Vol.2013
2014/2/13

トーラス上の早起き鳥問題について

黒岩大地† 大川知††

早起き鳥問題（EBP）とは，セルラーオートマトン上で定義される，資源割当のために最も早く要求を出したノードを決定する問題である．１次元セルラーオートマトン上においてEBPは，境界の有無に関わらず既に解決されている．２次元セルラーオートマトン上のEBPもセル空間の境界での反射を利用したものが，T. Legendi and E. Katonaによって既に解決されている．この論文では，トーラスセルラーオートマトン上のアルゴリズムについて議論する．このアルゴリズムは，ループセルラーオートマトン上の EBP のためのアルゴリズムと一斉射撃アルゴリズムを組み合わせることによりできている．このアルゴリズムは，鳥状態が同時に２羽以上出現することはないという条件のもとで，トーラス空間上のEBPを解くことが可能である．

The Early Bird Problem on the Tori

Daichi Kuroiwa† and Satoshi Okawa††

The early bird problem (EBP) is one of resource allocation problems to determine the earliest request node on cellular automata. EBP on one-dimensional cellular automata has been already solved for the case with boundaries and for the case without boundary (that is, a ring). EBP on two-dimensional cellular automata has been solved by T. Legendi and E. Katona using the reflection of signals at the boundary of a cellular space. In this research, we construct an algorithm to solve EBP on two-dimensional cellular automata without boundary (that is, two-dimensional torus cellular automata). This algorithm employs the algorithm for EBP on ring cellular automata and the algorithm for firing squad synchronization problem. We implemented the algorithm as a program and checked that it works correctly.

†会津大学
University of Aizu
††会津大学
University of Aizu

1. はじめに

ネットワーク上の問題の一つとして資源割り当ての問題がある．一つの割り当ての方法としては，最も早く資源の要求を出したノードに資源の割り当てを行うというやり方がある．クライアントサーバモデルであれば，サーバがクライアントからの要求の監視を行うことで最も早く要求を出したノードを判定することが可能であるが，Peer to Peerのような環境ではすべてのノードが対等に接続されているので，一つのノードがほかのノードすべてを監視することは困難である．このような分散環境上で最も早く要求を出したノードを決定する問題をセルラーオートマトン（CA）上で定義したものが早起き鳥問題（EBP）である．

EBPはRosenstiehl, Fiksel and Holligerによって１次元リングCA上の問題として1973年に提唱され，それに対するアルゴリズムの提案も彼らによってされている[1]. Legendi and Katonaはこの問題に対し，CAの境界の有無に関わらず５状態で動作するアルゴリズムを開発した[2]．さらに，Legendi and Katonaは境界のあるn次元CA上でのEBPの解決も行った[3].

このn次元CAのためのアルゴリズムは，境界での信号の反射を利用しており，境界のないCA上では動作することができない. この問題を解消することを目的として，Takano[4] and Maki[5]により，２次元非有限CA上のEBPのアルゴリズムの検討が行われてきた．

この論文では，トーラスのような境界のないCA上でこの問題について考える．そして，Rosenstiehl, Fiksel and Holliger の１次元リングCA上のアルゴリズムと一斉射撃のアルゴリズムを組み合わせることによって，２次元トーラスCA上のEBPの解決を行う．

2. 定義

2.1 セルラーオートマトン

セルラーオートマトンとは,セルと呼ばれる有限オートマトンが規則的に配列され，すべてのセルを自分自身の状態と隣接したセルの状態から次の状態に同時に変化させるシステムである．この動作は，すべてのセルに共通の関数（局所関数）によって規定されている．

これから先の議論で用いる，２次元セルラーオートマトン（2DCA）は，四つ組<M, S, N, δ>によって定義される．ここで，
M = m×n （m, n は自然数）：セルの存在する座標空間（セル空間）

S: 状態の有限集合
N : 近傍の集合
δ : S × $S^{|N|-1}$ → S, 局所関数
である. 各セルは, 最左最上のセルを起点として i 行 j 列目のセルと呼び, $C_{i,j}$ と表す. この座標空間は，縦 m 個，横 n 個のセルによって構成される.

