平面グラフの Magic Graph の性質

杉　山　雅　英[†1]

Properties of Plane Magic Graphs

Masahide Sugiyama[†1]

和文概要: 一般にグラフに対して頂点に着目した Vertex Magic (VM) ラベリング, 辺に着目した Edge Magic (EM) ラベリングを定義できる．さらに平面グラフに対しては面に着目した Face Magic (FM) ラベリングを定義できる．本報告では平面グラフに対して VM, EM, FM を統一的に扱う方法を提案し，平面グラフにおける幾何的双対性を用いて VM と FM に対する双対性を導く．多面体は平面に投影することで平面グラフと見なすことができる．SAT ソルバーを用いて正多面体の正４面体，正６面体と正８面体の定和の分布に対して双対性が成り立つことを実験的に示す．

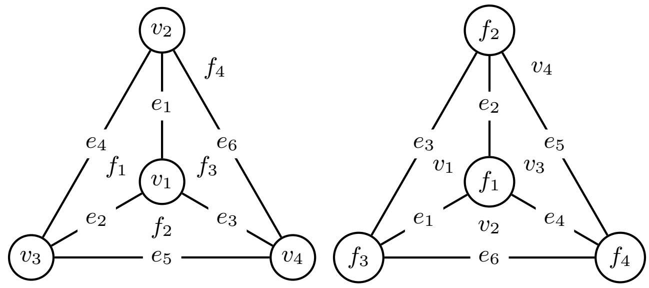
1. まえがき　Sedláček（1963）[1] が Magic Graph 問題を提起して以来，Wallis 等（2000）[2] の Edge-Magic Total Labeling (EMTL) や Lih(1983)[3] の平面グラフに対する Face Magic Graph，Bača(1987)[4], Bača(2017)[5] の平面グラフに対する Anti-Magic Graph が検討されてきた．平面グラフに限定すると Magic graph の magic 性は vertex, edge, face の３つの要素に対して定義できるが，従来の研究では Face Magic (FM) と Vertex Magic (VM) との関係については述べられていない．本報告では平面グラフにおける双対グラフ・双対変換を用いて Magic Graph の VM と FM の双対性について述べ，正多面体における VM 定和と FM 定和の分布に対して双対性が成り立つことを述べる．

2. Magic Graph の分類　連結平面グラフの集合 $\wp$ のグラフ $G = V \cup E \cup F \in \wp$ から連続する自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の分割への写像 $\lambda : G \to 2^{\{1,2,\cdots,n\}}$ に対して式 (1) で重みを定義する．ここで V, E, F はグラフ G の頂点・辺・面 (領域) の集合である．

$$\lambda^*(z) = \lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in Z^c}} \lambda(w) \quad (z \in Z) \tag{1}$$

ここで Z は V, E, F のいずれかであり，以降ではそれを $Z = V|E|F$ と表すことにする．式 (1) の右辺の第２項の Z^c は $Z = V$ の時，$Z^c = E \cup F$ であり，式 (1) の右辺の第２項の和は頂点 z を共有する全ての辺と面である．$Z = E$ の時，辺 z の両端の頂点と z を辺とする二つの面，$Z = F$ の時，面 z に含まれる辺と頂点である．ただし，式 (1) の $\lambda(z)$ $(z \in G)$ を含む和の計算は部分集合 $\lambda(z)$ に属する数の和と定義する．$\lambda^*(z)$ が全ての $z \in Z$ に対して一定値の時，G, λ を Z Magic (ZM) graph，Z Magic label (写像) と呼び，その一定値 $S = \sigma(\lambda)$ を定和 (magic sum) と呼ぶ．$Z = V, E, F$ に応じて Vertex Magic (VM)，Edge Magic (EM)，Face Magic (FM) と呼ぶ．頂点･辺･面に置く数字の個数が各々一定値 $m_v, m_e, m_f (\geq 0)$ の時，$\mathbf{m} = [m_v, m_e, m_f]$ 型 [⋆1] magic graph (label) と呼ぶ[3]．$v = |V|, e = |E|, f = |F|$ とすると $n = m_v v + m_e e + m_f f$ である．グラフ G 上の $\mathbf{m}$ 型 Z magic label λ の全体を $\Lambda^Z_{\mathbf{m}}(G)$ で表す[7]．G の平面性を問わない場合には $F = \phi, f = 0, m_f = 0$ とし，$\mathbf{m} = [m_v, m_e]$ とする．

3. 平面グラフの双対と Magic Graph　$G \in \wp$ に対して V, E, F の要素に 1 から番号付けして辺行列 (辺 $e_\ell (\ell = 1, \cdots, e)$ の両端の頂点 v_i, v_j の番号 i, j の行列．以降では辺頂点行列と呼ぶ) 及び辺面行列 (辺 e_ℓ を共有する面 f_i, f_j の番号 i, j の行列) を $\boldsymbol{M}_V, \boldsymbol{M}_F$ と表す．二つの行列は $e \times 2$ 行列である．図 1(a) に示す正４面体の平面グラフの辺頂点行列，辺面行列を式 (2) に示す．$\boldsymbol{M}_V$ の数字は頂点の番号であり $\boldsymbol{M}_F$ の数字は面の番号である．逆に $\boldsymbol{M}_V, \boldsymbol{M}_F$ において頂点 $v_i \in V$ を含む辺番号の集合，面 $f_j \in F$ の辺番号の集合を求めることで頂点 v_i，面 f_j と共有する辺番号情報を構成できる．G が正則 (頂点次数が一定 $d^{(v)}$)，面次数が一定 ($d^{(f)}$) であれば頂点辺情報は行列で表され頂点辺行列 $\boldsymbol{E}_V$ 及び面辺行列 $\boldsymbol{E}_F$ は式 (3) で示すように $v \times d^{(v)}$ 型行列，$f \times d^{(f)}$ 型行列で与えられる．



(a) G の番号付け　　(b) $\hat{G}$: G の ρ 双対グラフ

図 1　正４面体の ρ 双対変換

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$\boldsymbol{M}^t_V$	1	1	1	2	3	4
	2	3	4	3	4	2
$\boldsymbol{M}^t_F$	1	1	2	1	2	3
	3	2	3	4	4	4

(2)

†1 会津大学
The University of Aizu

⋆1 Lih は (a, b, c) 型と呼んでいる．

	v_1	v_2	v_3	v_4
$\boldsymbol{E}^t_V$	1	1	2	3
	2	4	4	5
	3	6	5	6
	f_1	f_2	f_3	f_4
$\boldsymbol{E}^t_F$	1	2	1	4
	2	3	3	5
	4	5	6	6

(3)

$G \in \wp$ の幾何的双対グラフ $\hat{G} \in \wp$ を対応させる写像を ρ とする．ここで幾何的双対グラフ $\hat{G} = \hat{V} \cup \hat{E} \cup \hat{F}$ とは与えられた平面グラフ $G = V \cup E \cup F$ に対し，その外面も含む各面 f_i に新たな頂点 $\hat{v}_i \in \hat{V}$ を対応させ，グラフ G で隣り合う面 f_k, f_ℓ に対応する頂点同士 $\hat{v}_k, \hat{v}_\ell$ を結んで得られるグラフである．写像 ρ は平面グラフを平面グラフに対応させるので $\wp$ の変換であり，以降では双対変換と呼ぶ．

