

空間の階層構造を利用したTSPの近似解法について

An Approximate Partitioning Algorithm for Traveling Salesman Problem

○内田大輔*, 本間経康*, 阿部健一*

○Daisuke Uchida, Noriyasu Honma and Kenichi Abe

*東北大学

*Tohoku University

キーワード : 巡回セールスマン問題 (TSP), 階層構造 (hierarchy), 最適化 (optimization)

連絡先 : 〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉 東北大学工学部 電気工学科 阿部研究室
内田大輔, Tel. 022-217-7074, Fax. 022-263-9289, E-mail: daichan@abe.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

近年, システムの大規模化・複雑化が進み, 組合せ最適化問題に対する効率的な計算手法の重要性が再認識され盛んに研究されている. とくにNP-困難な組合せ最適化問題である巡回セールスマン問題 (TSP) に対しては, 古くから厳密解法, 近似解法, 確率的解法など各種のアプローチのそれぞれにおいて, 多くの研究がある². これらの中には一般の大規模な問題と同様に, 探索空間を部分空間に分割する手法もいくつか提案されている⁴. しかし分割された‘解の部品’の合成手法に問題があり, 部分的な精度に比べて最終的に得られた解の精度が極端に悪くなる場合もある.

本稿では, このような問題点を解決するための階層的な部分空間を利用した近似解法を提案する. 提案手法は, 階層構造における「部分」と「全体」の自律分散的な関係を利用したヒューリスティックスを導入することにより‘分割’と‘合成’の両者をうまくバランスさせ

ることが可能である³. 計算機シミュレーションの結果より, 提案手法の性能について検討する.

2. 対称巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題は,

「 N 個の都市 (点) とそれらの間の距離が与えられたとき, 全都市を一度ずつ訪問して元に戻る巡回路 (tour) のうちで最短のものを求めよ。」

と書かれる. ここでは, 平面上に配置された N 都市を想定し, 都市 i から都市 j への距離 d_{ij} が, 二都市間のユークリッド距離で与えられる対称巡回セールスマン問題を考える (簡単のため $d_{ij} > 0$ とする). また, 都市の座標点が存在する二次元空間 V を次のように定義し

$$V = \{(X, Y) : a \leq X < b, c \leq Y < d\} \quad (1)$$

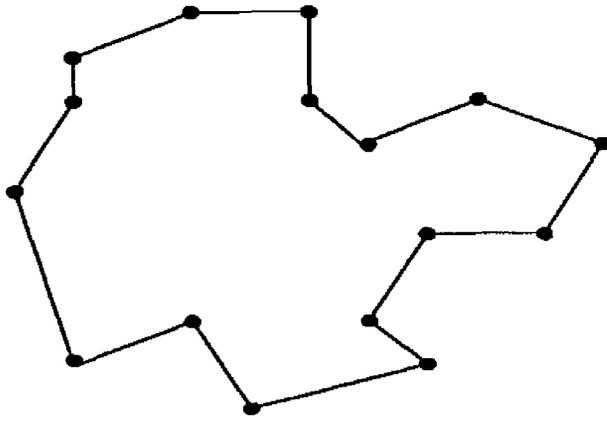


Fig. 1 A symmetric traveling salesman problem

都市 i の座標点を $c_i = (x_i, y_i) \in V, (i = 1, 2, \dots, N)$ とすると

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (2)$$

となり、 $d_{ij} = d_{ji}$ が成立する。

3. 階層的な巡回路の形成手法

対象とする問題をいくつかの部分問題に分割し、部分問題を解いた結果を合成して最終的な解を得る手法は、TSP をはじめとする大規模な問題に対する効率的解法としてよく用いられる。

たとえば TSP の場合、都市空間 V を分割し部分問題ごとに得られた最適解を合成して最終的な解を得る手法は、本来一つの巡回路を形成すべき都市間のつながりを切断して、いくつかの独立な都市群に分けることに相当する。したがって、元のつながりを無視して形成された部分巡回路を用いて、目的とする全体の巡回路を合成することになり、部分的には最適でも全体として良い解が得られるとは限らない。

提案手法の特徴は、この点を改善するため段階的な分割を考え、分割と合成を交互に行

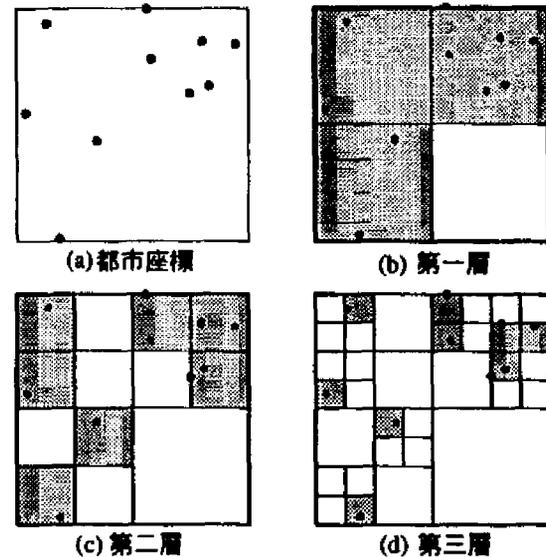


Fig. 2 Divided subspaces.

