計測自動制御学会東北支部 第 315 回研究集会 (2018.5.21)
資料番号 315-10

翼素理論に基づくプロペラの推力ートルク連成運動のモデル化

Blade element theory based modelling of the dynamics of propeller motion by thrust-torque coupling

○小野　浩平，佐藤　淳

○ Kohei Ono，Atsushi Satoh

岩手大学

Iwate University

キーワード： 翼素理論 (Blade element theory)，推力 (Thrust)，トルク (Torque)，連成 (coupling)

連絡先： 〒 020-8551　岩手県盛岡市上田 4-3-5
岩手大学大学院 総合科学研究科 理工学専攻 機械・航空宇宙コース
佐藤　淳，Tel: 019-621-6404，E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

1. 諸言

航空の分野において空力連成運動や空力連成振動のような研究は盛んにおこなわれている．特に空力ー構造連成振動については，機体の破損や翼面の剥離といった問題を引き起こすため，特に研究が盛んに行われている [1)]．また，回転翼についても同様に空力ー構造連成振動に関する研究がおこなわれている [2)3)4)]．

マルチコプタの実際の飛行において，機体の並進運動がプロペラの空力に影響を与えるため，プロペラの運動モデルに，機体の並進運動を組み込むことがなされている [4)]．しかし，この運動モデルにおいて，機体の並進運動によるプロペラブレードの迎え角の変動は考慮されていない．プロペラにより発生する推力とプロペラの抵抗トルクは，どちらも迎え角の影響を受ける．そのため，並進運動による空力の変動は，推力と抵抗トルクの連成した変化につながる可能性がある．この推力ー抵抗トルクの連成した変化によってプロペラの回転数も変化することが考えられ，これはプロペラの回転面方向の空力連成振動であると考えることができる．マルチコプタは一般に，機体重量が軽量であることや，固定ピッチのプロペラが採用されているといった点から，マルチコプタは，プロペラによる空力の変動が機体の運動に影響しやすい特徴を有しているといえる．そのため，このプロペラの推力ー抵抗トルクの連成した運動の影響は機体の運動に影響を与える可能性が考えられる．しかし，このようなプロペラの運動を考慮した運動モデルは未だに考えられていない．マルチコプタの運動性向上のためにも，このような現象を理解して運動モデルを構築する必要があると考える．

そこで本研究では，翼素理論に基づいてプロペラの推力ートルク連成運動のモデル化をおこなう．次に得られたモデルのシミュレーションを作成し，得られたモデルに対する考察をおこなう．

2. 準備

2.1 プロペラのモデリング

回転翼の空気力をモデル化をする主要な理論として運動量理論と翼素理論がある．運動量理論とは，回転しているプロペラを１つの作動円盤に見立てて，飛行中に流入した気流がプロペラにより加速される気流の運動量とエネルギの変化から，プロペラの推力と馬力をモデル化する方法である[5]．一方で，翼素理論とはプロペラのブレードにおいて翼根から半径 r のところに厚さ dr を持つ部分，すなわち，翼素を考え，ここに作用する力からプロペラ全体の力へと発展させる方法である[5]．運動量理論では，各ブレードの挙動に関しては考慮しないため，得られる結果は時間・空間的に平均化されたものになる特徴がある．また，翼素理論ではブレードに作用する力の関係を具体的に知ることができる．

推進器の運動の変化はプロペラに流入する気流に影響を与える．翼の根本からの距離によって回転面における接線方向の速度が異なるため，気流の変化による影響は各翼素によって異なる．そのため連成運動による影響も各翼素ごとに異なることが考えられる．したがって本研究ではこの影響の変動も考慮するため，翼素理論を用いてモデルの構築をおこなう．

翼素理論を用いてモデルを導出するにあたって以下の仮定を設ける[6]．

1) 翼素に働く空気力は、空気中を迎え角 α、一様な対気速度 V_r で前進している同じ二次元翼型断面に働く力と全く同じである。

2) プロペラにはたらく空気力は各翼素にはたらく空気力の総和である。

3. 問題設定

3.1 今回検討する運動

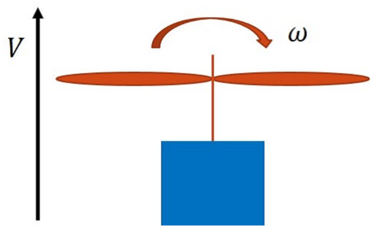

Fig. 1 全体の運動

本研究では図 1 のように，モータに直接取り付けられたプロペラを考える．このとき鉛直方向のみの運動を考え，それ以外の並進，軸周りの回転については考慮をしない．また，プロペラの回転に伴ってモータは逆向きの回転をするが，本研究ではこの回転も発生しないこととする．