自分自身と隣接したセルのことをそのセルの近傍と言い，本論文の 2DCA では，近傍は自分自身と上下左右に隣接したセルからなるフォンノイマン近傍であるとする. 局所関数 δ は，現在の自分自身の状態と隣接するセルの状態によって，次の時刻の状態を定めるものである．これは，有限オートマトンの状態遷移関数に対応する．自分以外の近傍のセルの状態の組は，有限オートマトンの入力に対応している.

セルラーオートマトンの１ステップの動作は，各セルが局所関数に従って，一斉に状態を推移させることによって行われる.

２次元トーラスセルラーオートマトン（2DTCA）は，トーラスが m×n の長方形の上下及び左右の辺を張り合わせて構成されることに対応して，M = m×n の 2DCA において, $C_{m+1,j} = C_{1,j}$, $C_{i,n+1} = C_{i,1}$ としたものとして定義する. 本論文では, この 2DTCA 上の EBP を考える.

また, 1 次元 CA 及び, 1 次元ループ CA は, それぞれ m = 1 の場合の 2 DCA，2 DTCA であるとする.

2.2 早起き鳥問題

早起き鳥問題は，次のように定義される.

時刻 t = 0 で，静止状態のセルによって敷き詰められたセル空間があり，任意の時刻にセル空間外部からの刺激によって特別な状態（鳥状態）に遷移できるものとする. この遷移は, 遷移規則とは無関係にかつランダムに変化することができるものとする. このとき，最初に出現した鳥状態のみを残し，後に出現した鳥状態を消滅させるための局所関数を決定せよ.

この論文では，任意の時刻に鳥状態に変化することのできるセルの数は，多くとも１とする.

3. 準備

この章では，次章以降で用いる２つのアルゴリズムについて説明する．初めに，Rosenstiehl, Fiksel and Holliger の 1 次元 CA 上の早起き取り問題に対するアルゴリズムについてし，次に Balzer の一斉射撃アルゴリズムについて説明する.

3.1 Rosenstiehl, Fiksel and Holliger のアルゴリズム

Rosenstiehl, Fiksel and Holliger は，1 次元ループ CA 上で動作する EBP に対するアルゴリズムを構築した．Legendi and Katona もループあるいは，境界の有無に関わらず動作するアルゴリズムを 5 状態で構築したが，このアルゴリズムは鳥状態の出現の仕方によって計算量が変動する．そのため，この論文では，常に計算量が一定である，Rosenstiehl, Fiksel and Holliger のアルゴリズムを用いる.

Rosenstiehl, Fiksel and Holliger のアルゴリズム（RFH アルゴリズム）が動作するために必要な状態は，表 1 の通りである.

表 1:アルゴリズムで使う状態

状態	役割
Q	休止状態
I	信号を発信した休止状態
B	鳥状態
EB	Early Bird 状態
M	壁状態
K	速度 1 で進む K 信号
G	速度 1 で進む G 信号
N1, N2	速度 1/2 で進む N 信号
R1, R2, R3	速度 1/3 で進む R 信号

信号の進む方向はそれぞれ，右であれば *r*，左であれば *l* で示される．例えば，右に進む K 信号の状態は，*r*K となる．このアルゴリズムで使う主な状態は表 1 の通りであるが，信号の交差を実現するために，表 1 の状態を組み合わせた，いくつかの新しい状態が必要である．例として，左方向に進む N 信号と右方向に進む R 信号の交差の様子と, その時必要になる状態（表 1 の状態の組）を図 1 に示す.（図 1 中では, *r*R2:*l*N1 と *r*R3:*l*N2 が表 1 の状態を組み合わせた新しい状態である.）

t	…	*r*R2	I	I	*l*N2	…
t+1	…	*r*R3	I	*l*N1	I	…
t+2	…	I	*r*R1	*l*N2	I	…
t+3	…	I	*r*R2:*l*N1	I	I	…
t+4	…	I	*r*R3:*l*N2	I	I	…
t+5	…	*l*N1	I	*r*R1	I	…