命題 1　平面グラフの双対変換[6)]
$G \in \wp$ の幾何的双対グラフ $\hat{G} \in \wp$ を対応させる写像 $\rho : \wp \to \wp$ $(\rho(G) = \hat{G})$ は $G, \hat{G}$ の頂点・辺・面の個数を v, e, f 及び $\hat{v}, \hat{e}, \hat{f}$ とすると $\hat{v} = f, \hat{e} = e, \hat{f} = v$ であり，$\rho^2 : \wp \to \wp$ は恒等写像である．

証明: G の面を $\hat{G}$ の頂点に対応させるので $\hat{v} = f$ である．平面グラフ G の全ての辺は面の境界であり，一方の面と他方の面に対応する $\hat{G}$ の二つの頂点を結ぶ辺に対応するので $\hat{e} = e$ である．$G, \hat{G}$ は平面グラフであるのでオイラーの公式 $v - e + f = 2, \hat{v} - \hat{e} + \hat{f} = 2$ が成り立つので $\hat{f} = v$ である．$\hat{G}$ の頂点を結ぶ辺は G における隣り合う面の辺であり，$\hat{G}$ の隣り合う面は G における辺を両端とする頂点であるので $\hat{G}$ の辺頂点行列，辺面行列は G の辺頂点行列，辺面行列を入れ替えることで得られる．$\boldsymbol{M}_{\hat{V}} = \boldsymbol{M}_F, \boldsymbol{M}_{\hat{F}} = \boldsymbol{M}_V$. 従って $\rho^2(G)$ の辺頂点行列，辺面行列は G のそれと一致する．即ち恒等写像である　(証明終了)
本報告では $\hat{G} = \rho(G)$ を満たすグラフ $G, \hat{G}$ を ρ 双対と呼ぶ．図 1-(b) に正４面体 G の双対変換で得られる $\hat{G}$ を示す．k 角形 C_k の ρ 双対グラフは図 2 に示す２頂点と k 個の多重辺を持つグラフである．正４面体と正４面体，正６面体と正８面体，正１２面体と正２０面体はそれぞれ ρ 双対である．式 (4) に正６面体の辺頂点行列，辺面行列を，図 3 に正６面体と正８面体の双対グラフを示す．

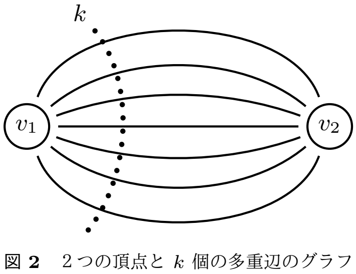


図 2　２つの頂点と k 個の多重辺のグラフ

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
$\boldsymbol{M}^t_V$	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	3	4	1	5	6	7	8	6	7	8	5
$\boldsymbol{M}^t_F$	1	1	1	1	2	2	3	4	2	3	4	5
	2	3	4	5	5	3	4	5	6	6	6	6

(4)

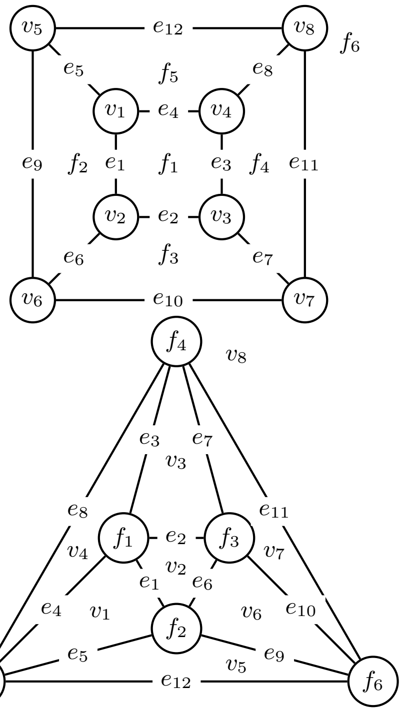


図 3　正６面体と正８面体の双対グラフ

一般に二つのグラフ $G_1 = V_1 \cup E_1, G_2 = V_2 \cup E_2$ が同型 $G_1 \simeq G_2$ であるとは双射 $f : G_1 \to G_2 (f : V_1 \to V_2, f : E_1 \to E_2)$ が G の任意の辺 $e \in E_1$ の両端の頂点 $e = v_i v_j (v_i, v_j \in V_1)$ に対して $f(v_i) f(v_j) \in E_2$ を満たすことである．$G_1 \simeq G_2$ であれば V_1, V_2 の対応する頂点の次数は同一の値である．さらに Magic 性に関して命題 2 が成り立つ．

命題 2　同型のグラフが保存する Magic 性
二つのグラフ G_1, G_2 が同型であり，G_1 が $[m_v, m_e]$ VM (EM) であれば G_2 も $[m_v, m_e]$ VM (EM) である．

証明: 同型写像を $f : G_1 \to G_2$ とし G_1 の VM (EM) λ_1 に対して $\lambda_2(f(z)) = \lambda_1(z)$ $(z \in V_1 \cup E_1)$ とする．G_1 の任意の辺 $e^{(1)} = v_i v_j$ の G_2 の対応する辺 $e^{(2)} = f(e^{(1)})$ に対して $e^{(2)} = f(v_i) f(v_j)$ が成り立つ．従って G_1 における EM λ_1 に対して G_2 の EM λ_2 は G_2 の EM となる．同様に VM λ_1 に対して，任意の頂点 $v^{(1)} \in G_1$ につながる辺 $e_\ell \in G_1$ に対応する辺 $f(e_\ell) \in G_2$ も $f(v^{(1)})$ につながる辺となるので λ_2 を G_2 の VM とできる．　(証明終了)
平面グラフ G_1, G_2 が同型であってもそれらの双対グラフ $\rho(G_1), \rho(G_2)$ は同型とは限らない．即ちグラフの同型は双対性

を保存しない．同型であっても平面グラフの対応する面の次数は同一とは限らない．従って平面グラフにおいて双対性を保存する同型を面を考慮したより強い定義が必要となる．

命題 3　双対変換 ρ を用いた Magic Graph の構成
$\lambda \in \Lambda^Z_{\mathbf{m}}(G)$ であれば双対変換 ρ を用いて $\lambda \circ \rho \in \Lambda^{\hat{Z}}_{\hat{\mathbf{m}}}(\hat{G})$ を構成できる．ここで定和は同一 $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda \circ \rho)$ であり，$\hat{Z}, \hat{\mathbf{m}}$ は以下で与えられる．

$$\hat{Z} = \begin{cases} F & (Z = V), \\ E & (Z = E), \\ V & (Z = F), \end{cases} \quad \hat{\mathbf{m}}^t = \begin{bmatrix} m_f \\ m_e \\ m_v \end{bmatrix}$$

証明: $\lambda \in \Lambda^Z_{\mathbf{m}}(G)$ であるので以下が成り立つ．

$$\lambda^*(z) = \lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in Z^c}} \lambda(w) = \text{const.}\ (z \in Z)$$