3.2 プロペラ形状

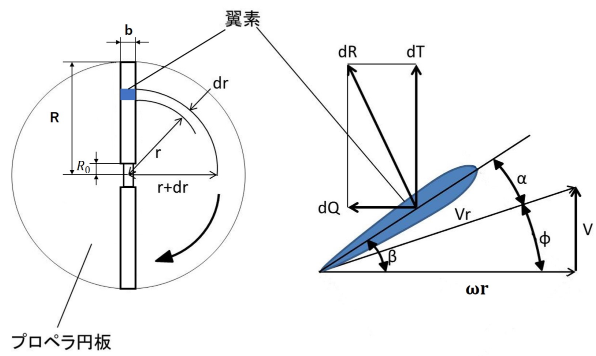

Fig. 2 プロペラの外形と翼素にはたらく推力とトルク

本研究では，図 2 のようなブレード数が B 枚で，各翼素の翼弦長 b は変わらないプロペラを考える．時刻 t における推進系の前進速度を $V(t)$, ブレードの角速度を $\omega(t)$ とするとき，空気の流入速度の大きさ $V_r(t)$ と気流の流入角 $\phi(t)$ は図 2 より

$$V_r(t,r) = \sqrt{V(t)^2 + (\omega(t)r)^2} \tag{1}$$

$$\tan\phi(t,r) = \frac{V(t)}{\omega(t)r}$$

これより

$$\phi(t,r) = \tan^{-1}\left(\frac{V(t)}{\omega(t)r}\right) \tag{2}$$

で表わされる．また，気流の流入角 ϕ と迎え角 α, ピッチ角 β の関係は

$$\begin{aligned} \beta(r) &= \alpha(t,r) + \phi(t,r) \\ \Leftrightarrow \alpha(t,r) &= \beta(r) - \phi(t,r) \end{aligned} \tag{3}$$

で表わされる．任意の翼素 r でのピッチ角 $\beta(r)$ の分布は，翼端のピッチ角を β_t として，

$$\beta(r) = \beta_t \cdot \frac{R}{r} \tag{4}$$

で表わされるとする．

迎え角 $\alpha(t,r)$ が失速角未満であるとき，揚力係数 C_L は迎え角 $\alpha(t,r)$ に関する一次関数，抗力係数 C_D は揚力係数 C_L の二次関数で与えられるとする [7]．すなわち,C_L は，揚力傾斜を $C_{L\alpha}$, 無揚力角を α_0 とすると

$$C_L(\alpha(t,r)) = C_{L\alpha}\left(\alpha(t,r) - \alpha_0\right) \tag{5}$$

抗力係数は，抗力係数の最小値であるような値 C_{Dmin}, 正定数 κ を用いて

$$C_D(\alpha(t,r)) = C_{Dmin} + \kappa C_L(\alpha(t,r))^2$$

(5) 式より

$$\begin{aligned} C_D(\alpha(t,r)) &= C_{Dmin} \\ &\quad + \kappa\left\{C_{L\alpha}\left(\alpha(t,r) - \alpha_0\right)\right\}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

で表わされるとする．

3.3　運転状態

本研究ではマルチコプタのプロペラを想定しており，プロペラの運転状態の範囲を $\omega(t)r >> V(t)$，運動状態の基準をホバリング状態とする．

このときの回転角速度を ω_h とし，そこからの角速度の変動分を $\tilde{\omega}(t)$ とする．すなわち，

$$\omega(t) = \omega_h + \tilde{\omega}(t) \tag{7}$$

である．このとき，ホバリング時の推力とトルクを T_h, Q_h, ホバリング状態から変動した角速度による推力とトルクを $\tilde{T}(t), \tilde{Q}(t)$ とすると，プロペラに作用する推力 T とトルク Q は

$$T(t) = T_h + \tilde{T}(t) \tag{8}$$

$$Q(t) = Q_h + \tilde{Q}(t) \tag{9}$$

のように分解する．このとき，ホバリング時の推力 T_h はプロペラ一枚あたりの機体重量とつりあい，トルク Q_h はホバリング時のモータの出力トルク q_{mh} とつりあう．