図 1 : N 信号と R 信号の交差の様子

このアルゴリズムは，１次元ループ CA 上で動作する．このアルゴリズムを動作させる，1 次元ループ CA のすべてのセルの初期状態は静止状態（Q 状態）である．こ

の Q 状態は，任意の時刻に鳥状態（B 状態）へとランダムに変化することができる．このアルゴリズムの動作について，各信号の伝播の様子として表すと，図２のダイヤグラムが得られる．この図の縦軸は時間，横軸は各セルを表している．この図の左端と右端は同一のセルであることに注意する．このダイヤグラムでは，早く生まれた鳥状態 B_1 と遅く生まれた鳥状態 B_2 が発信する信号とその動作を表している．このダイヤグラムに従って，動作を説明する．

まず，鳥状態（B_1, B_2）が生成されると，鳥状態になったセルは，左右のセルへ N 信号と R 信号を発信する．左右の N 信号が衝突する（a_1, a_2, a_3）と，壁状態（M）が生成される．この壁状態には，B_2 が発信した R 信号が，B_1 が発信した R 信号よりも先に到着する（b_1, b_2）．その時，R 信号と壁状態は消滅し，B_2 が発信した N 信号を消滅させるために K 信号を R 信号と同一の方向へ発信する．同一方向へ進んでいる K 信号と N 信号が衝突する（c_1, c_2）と，二つの信号は消滅する．この結果，B_2 が発信した信号はすべて消滅し，B_1 が発信した信号だけが残る．そして，B_1 からの左右の R 信号は B_1 の N 信号でできた壁で衝突する（d）と，G 信号が発信される．この G 信号は，EB 状態を生成するための信号である．G 信号を左右のセルから同時に受け取ったセルは，EB 状態になり，アルゴリズムが終了する．
このアルゴリズムによる CA の詳細な動作は次の通りである．

(1) C_j が B 状態である場合，C_j は左右に N 信号と R 信号を発信し，休止状態になる．
(2) C_j が両方向から N 信号を受信した場合，C_j は壁状態（M 状態）になる．
(3) C_j が M 状態であり，片方向から R 信号を受信した場合，壁と R 信号は消滅する．
(4) C_j が M 状態であり，K 信号を受信した場合，壁は消滅する．
(5) N 信号が同一方向に進んでいる R 信号を追い越す時，R 信号は消滅する．
(6) C_j で R 信号が消滅する時，C_j は R 信号が進んでいた方向へ K 信号を発信する．
(7) K 信号が同一方向に進んでいる N 信号を追い越す時，両方の信号は消滅する．
(8) C_j が一度に両方向から R 信号を受信した場合，それぞれの方向に G 信号を発信する．そして，R 信号は消滅する．（この時は，K 信号は発信しない．）
(9) G 信号が同一方向に進んでいる N 信号を追い越す時，N 信号は消滅する．
(10) C_j が一度に両方向から G 信号を受信した場合，信号は消滅し，C_j は EB 状態となる．

このアルゴリズムでは，セル全体に一つの EB 状態とそれ以外のセルが I 状態になった状態を早起き取り問題の終了としている．
このアルゴリズムは，常に最初の B 状態が生成されてから 2n ステップで完了する．