証明すべき式は以下の通りである．

$$(\lambda \circ \rho)^*(\hat{z}) = \text{const.}\ (\hat{z} \in \hat{Z})$$

$$\text{左辺} = (\lambda \circ \rho)(\hat{z}) + \sum_{w \sim \hat{z}} (\lambda \circ \rho)(w) = \lambda(\rho(\hat{z})) + \sum_{w \sim \hat{z}} \lambda(\rho(w))$$

$\hat{z} \in \hat{Z}$ であれば $\rho(\hat{z}) = z \in Z$ であり，$w \sim \hat{z} \leftrightarrow \rho(w) \sim z$ であるので

$$\text{左辺} = \lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in Z^c}} \lambda(w) = \text{const.}$$

（証明終了）

関数 $r(x) = n + 1 - x$ と $\lambda(z)$ との合成を $(r \circ \lambda)(z) = \{r(x) \mid x \in \lambda(z)\}$ で定義する．$r(x)$ は昇順降順変換で線形であるので $\lambda \in \Lambda^Z_{\mathbf{m}}(G)$ であれば $r \circ \lambda \in \Lambda^Z_{\mathbf{m}}(G)$ である．Magic Graph の研究では $r(x)$ による対応を双対と呼んでいる．本報告では ρ 双対と区別するために r 双対と呼ぶことにする．r 双対に関して定和の双対性が成り立つ．

命題 4　定和の双対性
$\lambda \in \Lambda^Z_{\mathbf{m}}(G)$ であり，頂点次数，面次数が z に依らず一定 $d^{(v)}, d^{(f)}$ であれば式 (5) が成り立つ．

$$\sigma(\lambda) + \sigma(r \circ \lambda) = (n+1)m \tag{5}$$

$$m = \begin{cases} m_v + d^{(v)} m_e + d^{(v)} m_f & (Z = V) \\ m_e + 2m_v + 2m_f & (Z = E) \\ m_f + d^{(f)} m_v + d^{(f)} m_e & (Z = F) \end{cases}$$

証明:　$\tilde{\lambda} = r \circ \lambda$ とすると $\tilde{\lambda}(z) = (n+1)|\lambda(z)| - \lambda(z)$ であるので

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^*(z) &= \tilde{\lambda}(z) + \sum_{w \sim z} \tilde{\lambda}(w) \\ &= (n+1)|\lambda(z)| + \sum_{w \sim z} ((n+1)|\lambda(w)| - \lambda(w)) \\ &= (n+1)|\lambda(z)| + \sum_{w \sim z} (n+1)|\lambda(w)| - \lambda^*(z) \end{aligned}$$

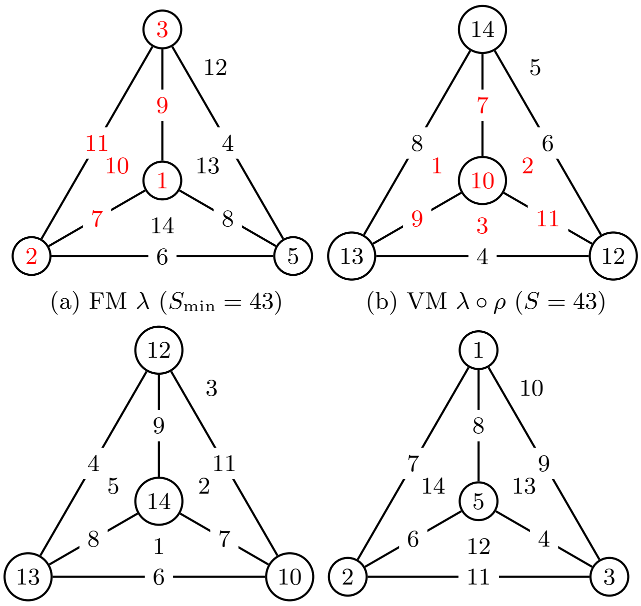
従って以下が成り立つ．

$$\tilde{\lambda}^*(z) + \lambda^*(z) = (n+1)(|\lambda(z)| + \sum_{w \sim z} |\lambda(w)|) \tag{6}$$

$$\tilde{\lambda}^*(z) + \lambda^*(z) = \begin{cases} (n+1)(m_v + d^{(v)}_z m_e + d^{(v)}_z m_f) & (z \in V) \\ (n+1)(m_e + 2m_v + 2m_f) & (z \in E) \\ (n+1)(m_f + d^{(f)}_z m_v + d^{(f)}_z m_e) & (z \in F) \end{cases}$$

ここで $d^{(v)}_z, d^{(f)}_z$ は z における頂点次数，面次数である．頂点次数，面次数が z に依らず一定であれば $\tilde{\lambda}^*(z) + \lambda^*(z)$ は一定値となる．　（証明終了）

図 4-(a) 正 4 面体 FM λ ($S_{\min} = 43$) から ρ 双対変換で (b) の正 4 面体 VM $\lambda \circ \rho$ ($S_{\min} = 43$) 及び (c) の正 4 面体 FM $\tilde{\lambda} = r \circ \lambda$ ($S_{\max} = 62$) が得られる．図 4-(a) などの赤色の数字は面に配置された数字 10 に関して FM 定和を求める数字を例示している．ここで ρ 双対変換と r 双対とに関して予想 1 が成り立つと考えられる．



(a) FM λ ($S_{\min} = 43$)　(b) VM $\lambda \circ \rho$ ($S = 43$)
(c) FM $r \circ \lambda$ ($S_{\max} = 62$)　(d) VM $r \circ \lambda \circ \rho$ ($S = 62$)
$v = 4, e = 6, f = 4, n = 14$

図 4　双対を用いた正 4 面体 [1, 1, 1] FM，VM の実現例

予想 1　ρ 双対と r 双対の結合律
任意の magic label $\lambda \in \Lambda^Z_{\mathbf{M}}$ に対して ρ 双対と r 双対は結合律を満たす．

$$(r \circ \lambda) \circ \rho = r \circ (\lambda \circ \rho)$$

4. 定和方程式と非存在定理

$S_Z = \sum_{z \in Z} \lambda(z)$ と表すと数字 $1, 2, \cdots, n$ は V, E, F のいずれかに配置されるので式 (7) が成り立つ．

$$S_V + S_E + S_F = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = N \tag{7}$$

ここで ZM の定和 S が満たす定和方程式（8）が導かれる[7]．

命題 5　ZM の定和方程式

Z Magic Graph (VM, EM, FM) の定和 $S^{(Z)}$ は式 (8) を満たす．ここで d_z は $z \in V$ の時は頂点の次数，$z \in F$ の時は面の次数とし，$Z = V|F$ の時，Z^c は V, F を入れ替えた集合とする．

$$|Z|S^{(Z)} = N + \begin{cases} S_E + \sum_{z \in Z^c} (d_z - 1)\lambda(z) & (Z = V|F) \\ \sum_{z \in V \cup F} (d_z - 1)\lambda(z) & (Z = E) \end{cases} \tag{8}$$

証明: Z Magic であるので $z \in Z$ に対して $\lambda^*(z)$ が一定値 $S^{(Z)}$ であり式 (1) より

$$\begin{aligned} |Z|S^{(Z)} &= \sum_{z \in Z} \lambda^*(z) = \sum_{z \in Z} (\lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in Z^c}} \lambda(w)) \\ &= S_Z + \sum_{z \in Z} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in Z^c}} \lambda(w) \quad (\text{ここで } S_Z = \sum_{z \in Z} \lambda(z)) \end{aligned} \tag{9}$$