また，$\omega(t)r >> V(t)$ より，流入速度 $V_r(t)$ は

$$\begin{aligned} V_r(t)^2 &= V(t)^2 + (\omega(t)r)^2 \\ &\simeq \omega(t)^2 r^2 \end{aligned} \tag{10}$$

で近似することができる．

3.4　DC モータ

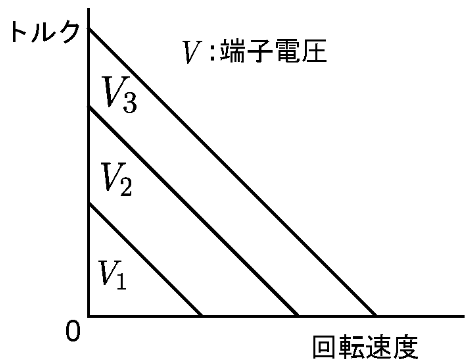

Fig. 3　DC モータにおけるトルクと回転速度の関係

図 3 は DC モータにおいて発生する出力トルク q_m と DC モータの回転速度 ω の関係である [8]．DC モータは端子電圧を固定すると出力トルク q_m は，正定数 q_c，$\omega = 0$ における出力トルク q_n を用いて

$$q_m(t) = -q_c\omega(t) + q_n \tag{11}$$

と表される．

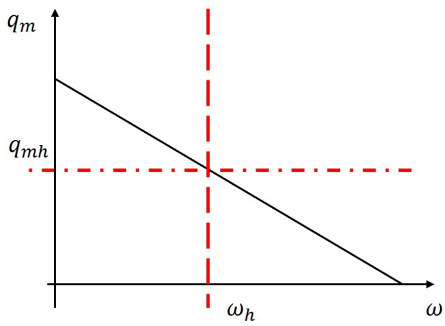

Fig. 4　ホバリング状態を基準としたDCモータにおけるトルクと回転速度の関係

図4のようにホバリング状態を回転角速度の基準をすると，モータの出力トルク $q_m(t)$ も，ホバリング時のモータの出力トルクを q_{mh}，ホバリングから回転速度が変動した分の出力トルク $\tilde{q}_(t)$ を用いて

$$q_m = q_{mh} + \tilde{q}_m(t) \tag{12}$$

と表される．さらに，このとき (11) 式は，ホバリングから変動した角速度 $\tilde{\omega}(t)$ を用いて

$$\tilde{q}_(\tilde{\omega}(t)) = -q_c\tilde{\omega}(t) \tag{13}$$

と表される．

4.　プロペラの運動モデルの導出

4.1　運動方程式の導出

プロペラから発生する推力 T による上昇運動を考える．運動状態の基準がホバリングであるとき，プロペラ軸方向の運動方程式は，プロペラ一枚あたりの荷重を m, 重力加速度を g とすると

$$m\dot{V}(t) = T_h + \tilde{T}(t) - mg$$
$$\dot{V}(t) = \frac{\tilde{T}(t)}{m} \tag{14}$$

である．また，ブレードの回転の運動方程式は，プロペラ全体の慣性モーメントを J, モータのトルクを q_m とすると

$$J\dot{\omega}(t) = q_m - \left(Q_h + \tilde{Q}(t)\right)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{J}\left(q_c\tilde{\omega}(t) + \tilde{Q}(t)\right) \tag{15}$$

である．

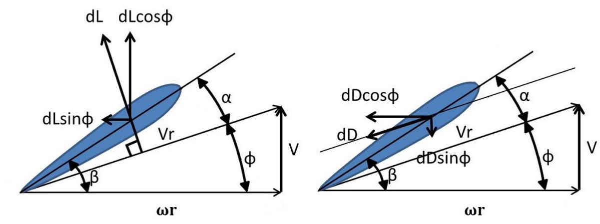

Fig. 5　プロペラの翼素にはたらく揚力と抗力

図5は各翼素にはたらく揚力と抗力の関係を示している．図5より翼素に働く推力とトルク dT, dQ は

$$dT = dL\cos\phi - dD\sin\phi \tag{16}$$
$$dQ = (dD\cos\phi + dL\sin\phi)\, r \tag{17}$$

