計測自動制御学会東北支部 第 317 回研究集会 (2018.7.19)
資料番号 317-14

# 制御設計問題に対する Douglas-Rachford の分割法の応用

# Applications of the Douglas-Rachford splitting method for control design problems

○小野寺優希也 *，松下慎也 *，徐粒 *

○ Yukiya Onodera*, Shin-ya Matsushita*, Li Xu*

*秋田県立大学

*Akita Prefectural Univesity

キーワード： 静的出力フィードバック (static output feedback), 射影 (projection)，Douglas-Rachford の分割法 (Douglas - Rachford Splitting method)

連絡先： 〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4 秋田県立大学大学院システム科学技術研究科 電子情報システム学専攻 制御工学研究室 小野寺優希也, Tel.: (0184)27-2511,
E-mail: m20b007@akita-pu.ac.jp

## 1. 背景

本研究では以下のような静的出力フィードバック安定化問題を考える．

線形時不変システムを

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

とする．ここで，$x \in \mathbb{R}^n$(入力ベクトル)$, u \in \mathbb{R}^m$(出力ベクトル)$, y \in \mathbb{R}^p$(状態変数ベクトル) である．このとき，静的出力フィードバック安定化問題 (問題 1) とは，静的出力フィードバック制御則

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p} \tag{2}$$

を見つける問題である．ここで，$K$ は閉ループシステム行列 $A + BKC$ の固有値の実部が負となるような定数行列である．

静的出力フィードバックの安定化問題は，古くから研究されており，様々な解法が提案されている [7, 8]．例えば，問題 1 の $A, K$ に対して対称行列という条件を加えた場合，問題 1 は凸最小化問題に定式化することができ，内点法などの最適化法を用いて高速に解を求めることができる．しかし，静的出力フィードバック安定化問題はいつも可解であるとは限らない．例えば，対称行列の条件を外した一般的な問題では問題 1 を凸最小化問題に定式化することができないため，内点法を適用することができない．先行研究では，$A, K$ が非対称行列の場合の静的出力フィードバック安定化問題を制約可能性問題に定式化し，射影法を適用することで問題 1 の解を求めている [9]. 本研究では，制約可能性問題に定式化された問題 1 に対して Douglas-Rachford の分割法を適用し，その有用性を検証する．

本論文を通して使用する記号を以下に列挙する．

- $I$：単位行列
- $\mathbb{C}^{m\times n}$：サイズが $m\times n$ の複素行列からなる集合
- $\mathrm{tr}(A)$：行列 $A$ のトレース
- $\rho(Z)$：行列 $Z$ の固有値の実部の最大値
- $\mathrm{vec}\,(A)$：$A$ の列展開
- $Y\otimes Z$：$Y$ と $Z$ の Kronecker 積
- $A^T$：行列 $A$ の共役転置

## 2. 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

複数の集合の共通部分を見つける問題を制約可能性問題という．ここでは，2 つの集合 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ に対する制約可能性問題，つまり，

$$\text{Find}\quad u\in\mathcal{C}\cap\mathcal{D}. \tag{3}$$

を考える．問題 (3) は，工学の分野で現れる様々な問題を表現できることが知られている [2, 3]．ここでは，制約可能性問題の解法として Douglas-Rachford の分割法について紹介する．

$x_0\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\mathcal{C},\mathcal{D}$ を $\mathbb{C}^{n\times n}$ の閉凸集合‡‡としたとき，Douglas-Rachford の分割法は，以下の式で与えられる．

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(Id+R_{\mathcal{D}}R_{\mathcal{C}})(x_n)\ \ (n=0,1,2,\dots) \tag{4}$$

ただし，$Id$ は恒等写像である．また，$P_{\mathcal{C}}$，$P_{\mathcal{D}}$ はそれぞれ，集合 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ への射影† であり，$R_{\mathcal{C}},R_{\mathcal{D}}$ はそれぞれ $R_{\mathcal{C}}=2P_{\mathcal{C}}-Id$，$R_{\mathcal{D}}=2P_{\mathcal{D}}-Id$ である．

このとき，$\{P_{\mathcal{C}}(x_n)\}$ が $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ のある点 $u$ に収束することが知られている [1, 6]．本研究では，静的出力フィードバック問題 (問題 1) を問題 (3) として定式化し，Douglas-Rachford の分割法を適用する．

## 3. 一般的な非対称問題

$\mathbb{C}^{n\times n}$ の内積を

$$\langle Y,Z\rangle=\mathrm{tr}(YZ^T)=\sum_{i,j}y_{ij}\bar{z}_{ij} \tag{5}$$

とし，ノルムは $\|Z\|=\langle Z,Z\rangle^{\frac{1}{2}}$ とする．$\|\cdot\|$ を Frobenius ノルムという．

問題 1 を制約可能性問題 (3) に定式化する．$\mathcal{L}$ を以下の集合とする．

$$\mathcal{L}=\left\{Z\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid {}^{\exists}K\in\mathbb{R}^{m\times p}\ \text{ such that } Z=A+BKC\right\} \tag{6}$$