$Z = V$ とすると上の式の第 1 項は S_V であり，第 2 項は全ての頂点 z と共有する $w \in Z^c = E \cup F$ に対する $\lambda(w)$ の総和である．

$$\begin{aligned} \sum_{z \in V} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in E \cup F}} \lambda(w) &= \sum_{z \in V} (\sum_{\substack{w \sim z \\ w \in E}} \lambda(w) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in F}} \lambda(w)) \\ &= \sum_{z \in V} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in E}} \lambda(w) + \sum_{z \in V} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in F}} \lambda(w) \end{aligned}$$

第 1 項は頂点 z を変化させた時に辺 w が共有される回数は 2 回のみであるのでその総和は $\lambda(w)$ の数字の総和の 2 倍である．即ち，

$$\sum_{z \in V} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in E}} \lambda(w) = 2 \sum_{w \in E} \lambda(w) = 2S_E$$

第 2 項は頂点 z を変化させた時に面 w が共有される回数，即ち面 w の次数 d_w 回だけ配置された数字 $\lambda(w)$ の和を積算することになるので以下で与えられる．

$$\sum_{z \in V} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in F}} \lambda(w) = \sum_{w \in F} d_w \lambda(w) = S_F + \sum_{z \in F} (d_z - 1)\lambda(z)$$

ここで $S_V + S_E + S_F = N$ であるので式 (8) が示された．$Z = F$ の時も同様である．次に $Z = E$ とすると式 (9) の第 1 項は S_E であり，第 2 項は $Z^c = V \cup F$ であるので以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \sum_{z \in E} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in V \cup F}} \lambda(w) &= \sum_{z \in E} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in V}} \lambda(w) + \sum_{z \in E} \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in F}} \lambda(w) \\ &= S_V + \sum_{z \in V} (d_z - 1)\lambda(z) + S_F + \sum_{z \in F} (d_z - 1)\lambda(z) \\ &= S_V + S_F + \sum_{z \in V \cup F} (d_z - 1)\lambda(z) \end{aligned}$$

これより式 (8) が示された．（証明終了）

命題 5 を用いて平面グラフに対する非存在定理を示せる．定理 1 の (1)-(b) は文献[8] の 定理 1 (Edge Magic に関する非存在定理) であり，本報告の定理 1 は平面グラフへの拡張である．

定理 1　ZM の非存在定理

グラフ G において $|Z|$ が偶数で以下のいずれかの条件を満たし，$n \equiv 1, 2 (\text{mod. } 4)$ であれば ZM は存在しない．

（1）　$Z = E$ とする．
- （a）　全ての頂点及び面の次数が奇数の場合
- （b）　$m_f = 0$ で全ての頂点の次数が奇数の場合
- （c）　$m_v = 0$ で全ての面の次数が奇数の場合

（2）　$Z = V|F$ とする．$m_e = 0$ で次数 $d_z (z \in Z^c)$ が奇数の場合

証明:　$|Z|$ が偶数であるので式 (8) の左辺は偶数である．上の条件のいずれの場合も右辺の第 2 項が偶数であるので $n \equiv 1, 2 (\text{mod. } 4)$ より $n(n+1) \equiv 2 (\text{mod. } 4)$ であり，$\frac{n(n+1)}{2} \equiv 1 (\text{mod. } 2)$ であるので右辺の第 1 項は奇数である．従って式 (8) を満す整数 $S^{(Z)}$ は存在しないので ZM は存在しない．(証明終了)

頂点の個数が偶数で面での次数が奇数，面の個数が偶数で頂点での次数が奇数であり，辺に配置する数字の和が偶数であれば，同様の非存在性が成り立つ．従って図 4 に示した FM, VM において辺に奇数の数字を配置する個数は奇数であることになる．定理 1 を用いて命題 6 の正多面体の非存在が導かれる．これは文献[8] の命題 14 の平面グラフへの拡張である．

命題 6　正多面体 ZM の非存在

（1）　正４，１２，２０面体において任意の m_v, m_f に対して m_e が奇数の時，$[m_v, m_e, m_f]$ EM は存在しない．

（2）　正６面体において $m_e = 0$ とし，m_f が奇数の時，任意の m_v に対して $[m_v, 0, m_f]$ FM は存在しない．

（3）　正８面体において $m_e = 0$ とし，m_v が奇数の時，任意の m_f に対して $[m_v, 0, m_f]$ VM は存在しない．

証明: (1) 表 1 に示すように正４，１２，２０面体において頂点次数及び面次数は奇数で，v, f は 4 の倍数であり，$e \equiv 2 (\text{mod. } 4)$ であるので $n = m_v v + m_e e + m_f f \equiv 2m_e (\text{mod. } 4)$ 従って m_e が奇数の時，$n \equiv 2 (\text{mod. } 4)$ であり，定理 1 の (1)-(a) の条件を満たすので EM は存在しない．

(2) $m_e = 0$ であるので $n = m_v v + m_f f = 8m_v + 6m_f \equiv 2m_f (\text{mod. } 4)$ であり，m_f が奇数の時，$n \equiv 2 (\text{mod. } 4)$ であり，頂点次数が奇数であるので 定理 1 の (2) の条件を満たすので FM は存在しない．

(3) 同様である．（証明終了）

命題 6 の (2) と (3) は正６面体と正８面体との双対性として理解できる．例えば図 4 の正４面体に対する $[1, 1, 1]$ EM は存在しない．表 3 で示すように正６面体 $[1, 0, 1]$ FM，正８面体の $[1, 0, 1]$ VM は存在しない．

5. 定和の存在区間

以降では簡単化してグラフ G が正則

表 1　正多面体の頂点，辺，面の個数と次数

正多面体	頂点 (v)	辺 (e)	面 (f)	頂点次数 ($d^{(v)}$)	面次数 ($d^{(f)}$)
4	4	6	4	3	3
6	8	12	6	3	4
8	6	12	8	4	3
12	20	30	12	3	5
20	12	30	20	5	3

$d_z = d^{(v)} (z \in V)$ かつ面次数が一定 $d_z = d^{(f)} (z \in F)$ とする．$Z = V|E|F$ に対して $S_Z = \sum_{z \in Z} \lambda(z)$ の最大・最小は式 (10) で与えられる．

$$\begin{cases} \max S_Z = nm_z|Z| - \frac{m_z|Z|(m_z|Z|-1)}{2} \\ \min S_Z = \frac{m_z|Z|(m_z|Z|+1)}{2} \end{cases} \tag{10}$$

5.1 VM の定和の上限・下限　命題 5 の VM 定和方程式は式 (7) を用いて以下で与えられる．

$$v \cdot S^{(V)} = \begin{cases} S_E + N & (d^{(f)} = 1) \\ (d^{(f)} - 2)S_F - S_V + 2N & (d^{(f)} \geq 2) \end{cases}$$