なうことにより、全体像を保ちながら分割を進めることにある。具体的には、各分割段階における仮の巡回路を形成し、それを次段の巡回路へ継承させるような階層的手法をとる。

以下に詳しく説明する。

3.1 空間の分割法および巡回路の形成

はじめに、分割法について説明する。初期空間を $V^0 = V$ として、都市の座標点が存在する第 $l-1$ 層 ($l = 1, 2, \dots$) の二次元部分空間 V^{l-1} を 2×2 の第 l 層部分空間 $V_s^l (s = 1, 2, 3, 4)$ に等分割する。ただし、計算量を軽減するため

$$c_i \in V_s \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3)$$

を満たす i が存在しないとき、その空間 V_s^l を次の層での分割の対象外とする (Fig. 2)。

それ以外の場合、すなわち都市が少なくとも 1 つ以上存在する空間 V_s^l に対して、その部分空間の中心座標点 $p_s^l = (x_s^l, y_s^l)$ を第 l 層の巡回路を形成する仮想都市座標点とする。具体的な巡回路形成は以下のように行なう。

第 $l-1$ 層巡回路のうち、部分空間 V^{l-1} の中心座標 p^{l-1} を通る巡回路の部分をも、 V^{l-1} を分

割した第 l 層部分空間の中心座標 p_s^l のどれか1つを通過するように変更する (Fig. 3(b)). これをすべての p^{l-1} に対して行ない, 第 $l-1$ 層巡回回路を第 l 層巡回回路に継承させる (Fig. 3(c)). 継承完了後, その層における残りの中心座標を継承された巡回回路に追加して新しい層の巡回回路を完成する (Fig. 3(d)).

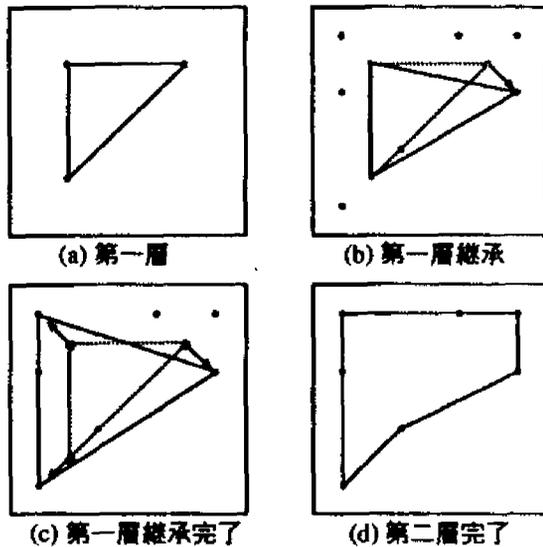


Fig. 3 Hierarchic tours.

3.2 都市の挿入法

部分巡回路に都市を挿入する手法としては, 最近挿入法, 最遠挿入法, 最廉挿入法などがあるが¹, 本稿では現在のツアーの巡回路多角形と, 追加しようとする座標点との最短点を含む辺の両端点間に挿入する方法を採用した³(Fig. 4).

3.3 提案手法のアルゴリズム

以下に提案解法のアルゴリズムを示す.

step 1: $V^0 = V$, $l = 1$ とする

step 2: 部分空間 V^{l-1} を $V_s^l (s = 1, 2, 3, 4)$ に 4 等分割する

step 3: 仮想都市座標点 $p_s^l = (x_s^l, y_s^l)$ を求める

step 4: l 層の巡回路を形成する

step 5: $l = l + 1$ として step 2 に戻る

以上のような分割と合成を繰り返すことにより, (3) 式を満たす部分空間の中心座標と都市座標は 1 対 1 に対応し, 対応する座標点間の距離は 0 に収束して, 目的とする巡回路の近似解が得られる.

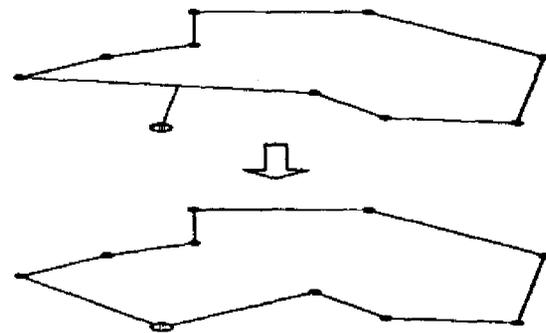


Fig. 4 Insertion method.

4. シミュレーション例

標準的な 442 都市問題に提案手法を適用した結果を Fig. 5 に示す. Karp による手法⁴では高精度解を求めるためには分割数よりも部分解を求める手法に工夫が必要であるが, 提案手法では単純に分割を進めることで精度のよい解が得られている.

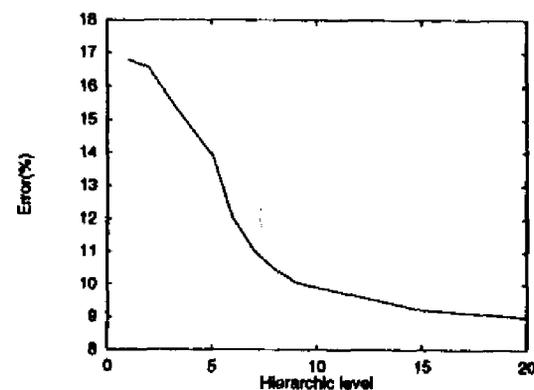


Fig. 5 Variation of error.

参考文献

- 1) 茨木：組合せ最適化の手法 一巡回セールスマン問題の例から一，電気学会論文誌 C 114-4,441/419(1994)
- 2) J. J. Bentley : Fast Algorithms for Geometric Traveling Salesman Problems, Journal on Computing, 4, 387/411 (1992)
- 3) 本間, 佐藤, 阿部, 竹田: ホロンネットワークによる TSP の自律分散的な一解法, 第 8 回自律分散システムシンポジウム資料, 29/32 (1996)
- 4) Richard M. Karp : Probabilistic Analysis of Partitioning Algorithms for The Traveling Salesman Problem in The Plane, Mathematics of Operations Research, 2, 209/224 (1977)