微小の推力 dT, トルク dQ は翼素に二次元翼理論を適用できると仮定すると，

$$dL = \frac{1}{2}C_L\rho V_r^2 bdr \tag{18}$$
$$dD = \frac{1}{2}C_D\rho V_r^2 bdr \tag{19}$$

B をブレードの枚数とし，(18),(19) 式を (16),(17) 式に代入して整理すると

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2}B\rho bV_r^2\left(C_L\cos\phi - C_D\sin\phi\right) \tag{20}$$
$$\frac{dQ}{dr} = \frac{1}{2}B\rho bV_r^2\left(C_L\sin\phi + C_D\cos\phi\right) r \tag{21}$$
$$\tag{22}$$

となるため，プロペラ全体に作用する推力とトルク翼根 R_0 から翼端 R までの積分によって求められる．したがって，

$$T = \rho b\int_{R_0}^{R} V_r^2\left(C_L\cos\phi - C_D\sin\phi\right) dr \tag{23}$$
$$Q = \rho b\int_{R_0}^{R} V_r^2\left(C_L\sin\phi + C_D\cos\phi\right) rdr \tag{24}$$

ここで (23)，(24) 式において問題設定を考慮すると

$$\tilde{T}(t) = \rho b\int_{R_0}^{R} \tilde{\omega}(t)^2 r^2$$

$$\times \left[C_{L\alpha}\left(\alpha(a(t),r)-\alpha_0\right)\cos\phi(a(t),r)\right.$$
$$-\left\{C_{Dmin}+\kappa C_{L\alpha}^2\left(\alpha(a(t),r)-\alpha_0\right)^2\right\}$$
$$\left.\times\sin\phi(a(t),r)\right]dr \tag{25}$$

$$\tilde{Q}(t)=\rho b\int_{R_0}^{R}\tilde{\omega}(t)^2r^2$$
$$\times \left[C_{L\alpha}\left(\alpha(a(t),r)-\alpha_0\right)\sin\phi(a(t),r)\right.$$
$$+\left\{C_{Dmin}+\kappa C_{L\alpha}^2\left(\alpha(a(t),r)-\alpha_0\right)^2\right\}$$
$$\left.\times\cos\phi(a(t),r)\right]dr \tag{26}$$

となる．$\omega r >> V$ より

$$\tan^{-1}\left(\frac{V(t)}{\omega(t)r}\right)\simeq\frac{V(t)}{\omega(t)r}$$
$$\sin\left(\frac{V(t)}{\omega(t)r}\right)\simeq\frac{V(t)}{\omega(t)r},\quad \cos\left(\frac{V(t)}{\omega(t)r}\right)\simeq 1$$

となる．したがって，$\tilde{T}(t)$，$\tilde{Q}(t)$ を用い，$\tilde{\omega}(t)^2$ の係数を $k_{\cdot1}$，$\tilde{\omega}(t)$ の係数を $k_{\cdot2}$，$V(t)\tilde{\omega}(t)$ の係数を $k_{\cdot3}$，$V(t)$ の係数を $k_{\cdot4}$，$V(t)^2$ の係数を $k_{\cdot5}$，$V^3 / (\omega_h+\tilde{\omega})$ の係数を k_6 とすると，(14),(15) 式よりプロペラの運動方程式は

$$\dot{V}(t)=\frac{\tilde{T}(t)}{m}$$
$$=\frac{1}{m}\left(k_{T1}\tilde{\omega}(t)^2+k_{T2}\tilde{\omega}(t)+k_{T3}V(t)\tilde{\omega}(t)\right.$$
$$\left.+k_{T4}V(t)+k_{T5}V(t)^2+k_6\frac{V(t)^3}{\omega_h+\tilde{\omega}(t)}\right) \tag{27}$$

$$\dot{\omega}(t)=-\frac{1}{J}\left(k_{Q1}\tilde{\omega}(t)^2+k_{Q2}\tilde{\omega}(t)+k_{Q3}V(t)\tilde{\omega}(t)\right.$$
$$\left.+k_{Q4}V(t)+k_{Q5}V(t)^2+q_c\tilde{\omega}(t)\right) \tag{28}$$