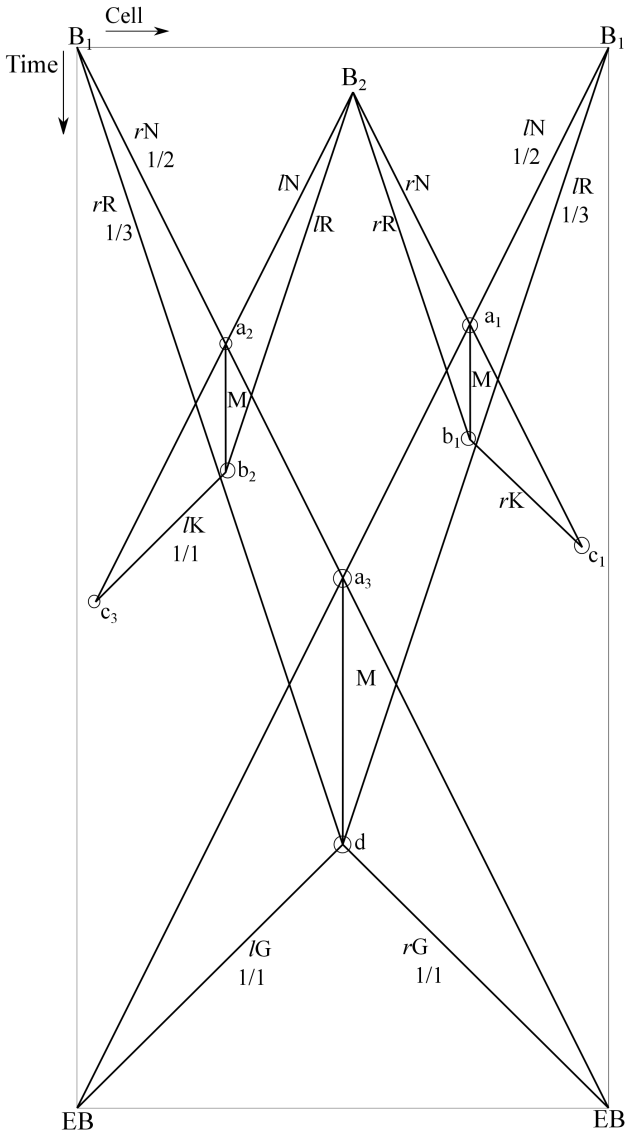

図 2　RFH アルゴリズムのダイヤグラム

3.2 一斉射撃問題

一斉射撃問題とは，1957 年に Myhill により提案された，任意の有限の長さ n の 1 次元 3 近傍 CA の左端の将軍状態と呼ばれるセルからの信号により，すべてのセルを同時刻に特別な状態（射撃状態）にする問題である．2n － 2 の最小時間で，この問題を解決するアルゴリズムが Waksman や Balzer によって考案されており，以下でこのアルゴリズムについて説明する．

このアルゴリズムは，有限 1 次元 CA で動作する．この有限 1 次元 CA の初期様相は，左端のセルだけが将軍状態にあり，それ以外のセルは静止状態にある．このアルゴリズムのダイヤグラムは，図 3 の通りである．まず，左端の将軍状態のセルはセル空間を分割するために，速度がそれぞれ 1, 1/3, 1/7, …, $1/(2^i - 1)$, …の信号 S1, S2, S3, …, Si, …を右方向へ発信する．信号 S1 は右端の壁にぶつかると左方向に反射する．このとき右端のセルは，将軍状態となり左方向へ速度 1/3, 1/7, …, $1/(2^i - 1)$, …の信号を発信する．3/2n ステップのときに，S1 と S2 の信号がセル空間の中央で衝突し，セル空間を半分に分割する．また，衝突した場所には将軍状態が生成され，信号 S1, S2, …, Si, …を左右に発信する．7/4n ステップのときには，信号 S1 と S3 が衝突し，セル空間を 4 分割する．この動作を繰り返し，セル空間を等分に分割していき，長さが 2 または 3 の小さな問題に還元することで，一斉射撃問題を解決している．このアルゴリズムの時間計算量は，常に 2n － 2 である．

速度がそれぞれ 1, 1/3, …, $1/(2^i - 1)$, …の信号 S1, S2, …, Si, …は，一般には無限の状態数を必要とするが，次のような方法により有限の状態数だけでこれらの信号を発信することを可能にしている．

(1) 信号 S1, S2, …, Si, …は，一つ右へ進むたびに，速度 －1 の信号を発信する．
(2) 信号 S1 は，速度−1 で進み続ける．
(3) 信号 S2, S3, …, Si, …は，速度 －1 の信号を 2 つ受信すると右のセルへ進む．
(4) 将軍状態のセルは，速度 －1 の信号を受信すると新しい信号を発信する．

Balzer は 8 状態で動作するこのアルゴリズムの開発をした[6].