従って $S^{(V)}$ の上限・下限は $d^{(f)} = 1$ の場合には S_E の，$d^{(f)} \geq 2$ の場合には S_V, S_F の最大・最小で求められる．

$d^{(f)} = 1$ の場合

$$\begin{cases} v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{sup}} = \max S_E + N \\ v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{inf}} = \min S_E + N \end{cases}$$

$\max S_E, \min S_E$ は式 (10) で与えられるので式 (11) を得る．

$$\begin{cases} v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{sup}} & = (nm_e e - \frac{m_e e(m_e e-1)}{2}) + N \\ v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{inf}} & = \frac{m_e e(m_e e+1)}{2} + N \end{cases} \tag{11}$$

$d^{(f)} \geq 2$ の場合

$$\begin{cases} v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{sup}} = (d^{(f)} - 2) \max S_F - \min S_V + 2N \\ v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{inf}} = (d^{(f)} - 2) \min S_F - \max S_V + 2N \end{cases} \tag{12}$$

$\max S_V, \min S_V, \max S_F, \min S_F$ は式 (10) で与えられるので式 (13) を得る．

$$\begin{cases} v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{sup}} & = (d^{(f)} - 2)(nm_f f - \frac{m_f f(m_f f-1)}{2}) \\ & \quad - \frac{m_v v(m_v v+1)}{2} + 2N \\ v \cdot S^{(V)}_{\mathrm{inf}} & = (d^{(f)} - 2)\frac{m_f f(m_f f+1)}{2} \\ & \quad -(nm_v v - \frac{m_v v(m_v v-1)}{2}) + 2N \end{cases} \tag{13}$$

二つの式の差を取って両辺を v で割ると式 (14) を得る．

$$S^{(V)}_{\mathrm{sup}} - S^{(V)}_{\mathrm{inf}} = \frac{(d^{(f)} - 2)m_f m_e f e}{v} + m_v((d^{(f)} - 1)m_f f + m_e e) \tag{14}$$

5.2 EM の定和の上限・下限　命題 5 の EM 定和方程式は以下で与えられる．

$$e \cdot S^{(E)} = (d^{(v)} - 1)S_V + (d^{(f)} - 1)S_F + N$$

$d^{(v)} \geq d^{(f)}$ と仮定する．$d^{(v)} < d^{(f)}$ の場合は v, f を入れ替えることで得られる．

$$e \cdot S^{(E)} = (d^{(v)} - d^{(f)})S_V + (d^{(f)} - 1)(S_V + S_F) + N$$

$d_{\mathrm{dif}} = d^{(v)} - d^{(f)} \geq 0$ とすると式 (7) を用いて

$$= d_{\mathrm{dif}} S_V - (d^{(f)} - 1)S_E + d^{(f)} N$$

$S^{(E)}$ の上限・下限は S_V, S_E の最大・最小で求められる．

$$\begin{cases} e \cdot S^{(E)}_{\mathrm{sup}} = d_{\mathrm{dif}} \max S_V - (d^{(f)} - 1) \min S_E + d^{(f)} N \\ e \cdot S^{(E)}_{\mathrm{inf}} = d_{\mathrm{dif}} \min S_V - (d^{(f)} - 1) \max S_E + d^{(f)} N \end{cases} \tag{15}$$

$\max S_V, \min S_V, \max S_E, \min S_E$ は式 (10) で与えられるので上限・下限は式 (16) で与えられる．

$$\begin{cases} e \cdot S^{(E)}_{\mathrm{sup}} = & d_{\mathrm{dif}}(nm_v v - \frac{m_v v(m_v v-1)}{2}) \\ & -(d^{(f)} - 1)\frac{m_e e(m_e e+1)}{2} + d^{(f)} N \\ e \cdot S^{(E)}_{\mathrm{inf}} = & d_{\mathrm{dif}} \frac{m_v v(m_v v+1)}{2} \\ & -(d^{(f)} - 1)(nm_e e - \frac{m_e e(m_e e-1)}{2}) + d^{(f)} N \end{cases} \tag{16}$$

5.3 FM の定和の上限・下限　命題 5 の FM 定和方程式は以下で与えられる．

$$f \cdot S^{(F)} = \begin{cases} S_E + N & (d^{(v)} = 1) \\ (d^{(v)} - 2)S_V - S_F + 2N & (d^{(v)} \geq 2) \end{cases}$$

従って $S^{(F)}$ の上限・下限は $d^{(v)} = 1$ の場合には S_E の，$d^{(v)} \geq 2$ の場合には S_V, S_F の最大・最小で求められる．

$d^{(v)} = 1$ の場合

$$\begin{cases} f \cdot S^{(F)}_{\mathrm{sup}} & = (nm_e e - \frac{m_e e(m_e e-1)}{2}) + N \\ f \cdot S^{(F)}_{\mathrm{inf}} & = \frac{m_e e(m_e e+1)}{2} + N \end{cases} \tag{17}$$

$d^{(v)} \geq 2$ の場合

$$\begin{cases} f \cdot S^{(F)}_{\mathrm{sup}} = (d^{(v)} - 2) \max S_V - \min S_F + 2N \\ f \cdot S^{(F)}_{\mathrm{inf}} = (d^{(v)} - 2) \min S_V - \max S_F + 2N \end{cases} \tag{18}$$

$\max S_V, \min S_V, \max S_F, \min S_F$ は式 (10) で与えられるので式 (19) を得る．

$$\begin{cases} f \cdot S^{(F)}_{\mathrm{sup}} & = (d^{(v)} - 2)(nm_v v - \frac{m_v v(m_v v-1)}{2}) \\ & \quad - \frac{m_f f(m_f f+1)}{2} + 2N \\ f \cdot S^{(F)}_{\mathrm{inf}} & = (d^{(v)} - 2)\frac{m_v v(m_v v+1)}{2} \\ & \quad -(nm_f f - \frac{m_f f(m_f f-1)}{2}) + 2N \end{cases} \tag{19}$$

二つの式の差を取って両辺を f で割ると以下を得る．

$$S^{(f)}_{\mathrm{sup}} - S^{(f)}_{\mathrm{inf}} = \frac{(d^{(v)} - 2)m_v m_e v e}{f} + m_f((d^{(v)} - 1)m_v v + m_e e) \tag{20}$$

例えば正 4 面体の $[1, 1, 1]$ 型 FM 定和の上限・下限は $S^{(F)}_{\mathrm{sup}} = 62.5, S^{(F)}_{\mathrm{inf}} = 42.5$ でその差は 20 であり式 (20) で得られる値と一致する．正 4 面体の最小定和 $S^{(F)}_{\mathrm{min}} = 43$ を与える配置を図 4-(a) に示す．正 6 面体の FM 定和の上限・下限は $S^{(F)}_{\mathrm{sup}} = 143.5, S^{(F)}_{\mathrm{inf}} = 99.5$ でその差は 44 であり式 (20) で得られる値と一致する．