となる．

5.　初期値応答

得られた運動モデルにおいて，連成運動が発生しているか確認するためにシミュレーションをおこなう．具体的には，$V(t)$ と $\tilde{\omega}(t)$ という二つの状態量のうち，一つを運動の基準点であるホバリング状態におく．この状態量が初期値を与えた状態量の影響を受けて変化すれば連成運動が発生していると言える．

今回は状態量の初期値として $V_0=0.1$，$\tilde{\omega}=0$ でシミュレーション時間は 10 秒とする．また，各パラメータは表 1 にまとめる．このときの初期値応答を図 6，7 に示す．

Table 1　パラメータの値

ρ	1.205
b	0.03515
m	0.6686
R	0.19
R_0	0.03
α_0	−0.035
β_t	0.087
$C_{L\alpha}$	0.1
C_{Dmin}	0.006
J	1.79×10^{-4}
ω_h	335.5
B	2
q_c	18.2297

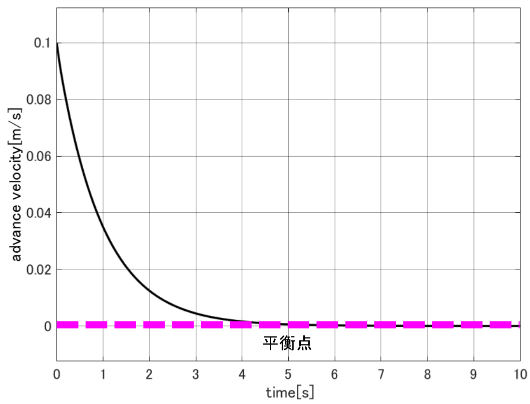

Fig. 6　V の初期値応答 $(0\leqq t\leqq 10)$

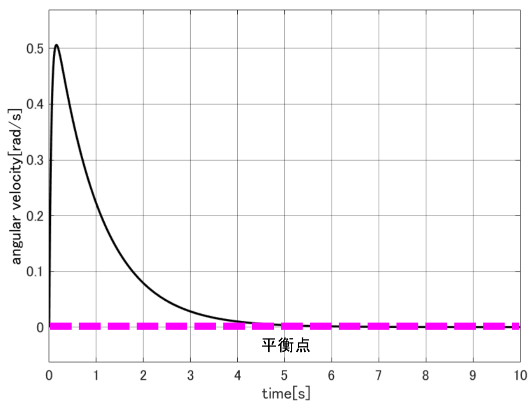

Fig. 7　V の初期値応答 $(0\leqq t\leqq 10)$

図 6，7 より，初期値 V_0 によって $\tilde{\omega}(t)$ の状態が変化をしているため，シミュレーションにより連成運動が発生していることを確認した．

6. 結言

本研究では翼素理論を用いてプロペラ推力―トルク連成運動のモデル化をおこない，このモデルの初期値応答をシミュレーションにより確認をした．

今後は得られたモデルの応答を実機で確認をおこなう予定である．また，非定常空気力学からプロペラのモデリングを行う予定である．

参考文献

1) Donald S. Woolston. An Investigation of Effects of Certain Types of Structural NonHnearities on Wing and Control Surface Flutter, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 24, No. 1 , pp. 57 – 63(1957)

2) A.A.Regier, Effect of the Lift Coefficient on Propeller Flutter, National Advisory Committee for Aeronautics,Washington,(1945)

3) Ahmed A. Hussein, Robert A. Canfield, Unsteady Aerodynamics Stabilization of the Dynamics of Hingeless Rotor Blades in Hover, AIAA Journal, Vol.56,No.3,pp.1298 – 1303(2018)

4) Pierre-Jean Bristeau, Philippe Martin,Erwan Salaün,Nicolas Petit,The Role of Propeller Aerodynamics in the Model of a Quadrotor UAV,IEEE International Conference of Control,European,August (2009)

5) 社団法人 日本航空技術協会, 航空力学 I, 社団法人 航空技術協会,pp.91(1997)

6) 社団法人 日本航空技術協会, 航空工学講座 6 プロペラ, 社団法人 航空技術協会,pp.20(2014)

7) 加藤寛一郎，大屋昭男，柄沢研治，航空機力学入門，東京大学出版会，pp.33 – 34(2004)

8) 見城尚志，使いこなす DC モータ技術，日刊工業新聞社 pp.7(2008)