また，集合 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M}=\left\{\,Z\in\mathbb{C}^{n\times n}\;\middle|\;\rho(Z)\le 0\,\right\} \tag{7}$$

とする．このとき，問題 1 の解を見つけることは，

$$\text{Find } X\in\mathcal{L}\cap\mathcal{M} \tag{8}$$

と等価になることが知られている [9]．次に，制約可能性問題 (8) に対する Douglas-Rachford の分割法について考える．Douglas-Rachford の分割法を静的出力フィードバック安定化問題に適用するためには，集合 $\mathcal{L},\mathcal{M}$ に対する射影を求める必要がある．まず，集合 $\mathcal{M}$ に対する射影を考える．

**定義 1.** $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ とする．Schur 分解によって，$X=VTV^T$ と表すことができる．ここで，$V$ はユニタリ行列，$T$ は上三角行列である．Schur 分解で得られた $V,T$ に対して，集合 $\mathcal{M}$ への射影 $P_{\mathcal{M}}(V,T)$ を

$$P_{\mathcal{M}}(V,T)=V\bar{T}V^T \tag{9}$$

‡‡ $A\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ が凸集合とは，$A$ の任意の要素 $x,y$ と任意の正の実数 $\alpha\in(0,1)$ に対して

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in A$$

が成り立つことである．

† $P_{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ への射影を表す．$P_{\mathcal{C}}(x)$ が $x$ から $\mathcal{C}$ への射影とは，

$$\|x-P_{\mathcal{C}}(x)\|\le\|x-c\|\ \ ({}^{\forall}c\in\mathcal{C})$$

が成り立つときをいう．

で定義する．ここで，$\bar{T}$ は

$$\bar{T}_{kl} = \begin{cases} \min\{0, \mathrm{Re}(T_{kk})\} + i\mathrm{Im}(T_{kk}) & (k = l) \\ T_{kl} & (k \neq l) \end{cases}. \tag{10}$$

である**．

次に，集合 $\mathcal{L}$ に対する射影を考える．$\mathcal{L}$ への射影は，次の標準最小二乗問題を解くことによって求めることができる．

**定義 2** (K. Yang, R. Orsi and J. B. Moore [9])**.** $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の $\mathcal{L}$ への射影は，$P_{\mathcal{L}}(X) = A+BKC$ で与えられる．ここで $K$ は最小二乗問題

$$\underset{K\in\mathbb{R}^{m\times p}}{\arg\min} \|(C^T \otimes B)\mathrm{vec}\,(K) - \mathrm{vec}\,(\mathrm{Re}(x) - A)\|_2 \tag{11}$$

の解である．また，$\|\cdot\|_2$ は Euclidean ノルムである．

以上の結果より，集合 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ に対する射影が計算できることがわかった．最後に，問題 1 に対する Douglas-Rachford の分割法のアルゴリズムを紹介する．

**Algorithm**

Initialization : $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を無作為に選ぶ．

**repeat**

1) $P_{\mathcal{L}}(Y)$ を計算
2) $R_{\mathcal{L}}(Y) := 2P_{\mathcal{L}}(Y) - Y$
3) $R_{\mathcal{L}}(Y)$ の Schur 分解を計算する．
   $Y = VTV^T$
4) $P_{\mathcal{M}}(R_{\mathcal{L}}(Y))$ を計算
5) $R_{\mathcal{M}}(R_{\mathcal{L}}(Y)) := 2P_{\mathcal{M}}(R_{\mathcal{L}}(Y)) - R_{\mathcal{L}}(Y)$
6) $Y = \frac{1}{2}(Id + R_{\mathcal{M}}(R_{\mathcal{L}}))(Y)$

**until** $\rho(Y) \leq 0$

** $P_{\mathcal{M}}(V, T)$ は厳密には $Z$ の $\mathcal{M}$ への射影とはなっていないが，集合 $\mathcal{M}$ に条件を加えると射影になる．詳細は文献 [9] の Theorem 9 を参照にすること．

## 4.　数値実験

この節では，ランダムに $A, B, C$ を生成した問題 (実験 1) と文献 [5] に示されている問題 (実験 2) に対して，先行研究で提案されているアルゴリズム (射影法) と Douglas-Rachford の分割法 (DR 法) を適用した結果を比較する．実際に数値実験に用いた計算環境を Table1 に示す．

Table 1　計算環境

| | |
|---|---|
| OS | macOS High Sierra |
| メモリ | 8GB 1600 MHz DDR3 |
| CPU | 1.8GHz Intel Core i5 |
| 使用ソフト | MATLAB R2017a |

### 4.1　ランダムに $A, B, C$ を生成した問題 (実験 1)

ここでは，ランダムに $A, B, C$ を生成した問題を扱う．問題が解を持つことを保証するために，システムの次元を木村の一般安定化条件 [4] を満たすように定め，それぞれ $n = 6, m = 4, p = 3$ となるようにした．また，$A, B, C$ のそれぞれの成分は，平均 0 で分散が 1 の標準正規分布に従っている．また，繰り返しの上限を 1000 回とし，アルゴリズムで必要となる初期値 $Y$ の各成分は平均 0 で分散が 1 の標準正規分布に従っている．