5.4 Super Magic との関係　式 (15) で示したように EM 定和の下限は S_V の最小化と S_E の最大化で得られる．Enomoto 等[11] は v 個の頂点に $\{1, 2, \cdots, v\}$ を配置する EM が存在する時，グラフ G を Super EM と定義した．さらに Sugiyama はその定義を $[m_v, m_e]$ EM に拡張した[8]．これらは S_V を最小化する EM が構成できることに対応している．面を考慮しない場合には $S_F = 0$ であるので式 (7) から $S_V + S_E = N$ が成り立ち，S_V の最小化と S_E の最大化は同値である．しかし面が存在する場合にはそれら両者を同時に最小化・最大化しなければならないことを示している．同様に式 (12) は VM 定和の下限は S_F の最小化と S_V の最大化で，式 (18) は FM 定和の下限は S_V の最小化と S_F の最大化で得られることを示している．ここでも VM, FM の双対性が成り立っている．

6. 定和の存在区間の分類

6.1 定和の剰余制約　前節で求めた定和の実現可能な区間 $[\lfloor S_{\mathrm{inf}} \rfloor, \lceil S_{\mathrm{sup}} \rceil]$ の全ての値に対して Magic Graph を構成できるとは限らない．式 (13) 等で与えた定和の上限・下限が整数値でありその区間の全ての値に対して Magic Graph を構成できる場合を Perfect, 両端を含めて $\delta > 0$

の等差数列となる定和が構成できる場合を δ Perfect，上限・下限の両端は構成できないが他は全て構成できる場合を SemiPerfect，実現可能な区間に不規則に実現できない定和が出現する場合を Singular と定義した[8]。文献[8] の定理 2 で示したように命題 5 の式 (8) の左辺 $S^{(Z)}$ の係数 $|Z|$ と右辺の $d_z - 1$ との最大公約数 c を用いて $d'_z = c(d_z - 1)$ に対して $\delta = (d'_z) > 1$ の時は $S^{(Z)}$ は δ の剰余制約を受ける．正多面体において命題 7 の剰余制約が成り立つ．

> **命題 7　正多面体の定和の剰余制約**
> **以下の剰余制約が成り立つ．ここで命題 6 で示したように正１２・２０面体では EM が存在するのは m_e が偶数に限られるので $m_e = 2m'_e$ とする．**
> **（1）　正６面体の VM 定和**
> $m_e = 0$ **の時，** $S^{(V)} \equiv -m_v(2m_v + 1)(\text{mod. } 3)$
> **（2）　正８面体の FM 定和**
> $m_e = 0$ **の時，** $S^{(F)} \equiv -m_f(2m_f + 1)(\text{mod. } 3)$
> **（3）　正１２面体の EM 定和**
> $m_v = 0$ **の時，** $S^{(E)} \equiv m_f + m'_e(\text{mod. } 2)$
> **（4）　正２０面体の EM 定和**
> $m_f = 0$ **の時，** $S^{(E)} \equiv m_v + m'_e(\text{mod. } 2)$

証明:

（1）　正６面体の VM 定和は $m_e = 0$ の時，$S_E = 0$ であり表 1 に示すように $d_z^{(f)} = 4$ $(z \in F)$ であるので $c = (v, d_z^{(f)} - 1) = (8, 3) = 1$ で $\delta = 3$ で $8S^{(V)} \equiv N(\text{mod. } 3)$ であるので $S^{(V)} \equiv -N(\text{mod. } 3), n = m_v v + m_e e + m_f f = 8m_v + 6m_f, N = \frac{n(n+1)}{2} = (4m_v + 3m_f)(n+1) \equiv m_v(2m_v + 1)(\text{mod. } 3)$ 従って $S^{(V)} \equiv -m_v(2m_v + 1)(\text{mod. } 3)$ が示された．

（2）　正６面体と正８面体は ρ 双対であるので正６面体の VM 定和の剰余制約は正８面体の FM 定和の剰余制約となる．v, f を入れ替えた式で得られる．

（3）　正１２面体の EM 定和は $m_v = 0$ の時，表 1 に示すように式 (8) で $e = 30, d_z^{(f)} - 1 = 4, c = (e, d_z^{(f)} - 1) = 2$，$\delta = 2$ であり，$15S^{(E)} \equiv N/2(\text{mod. } 2)$ である．$n = m_v v + m_e e + m_f f = 2 \cdot 30m'_e + 12m_f, N = n(n+1)/2 = (30m'_e + 6m_f)(n+1)$ であるので $S^{(E)} \equiv N/2 = (15m'_e + 3m_f)(n+1) \equiv m'_e + m_f(\text{mod. } 2)$ である．

（4）　正１２面体と正２０面体は ρ 双対であるので正１２面体の EM 定和の剰余制約は正２０面体の EM 定和の剰余制約となる．v, f を入れ替えた式で得られる．

（証明終了）命題 7-(4) は文献[8] の正２０面体に対する命題 17 であり，命題 7 は平面グラフへの拡張である．

6.2 SAT ソルバーを用いた Magic Graph の探索　sugar と minisat による SAT ソルバー[12] を用いて Magic Graph の解探索を行う．表 2，3，4 に正多面体 (正４，６，８面体) の Magic Graph の VM, FM 定和の分布を示す．表中の各項目 “A, B” の A は VM の分布，B は FM の分布を示している．例えば表 3 の “30:36 S” は VM 定和の分布，“19:25 S” は FM 定和の分布であり，”30:36 S” は定和の最小・最大値及び分布の種類が S (Singular) であることを示している．

表 2　正多面体の Magic Graph の VM, FM 定和の分布 (1)

	$[m_v, m_e, m_f]$ の値		
	$[1, 0, 0]$	$[0, 1, 0]$	$[0, 0, 1]$
正４面体	NX, NX	NX, NX	NX, NX
正６面体	NX, 18:18 P	NX, 26:26 P	NX, NX
正８面体	NX, NX	26:26 P, NX	18:18 P, NX

表 3　正多面体の Magic Graph の VM, FM 定和の分布 (2)

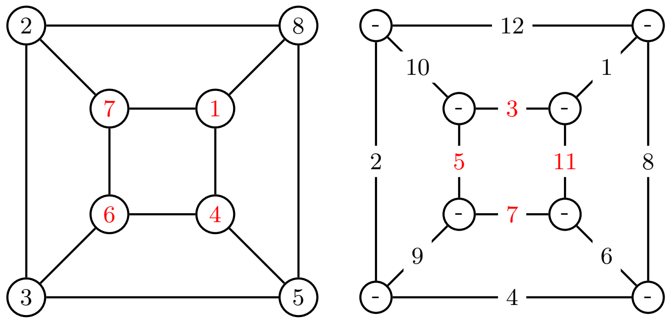
	$[m_v, m_e, m_f]$ の値		
	$[0, 1, 1]$	$[1, 0, 1]$	$[1, 1, 0]$
正４面体	30:36 S, 19:25 S	14:22 S, 14:22 S	19:25 S, 30:36 S
正６面体	48:66 P, 42:53 SP	21:39 3-P, 30:45 NX	36:48 P, 76:92 P
正８面体	76:92 P, 36:48 P	30:45 NX, 21:39 3-P	42:53 SP, 48:66 P

表 4　正多面体の Magic Graph の VM, FM 定和の分布 (3)

	$[m_v, m_e, m_f]$ の値
	$[1, 1, 1]$
正４面体	43:62 SP, 43:62 SP
正６面体	71:118 SP,100:143 SP
正８面体	100:143 SP, 71:118 SP