Balzer のアルゴリズムは，壁のある有限 1 次元 CA 上でのみ動作するため，リング上で動作させるためにアルゴリズムの改善を行う必要がある．

改善の内容は，些細なものであり最も初めから存在する将軍状態に，壁の役割を加えるだけである．このアルゴリズムは実現するために，Balzer のアルゴリズムよりも 1 つ多くの状態数を必要とする．この改善したアルゴリズムを以下では，FSS アルゴリズムと呼ぶ．

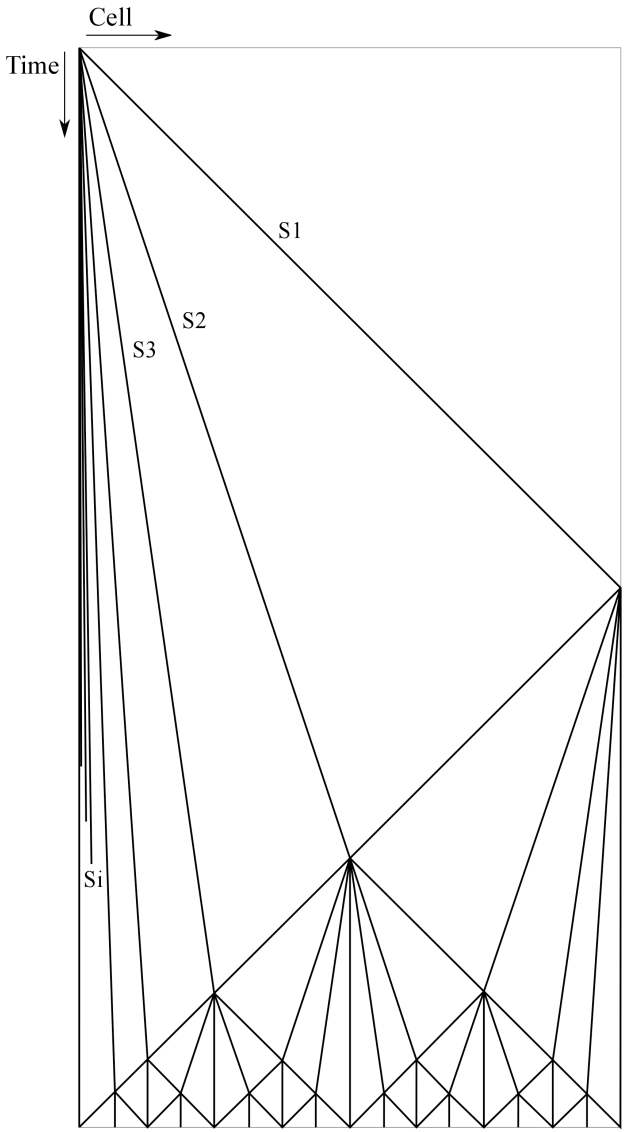

図 3　一斉射撃のダイヤグラム

4. トーラス上の早起き鳥問題の解法

このアルゴリズムは，任意の m, n に対して，セル数 m × n の 2DTCA 上で動作する．この 2DTCA のすべてのセルの初期状態は，Q 状態である．
この CA 上に鳥状態が出現すると，次の手順に従い動作を行う．

1st stage: 横方向へ，RFH アルゴリズムを実行
2nd stage: 横方向へ，FSS アルゴリズムを実行
3rd stage: 縦方向へ，RFH アルゴリズムを実行

まず，1st stage の実行結果として，横方向の Early Bird を得る．2nd stage は，1st stage で得た Early Bird を将軍状態として実行する．3rd stage は，2nd stage で同期したすべてのセルを Early Bird として縦方向へ RFH アルゴリズムを一斉に実行する．このとき横方向の真の Early Bird であるセルは，上下に信号を発信後，静止状態にならずに，EB 状態になる．縦方向で動作するアルゴリズムと横方向で動作するアルゴリズムが干渉する際，縦方向で動作するアルゴリズムが優先される．すなわち，横方向のアルゴリズムの動作は，縦方向のアルゴリズムによって強制的に終了させられる．縦方向の RFH アルゴリズムが完了すると，2DTCA 全体で最初に鳥状態になったセルだけが Early Bird 状態として残り，他のすべてのセルは静止状態（I 状態）となり，アルゴリズム全体が終了する．
このアルゴリズムの時間計算量は，セル空間の大きさに依存しており，4n + 2m － 2 となる．

