

離散時間系の 2 ディスク混合感度問題の一解法

A Solution to Two Disk Mixed Sensitivity Problem of Discrete-Time System

○北岡信洋*, 渡部慶二*, 山田 功*, 斎藤周次*

○ N.Kitaoka*, K.Watanabe*, K.Yamada*, S.Saitoh*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 離散時間系 (discrete-time system), 混合感度問題 (two disk type mixed sensitivity problem), ロバスト制御 (robust control)

連絡先： 〒 992 米沢市城南 4-3-16 山形大学大学院 工学研究科 電子情報工学専攻 渡部研究室
北岡信洋, Tel.: (0238)26-3326, Fax.: (0238)24-2752, E-mail: m95018@eie.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

近年、マイクロプロセッサの発達により、デジタル型の制御装置が用いられることが多くなってきている。デジタル型の制御装置は、設定した周期で測定値を取り込み（サンプリング）、計算機内で操作量を決定するというプロセスであるため、連続時間系の制御装置と異なり、断続的な動作をするものとなる。

この時、連続時間系から離散時間系への変換が必要であり、これは z 変換や状態方程式から求められる。

離散時間で記述された制御対象に対して制御系を設計する方法はいろいろあるが、不確かさを持たない制御対象は基本的に存在しない事から、モデル誤差を考慮にいれた制御～ロバスト制御～が重要視されている。このような事を考慮にいれて制御系の設計を行う

場合、2つの点を考えなくてはならない。一つは、目標追従性を良くしたり外乱の影響を減らすために、感度を低くする必要があること。もう一つは、モデル誤差があっても制御系を安定にするために、相補感度を低くする必要があるということである。しかし感度と相補感度の間にはトレードオフが存在し、両者を共に小さくする事は不可能である。そこで、感度関数 $S(z)$ 、相補感度関数 $T(z)$ のそれぞれに重み関数 $W_S(z)$ 、 $W_T(z)$ を導入し、 $\|W_S(z)S(z)\|_\infty < 1$ と $\|W_T(z)T(z)\|_\infty < 1$ を同時に満たす事のできる制御器を求める 2 ディスク混合感度問題が検討されてきた。

本発表では、以上のような理由により、離散時間系における 2 ディスク混合感度問題の解法が必要であると考え、その一解法を示す。

2. 離散時間系への変換

連続時間系でのプラントの状態方程式が

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) & : A(n \times n), b(n \times 1) \\ y(t) = cx(t) & : c(1 \times n) \end{cases} \quad (1)$$

で与えられているとする。(1)式の状態方程式を解くと

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau) d\tau \quad (2)$$

が得られる。これを離散時間系に変換する事を考える。

サンプリング周期を δ とする。

離散時間系におけるプラントへの入力、Fig.1のようにインパルスをもつ0次ホールドを通じた形とする。

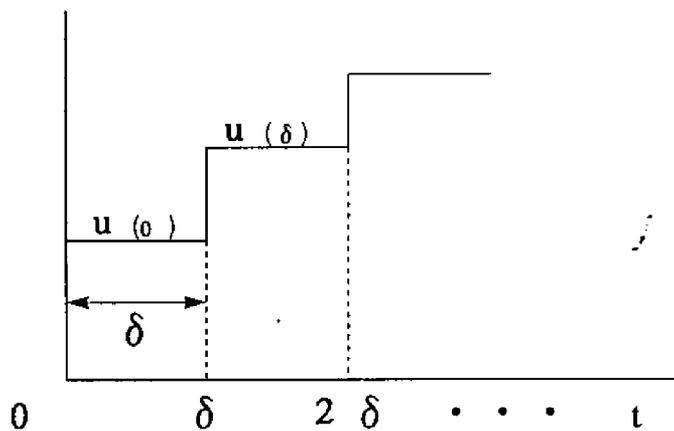


Fig. 1 離散時間系における入力

Fig.1において、入力 $u(t)$ はサンプリング周期 δ の間隔で一定であることを考慮にいと、(2)式より

$$\begin{aligned} x(\delta) &= e^{A\delta}x(0) + \int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)}b d\tau u(0) \\ x(2\delta) &= e^{A\delta}x(\delta) + \int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)}b d\tau u(\delta) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3)$$