P: Perfect, 3-P: δ-Perfect($\delta = 3$), S: Singular, NX: 非存在

表 2 で示すように正４面体に対して $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$ VM, FM ともに存在しないが，正６面体は $[1, 0, 0]$ FM 定和 18，$[0, 1, 0]$ FM 定和 26 が存在する[3]．図 5(a), (b) に正６面体 $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$ FM $S^{(F)} = 18, S^{(F)} = 26$ の実現例を示す．

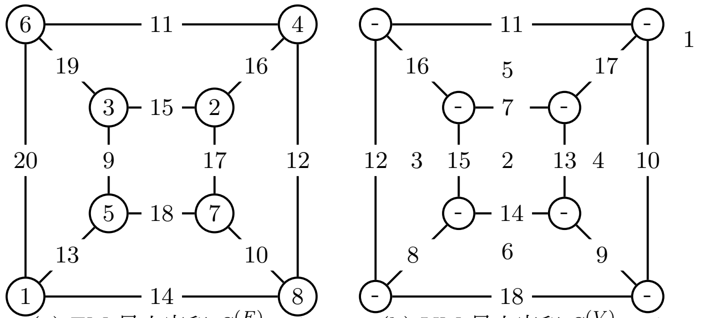


(a) $[1, 0, 0]$ FM $(S^{(F)} = 18, n = 8)$　(b) $[0, 1, 0]$ FM $(S^{(F)} = 26, n = 12)$

図 5　正６面体 $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$ Face Magic の構成例

表 3 に示すように $[1, 1, 0]$ の正６面体の FM 定和は 76:92 の全ての値を構成できるので Perfect であり，それは正８面体の $[0, 1, 1]$ の VM 定和の分布と一致している．正６面体の $[1, 1, 0]$ FM 定和 $S_{\min}^{(F)} = 76$ の実現例を図 6-(a) に示す．図から頂点に $\{1, 2, \cdots, 8\}$ が，辺に $\{9, 10, \cdots, 20\}$ が配置され $\min S_V, \max S_F$ が実現されていることがわかる．図 6-(b) は

$[0,1,1]$ VM 定和 $S^{(V)}_{\min}=48$ の実現例である．面に $\{1,2,\cdots,6\}$ が，辺に $\{7,8,\cdots,18\}$ が配置されている．表 3 の正 4 面体 $[0,1,1]$ VM 定和は区間 30:36 であるが，30, 33, 36 の定和は構成できないので Singular である．同様に $[1,0,1]$ VM 定和の区間 14:22 の 15, 18, 21 が，$[1,1,0]$ VM の定和区間 19:25 の 19, 22, 25 は構成できないのでそれぞれ Singular である．正 6 面体において $[1,1,0]$ EM の分布は Singlar であることが得られている[8]．命題 7 から正 8 面体で $m_e=0$ の時，$[1,0,1]$ FM 定和は $S^{(F)}\equiv -1\cdot 3\equiv 0(\mathrm{mod.}\ 3)$ であり，式 (19) から $S^{(F)}_{\sup}=39, S^{(F)}_{\inf}=21$ で $[21,39]$ の区間で公差 $\delta=3$ の全ての定和を実現できるので $[1,0,1]$ FM 3-Perfect である．図 7 に FM 最小定和 $S_{\min}=21$ の実現例を示す．頂点に $\{1,2,\cdots,6\}$ が，面に $\{7,8,\cdots,14\}$ が配置され $\min S_V, \max S_F$ が実現されている．



(a) FM 最小定和 $S^{(F)}_{\min}=76$　(b) VM 最小定和 $S^{(V)}_{\min}=48$

図 6　正 6 面体の $[1,1,0]$ FM 及び $[0,1,1]$ VM の実現例

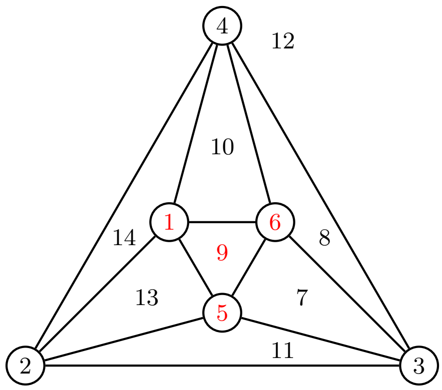
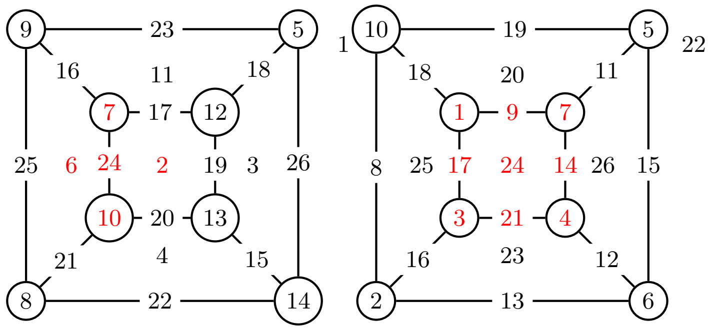


図 7　正 8 面体 $[1,0,1]$ Face Magic ($S^{(F)}_{\min}=21, n=14$)

表 4 に示すように正 4 面体の $[1,1,1]$ FM 定和は 43 から 62 まで，正 6 面体の FM 定和は 100 から 143 まで端の値を除いて全て実現できるので それぞれ SemiPerfect である．図 4-(b) は図 4(a) の FM の双対グラフとして得られる VM グラフである．正 6 面体の FM 最小定和 $S^{(f)}_{\min}=100$ を与える配置を図 8-(b) に示す．同様に図 8 の双対グラフとして得られる正 8 面体 $[1,1,1]$ VM グラフを図 9 に示す．式 (18) で示したように $S^{(V)}_{\inf}$ を与えるには $\min S_F, \max S_V$ 即ち面への配置を最小化し頂点への配置を最大化することで得られるが図 9 の面には $\{1,2,3,4,5,6,7,10\}$，頂点には $\{20,22,23,24,25,26\}$ が配置されている．式 (19) で得られる下限の値は 99.5 であり，$\min S_F, \max S_V$ とすると定和が整数にならないことになり，FM には $\min S_F, \max S_V$ の両方を実現することはできないことになる．同様に正 8 面体 $[1,1,1]$ FM 最小定和の実現例の図 10 では式 (19) に示したように $S^{(F)}_{\inf}$ は $\min S_V, \max S_F$ で与えられる．頂点には $\{1,2,3,4,5,8\}$ が，面には $\{19,20,21,22,23,24,25,26\}$ が配置されている．



(a) EM 最小定和 $S^{(E)}_{\min}=49$　(b) FM 最小定和 $S^{(F)}_{\min}=100$

図 8　正 6 面体の $[1,1,1]$ EM 及び FM 最小定和 $S^{(E)}_{\min}=49, n=26$ と $S^{(F)}_{\min}=100, n=26$ の実現例