5. 実装

３．１節で RFH アルゴリズムを説明したときには，信号は連続的なものとして説明したが，離散化された CA 上で 4 章のアルゴリズムを実装するために，RFH アルゴリズムについて一部修正する必要がある．修正しなければならないのは，左右の N 信号の衝突の仕方および，それによって作られる壁状態についてである．
左右の N 信号の衝突には，信号を連続であると見なしたときの信号の交差がどの位置にくるかによって，次の４パターンがあり，連続であると見なした信号と離散時空の CA の関係は，図４のようになる．この図では，各マスは離散化したときの有限オートマトンを表しており，各時間にどのセルに信号が存在しているのかを表している．

Case 1. 2 つのセルの境界で衝突
Case 2. 1 つのセルの中心で衝突
Case 3. 1 つのセルの中心の右側で衝突
Case 4. 1 つのセルの中心の左側で衝突

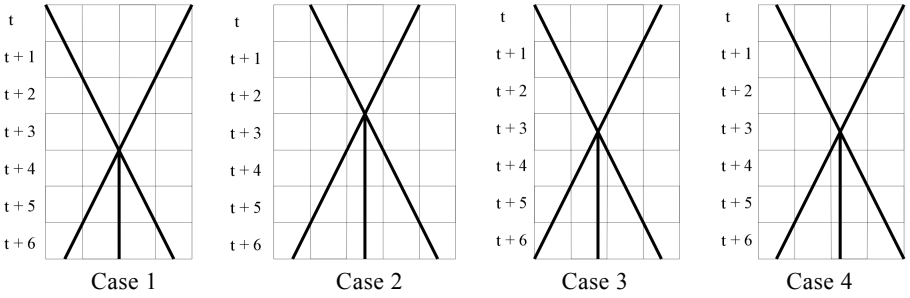

図 4　N 信号の衝突の様子

これらの衝突を，離散化された CA 上で実装すると図５のようになる．図５の各セルは，図４のそれぞれのマスと対応していることに注意する．
Case 1.では，衝突の起きた場所を挟む２つのセルを壁状態にすることで解決する．
Case 2.では，衝突の起きた１つのセルだけを壁状態にすることで解決する．
Case 3, 4.では，衝突の位置が中央ではないから， Case 1, 2.のように，壁状態の数を１もしくは２にするだけでは解決することができない．中央からずれた衝突であったことをセルが記憶するために，特別な壁状態 M2 を用意した．M2 状態は，一方が N1, 他方が N2 である信号が衝突する際に，実際に衝突したセルは M 状態になり，衝突が起きるセルに信号を送ったセルは M２状態になり，２つのセルをあわせて壁状態として機能する．
M２状態があることにより，M 状態は中央で衝突した時とは違う動作をすることができる．また，この壁のある位置で R 信号が同時に衝突しているように見ても，実際には，どちらかの信号が先に壁にぶつかり，R 信号同士が衝突することはない．よって M2 状態は，この壁状態のセルから，G 信号が発信されることも防いでいる．
このように変更を行った上で，離散化された CA 上に実装した．まず，４章のアルゴリズムの 1st stage と 3rd stage で使う，RFH アルゴリズムを４０セルの１次元リング CA 上に実装し，シミュレーションを行った．このシミュレーションでは，２つの鳥状態を用いて，２つの鳥状態の距離と，鳥状態を生成する時間を変化させることによって RFH アルゴリズムが正確に動作していることを確認した．すなわち，生成される鳥状態が２の場合，鳥状態を生成する時間及び位置に関わらず，後から生成された鳥状態が発信した信号がすべて消滅し，最初に鳥状態が生成された位置に EB 状態が生成されることを確認した．

t				
t	RN1	Q	Q	LN1
t+1	RN2	Q	Q	LN2
t+2	I	RN1	LN1	I
t+3	I	RN2	LN2	I
t+4	I	M:LN1	M:RN1	I
t+5	I	M:LN2	M:RN2	I
t+6	LN1	M	M	RN1

