI である。

##### 定理 1

二次錐型連続時間線形リセットシステムの枠組みで実現された状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムについて考える。このとき与えられた拡大系パラメータ  $(A, \mathcal{A}, B)$ , および  $\tau_{FJ} = \tau_J / \tau_F > 0$  に関して, LMI(16),(17),(18)式が可解ならば,時間正則化を施した状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムの  $x$ -ダイナミクスの原点を指数安定化するリセットフィードバック則  $(K, M)$  が存在し,そのうち一つは(20)式で与えられる。

$$K = G X^{-1} \quad (20a)$$

$$M = X^{-1}HX^{-1} \quad (20b)$$

○

## 5. 数値例

次のパラメータをもつ状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムについて考える.

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.8 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_h = 1 \quad (22)$$

$\tau_{FJ} = 1.0$  に関して LMI から得られた計算結果に対し,  $\tau_F = 1.0$  を選択した時の  $(P, K, M)$  は以下のように得られる.

$$P = \begin{bmatrix} 1.9200 & 1.0739 & 0.1689 & 0.5095 \\ * & 2.2403 & 0.7974 & -0.3558 \\ * & * & 1.5830 & -1.1586 \\ * & * & * & 1.8402 \end{bmatrix}, \quad (23a)$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.2880 & 0.1913 & 0.6286 & -0.0019 \end{bmatrix}, \quad (23b)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.3908 & 0.0358 & 0.7931 & -0.8421 \\ * & 0.0348 & -0.3060 & 0.4336 \\ * & * & -0.1922 & 0.7436 \\ * & * & * & -1.4204 \end{bmatrix} \quad (23c)$$

得られた  $P$  に関して,  $\text{eig}(P) = \{3.6099, 2.8148, 0.7584, 0.4004\}$  であるため,  $P > 0$  である.

初期状態  $x(0) = [2.5 \ 3.1 \ 5.9 \ 0]^T$ ,  $\tau(0) = 0$  および  $\rho = 0.01[s]$  に関して時間正則化が施されたシステムの初期値応答を Fig. 5,6 に示す.

Fig. 6 よりサンプル値フィードバックが非周期的に行われていることがわかる.

## 6. 結言

本稿では, 周期的な制御が困難な制御系に対するイベント駆動型制御への, 新たなアプローチの一つの手法として, 自身の状態に基づいてサンプリング動作を行う, 状態依存イベント駆動型サンプル値フィードバックシステムを提案し, 二次錐型連続時間線形リセットシステムの枠組みで実現した. またその漸近安定条件を LMI アプローチに基づいて導出した.

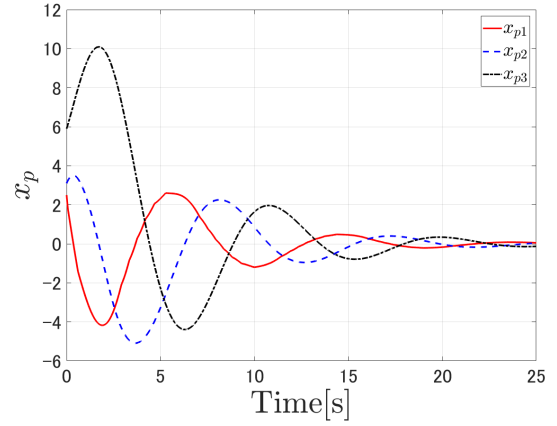


Fig. 5  $x_p$  の初期値応答

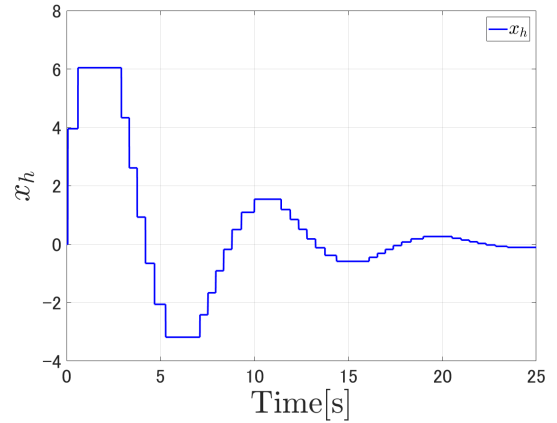


Fig. 6  $x_h$  の初期値応答

## 参考文献

- 1) 萩原朋道, デジタル制御入門, コロナ社, pp. 5-7, 1999.
- 2) W.P.M.H. Heemels, K.H. Johansson, P. Tabuada, An Introduction to Event-triggered and Self-triggered Control, Proc. of IEEE2012, pp. 3270-3285, 2012.
- 3) F. Forni, S. Galeani, D. Nesic, L. Zaccarian, Event-triggered transmission for linear control over communication channels, Automatica, vol. 50, Issue 2, pp. 490-498, 2014.
- 4) D. Nesic, A. R. Teel and L. Zaccarian, On

necessary and sufficient conditions for exponential and  $\mathcal{L}_2$  stability of planer reset systems, Proc. of ACC2008, pp. 2019-2026, 2008.

- 5) A. Satoh, State Feedback Synthesis of Linear Reset Control with L2 Performance Bound via LMI Approach, Proc. of IFAC2011, pp. 5860-5865, 2011.
- 6) 岩崎徹也, LMI と制御, 昭晃堂, pp. 193, 1997.