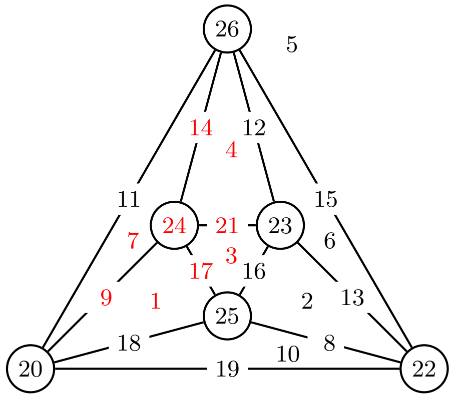


図 9　正 8 面体 $[1,1,1]$ Vertex Magic ($S^{(V)}_{\min}=100, n=26$)

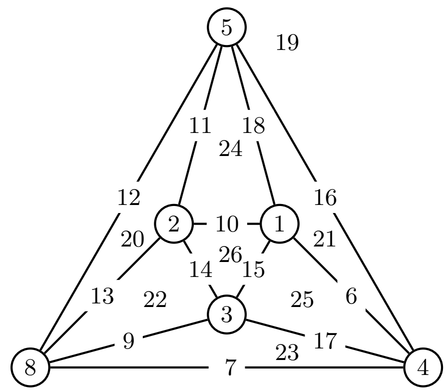


図 10　正 8 面体 $[1,1,1]$ Face Magic ($S^{(F)}_{\min}=71, n=26$)

正６面体と正８面体は ρ 双対グラフであるので VM 定和と FM 定和の分布は双対性が成り立つ．一般に命題８が成り立つ．

命題８　ρ 双対と VM, FM 定和分布
二つの平面グラフ G_1, G_2 が ρ 双対とする．G_1 の **VM** 定和の分布と G_2 の **FM** 定和の分布は一致する．

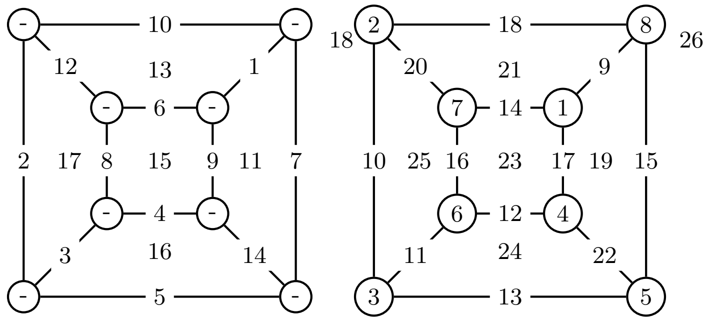
図5-(a) と図11-(a) の $[0,1,1]$ FM $S^{(F)}_{\min}=42$ を式(21) で FM 合成[7] することで 図 11-(b) に示す FM 最小定和 $S^{(F)}_{\min}=100$ が構成できる．

$$\lambda^{(F)}_{[1,1,1]\min}=\lambda_{[1,0,0]}\oplus\lambda_{[0,1,1]} \tag{21}$$

しかし図5(b) の $[0,1,0]$ の FM に対して $[1,0,1]$ の FM は存在しないので合成することで $[1,1,1]$ FM は構成できない．図8(b) と同一の FM 最小定和であるが (d) では $S_V=36, S_F=138$ であり，図 8(b) で $S_V=38, S_F=140$ である．$\min S_V=36, \max S_F=141$ であるの S_V の最小化や S_F の最大化を実現せずに FM 最小定和を構成できている．合成の順序を変えて式(22) で $[1,1,1]$ を構成するとその FM 定和は 132 となり，最大定和 143 に一致しない．

$$\lambda^{(F)}_{[1,1,1]}=\lambda_{[0,1,1]}\oplus\lambda_{[1,0,0]} \tag{22}$$

常に S_V を最小となる配置にして FM 最小定和を与えることができるかや合成の順序を変える効果については今後の検討課題である．



(a) $[0,1,1]$ FM ($S^{(F)}=42, n=18$)　(b) $[1,1,1]$ FM ($S^{(F)}=100, n=26$)

図 11　正６面体 $[1,0,0], [0,1,1]$ FM の合成

得られた Perfect, δ Perfect などの結果を命題９にまとめる．

命題９　正多面体の定和の分布

（１） 以下は **Perfect** である
　（ａ） 正６面体 $[0,1,1]$ **VM** 及び $[1,1,0]$ **VM, FM**
　（ｂ） 正８面体 $[1,1,0]$ **FM** 及び $[0,1,1]$ **VM, FM**

（２） 以下は **3-Perfect** である
　（ａ） 正６面体 $[1,0,1]$ **VM**
　（ｂ） 正８面体 $[1,0,1]$ **FM**

（３） 以下は **SemiPerfect** である
　（ａ） 正６面体 $[0,1,1]$ **FM**
　（ｂ） 正８面体 $[1,1,0]$ **VM**

（４） 正４面体，正６面体，正８面体は $[1,1,1]$ **FM, VM SemiPerfect** である

（５） 以下は存在しない．
　（ａ） 正６面体 $[1,0,1]$ **FM**
　（ｂ） 正８面体 $[1,0,1]$ **VM**

7. むすび　本報告では平面グラフに対する Magic Graph を統一的に扱う方法を提案し，定和方程式を用いて Magic Graph 非存在定理を示した．さらに平面グラフにおける双対性と Magic Graph との関係を述べた．SAT ソルバーを用いた探索を行うことで正４，６，８面体の VM, FM 定和の分布に双対性が成り立つことを実験的に示した．今後は正多面体における EM の定和の分布，正１２，２０面体の VM, FM 定和の双対性の確認，平面グラフの VM, FM 定和の分布の双対性を証明する．

謝辞　平面グラフについて議論していただいた浅井和人上級准教授，浅井信吉上級准教授，西舘陽平准教授 (会津大) に感謝します．

参　考　文　献

1) J. Sedláček, Problem 27, *in* Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163-164 (June 1963).
2) W.D.Wallis, E. T. Baskoro, M. Miller, Edge-magic total labelings, Australasian Journal of Combinatorics, 22, pp.177-190 (Jan. 2000).
3) Ko-Wei Lih, On Magic and Consecutive Labelings of Plane Graphs, Utilitas Math., 24, pp.165-197 (1983).
4) M.Bača, On Magic and Consecutive Labelings for the Special Classes of Plane Graphs, Utilitas Math., 32, pp.59-65 (1987).
5) M.Bača, et al, A survey of face-antimagic evaluations of graphs, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 69 (3), pp.382393 (2017).
6) 井上純一, グラフ理論講義ノート, 北海道大学 工学部 情報工学科/電子工学科 2003-2007. `http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html`
7) 杉山雅英, Magic Graph の一般化とその性質, IPSJ 論文誌, Vol. 59, No.6, pp.1394-1404 (2018-06).
8) 杉山雅英, Magic graph における定和の Perfect 性の伝搬と正多面体への適用, IPSJ 論文誌投稿中.
9) J.A.Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, Electronic J. of Combinatorics (2016).
10) A.M.Marr, W.D.Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhuser/Springer, New York. (2013)
11) H. Enomoto, A. S. Llado, T. Nakamigawa, G. Ringel, Super Edge-Magic Graphs, SUT Journal Math., Vol.34, No.2, pp.105-109 (1998).
12) 番原, 他, SAT 技術の進化と応用, 情報処理, Vol.57, No.8, pp.702-737 (2016-08).