Case 1.

t					
t	I	RN1	Q	LN1	I
t+1	I	RN2	Q	LN2	I
t+2	I	I	M:RN1:LN1	I	I
t+3	I	I	M:RN2:LN2	I	I
t+4	I	LN1	M	RN1	I
t+5	I	LN2	M	RN2	I
t+6	LN1	I	M	I	RN1

Case 2.

t				
t	RN1	Q	Q	LN2
t+1	RN2	Q	LN1	I
t+2	I	RN1	LN2	I
t+3	I	M:RN2:LN1	M2	I
t+4	I	M:LN2	M2:RN1	I
t+5	LN1	M	M2:RN2	I
t+6	LN2	M	M2	RN1

Case 3.

t				
t	RN2	Q	Q	LN1
t+1	I	RN1	Q	LN2
t+2	I	RN2	LN1	I
t+3	I	M2	M:RN1:LN2	I
t+4	I	M2:LN1	M:RN2	I
t+5	I	M2:LN2	M	RN1
t+6	LN1	M2	M	RN2

Case 4.

図 5　離散空間上での N 信号の衝突

次に，この結果を用いて，４章のアルゴリズム全体を３０×４０セルの 2DTCA 上に実装した．これを実装するためには，Stage１と Stage３の RFH アルゴリズムには，異なった状態のセットを用いている．

シミュレーションにより，出現する鳥状態の数が２であれば，鳥状態の発生する時間及び距離に関係なく正しく動作することを確認した．一般に，このアルゴリズムにおいて信号の交差は２つの信号の交差だけを考えればよいので，CA 上に生成される鳥状態の数が何個であっても,正しくアルゴリズムを実行することができる.ただし，３つの鳥状態が生成されるタイミング及び位置により，２つの N 信号と１つの R 信号が同時に同一のセルで衝突する場合を除く．この場合については，局所関数の変更により対応可能であると考えている．

6. まとめ

本論文では，２次元トーラス上の早起き取り問題（EBP）について考えた．この問題を解決するために，Rosenstiehl, Fiksel and Holliger の１次元リングセルラーオートマトン（CA）上で動作する EBP のアルゴリズム（RFH アルゴリズム）と Balzer の一斉射撃アルゴリズムを１次元リング CA 上で動作するように改良したアルゴリズムを組み合わせることによって，２次元トーラス CA 上の EBP を解決するアルゴリズムを開発した．このアルゴリズムは，任意の時刻に鳥状態に変化することのできるセルの数は，多くとも１という制限を持っている．また，このアルゴリズムを離散化された２次元トーラス CA 上で動作させるために，RFH アルゴリズムの関数及び状態の一部を修正した．そしてこの修正に基づいて，開発したアルゴリズムを離散化した CA 上に実装し，２次元トーラス上の早起き取り問題を解決できることを確認した．ただし，３つ以上の鳥状態が生成されるタイミング及び，位置により，２つの N 信号と１つの R 信号が同時に同一のセルで衝突する場合を除く．

今後の課題としては，状態数の少ないアルゴリズムの開発，時間計算量を少なくすることなどが考えられる．また，上で除外された特殊な状況に対応可能にすることが課題として残されている．

参考文献

1) P. Rosenstiehl, J. R. Fiksel and A. Holliger, “Intelligent Graphs: Networks of Finite Automata Capable of Solving Graph Problems,” 1972.
2) T. Legendi and E. Katona, “A 5 state solution of the early bird problem in a one dimensional cellular space,” 1981.
3) T. Legendi and E. Katona, “A solution of the early bird problem in an n-dimensional cellular space,” 1984.
4) Masaru Takano, “A New Solution of the Early Bird Problem on a Two Dimensional Cellular Automaton,” 2010.
5) Yuichiro Maki, “A New solution of the Early Bird Problem on an Infinite Two-Dimensional Cellular Space,” 2011.
6) Robert Balzer, “An 8-state Minimal Time Solution to the Firing Squad Synchronization Problem,” 1967.