数値実験を 1000 回行なった際の，解が求めれた割合 (成功確率)，平均の繰り返し回数と解を求められる平均の時間を Table2 に示す．ただし，今回適用した射影法には，計算効率を挙げるための前処理を行ない，前処理の計算時間は計測した平均時間に含めている．また，Douglas-Rachford の分割法は計算効率を挙げるための前処理を行なっていない．Table2 より，射影法の方が繰り返し回数は 20 回程少なくなっている．しかし，Douglas-Rachford の分割法は計算効率を挙げるための前処理を行なっていないた

め，Douglas-Rachford の分割法の方が計算効率の良いアルゴリズムであることがわかる．また，Douglas-Rachford の分割法の方が射影法よりも，解を求められる確率が 2 倍以上高いことがわかる．

Table 2　ランダムに $A, B, C$ を生成した問題の実験結果

| | 成功確率 | 繰り返し回数 | 時間 [s] |
|---|---|---|---|
| DR 法 | 100 | 156.04 | 0.012169 |
| 射影法§ | 44.8 | 121.60 | 0.016759 |

## 4.2　文献 5) に示されている問題 (実験 2)

ここでは，文献 5) で紹介されている問題を取り扱う．この問題で扱われているシステムは，ヘリコプターの公称線形モデルであり，$A, B, C$ はそれぞれ，

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -0.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

である．この問題では，閉ループの固有値が集合 $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq -0.1 \}$ の要素となっていることが望ましい．そのため，$A$ を $A + 0.1I$ に置き換えた上でアルゴリズムを適用する．数値実験では，繰り返しの上限を 1000 回とし，アルゴリズムで必要となる初期値 $Y$ の各成分は平均 0 で分散が 1 の標準正規分布に従っている．

数値実験をアルゴリズムの初期点を変更して 1000 回行なった際の，解が求めれた確率 (成功確率)，平均の繰り返し回数と解を求められる平均の時間を Table3 に示す．ただし，今回適用した射影法には，計算効率を挙げるための前処理を行ない，前処理の計算時間は計測した平均時間に含めている．また，Douglas-Rachford の分割法は計算効率を挙げるための前処理を行なっていない．Table3 より，Douglas-Rachford の分割法の方が，射影法よりも成功確率が 1.4 倍高く，繰り返し回数も 35 倍程度少なくなっていることがわかる．

数値実験で得られた解の一つを検証する．Douglas-Rachford の分割法を適用して得られた $K$ は

$$K = \begin{bmatrix} 1.0056 & 3.9172 \end{bmatrix}^T$$

となる．また，$A + BKC$ の固有値を計算すると $\{-27, -0.1815, -0.95 \pm i0.5333\}$ となり，システムが安定となっていることがわかる．

Table 3　文献 5) に示されている問題の実験結果

| | 成功確率 | 繰り返し回数 | 時間 [s] |
|---|---|---|---|
| DR 法 | 100 | 13.184 | 0.000963 |
| 射影法†† | 70.3 | 467.33 | 0.020097 |

# 5.　結論

本研究では，制約可能性問題に定式化された静的出力フィードバック安定化問題に対して Douglas-Rachford の分割法を適用し，その有用性を検証することができた．その結果として，先行研究で提案されていたアルゴリズムよりも高い割合で解を求めることができた．

今後の課題としては，制約集合が非凸集合になる場合の制約可能性問題に Douglas-Rachford の分割法を適用した場合の大域的な収束を理論的に保証することである．

§ ここでの射影法は計算効率をあげるための前処理を行なっている

†† ここでの射影法は計算効率をあげるための前処理を行なっている．

# 参考文献


1) H. H. Bauschke and P. L. Combettes: Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, 366/370, Springer(2011)
2) K. M. Grigoriadis, A. E. Frazho and R. E. Skelton: Application of alternating convex projection methods for computation of positive toeplitz matrices, IEEE Transaction on signal processing, **42**-7, 1873/1875 (1994)
3) H. Hu, and I. Olkin: Numerical procedure for finding the positive definite matrix closest to a patterned matrix, Statist. Probab. Lett. **12**-6, 511/515 (1991)
4) Kimura H.: Pole assignment by gain output feedback, IEEE Trans. Automat. Control, **20**, 509/516 (1975)
5) Keel L. H., S. P. Bhattacharyya and J. W. Howze: Robust control with atructured perturbation, IEEE Trans. Automat. Control, **33**(1), 68/78 (1988)
6) P. L. Lions and B. Mercier: Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators, SIAM J. Numer. Anal., **16**, 964/979 (1979)
7) R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis: A unified algebraic approach to linear control design, 189/204, CRC Press (1998)
8) V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis: Static output feeback — a survey, Automatica **33**-2, 125/137 (1997)
9) K. Yang, R. Orsi and J. B. Moore: A projective algorithm for static output feedback stabilization, In Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control, 263/268 (2004)