とでき、(3)式をまとめると

$$\begin{cases} x(i+1)\delta = A_d x(i\delta) + b_d u(i\delta) \\ y(i\delta) = cx(i\delta) \end{cases} \quad (4)$$

という状態方程式が得られる。以下では δ を省略して

$$\begin{cases} x(i+1) = A_d x(i) + b_d u(i) \\ y(i) = cx(i) \end{cases} \quad (5)$$

という形で表記する事にする。ただし

$$\begin{aligned} A_d &= e^{A\delta} & : A_d(n \times n) \\ b_d &= \int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)}b d\tau & : b_d(n \times 1) \end{aligned} \quad (6)$$

である。

ここで、 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ というラプラス変換を定義すると、遅れ L を持つ場合の変換は

$$\mathcal{L}[f(t-L)] = F(s)e^{-sL} \quad (7)$$

となる。(7)式において $z = e^{sL}$ とおき、入力 $u(z)$ を

$$u(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots \quad (8)$$

同様に、状態 $x(z)$ 、出力 $y(z)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} x(z) &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \\ y(z) &= y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

とする。(9)式より、離散時間系で各時刻での状態方程式を考えると

$$\begin{aligned} x(1) &= A_d x(0) + b_d u(0) \\ x(2) &= A_d x(1) + b_d u(1) \\ &\dots \end{aligned} \quad (10)$$

$$x(n+1) = A_d x(n) + b_d u(n)$$

...

であり、(10)式の各式の両辺に z^{-n} を掛け、全ての式を足し合わせると

$$\begin{aligned} x(1) + x(2)z^{-1} + \dots \\ = A_d(x(0) + x(1)z^{-1} + \dots) \\ + b_d(u(0) + u(1)z^{-1} + \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。(11)式において、左辺に $zx(0) - zx(0)$ を加えて整理すると

$$zx(z) - zx(0) = A_d x(z) + b_d u(z) \quad (12)$$

$x(0) = 0$ とすると、(12) 式は

$$zx(z) = A_d x(z) + b_d u(z) \quad (13)$$

となり、(5) 式より $y(z) = cx(z)$ であるから、このプラントの伝達関数は

$$\frac{y(z)}{u(z)} = c(zI - A_d)^{-1} b_d \quad (14)$$

と求められる。

ここでプラントに対する入力 u が Fig.1 の形を与えられていることを考えると、入力は1つ遅れていると考えられるので、(14) 式に遅れ分 z^{-1} を加えた

$$\frac{y(z)}{u(z)} = c(zI - A_d)^{-1} b_d z^{-1} \quad (15)$$

が実際のプラントとなり、その状態方程式は

$$\begin{cases} x(i+1) = A_d x(i) + b_d u(i-1) \\ y(i) = cx(i) \end{cases} \quad (16)$$

となる。

この系に対するフィードバック系の感度を $S(z)$ 、相補感度を $T(z)$ とし、 S 、 T に対する重み関数を $W_S(z)$ 、 $W_T(z)$ とする。この時、 $\|W_S(z)S(z)\|_\infty < 1$ 、 $\|W_T(z)T(z)\|_\infty < 1$ を同時に満たす制御系の構成を考える。

3. 直列補償器を含む制御系の設計

$\|W_S(z)S(z)\|_\infty < 1$ を満たすために感度の重みに積分器を用いることにする。サンプリング周期が δ であることから、これを利用して $W_S(z) = \frac{\delta}{z-1}$ で与えたとすると、直列補償器 $G_S(z)$ は

$$G_S(z) = \frac{\delta}{z-1} \quad (17)$$

と与えられる。これにより制御系は Fig.2 のようにおける。

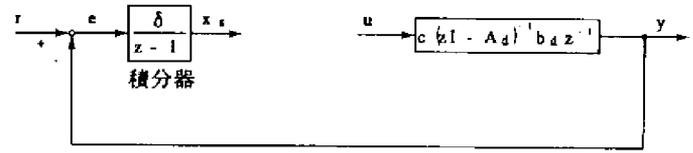


Fig. 2 直列補償器を含む制御系

Fig.2より、直列補償器の状態方程式は

$$\begin{aligned} x_s(i+1) &= x_s(i) + \delta e(i) \\ &= x_s(i) + \delta[-y(i)] \\ &= x_s(i) - \delta c x(i) \end{aligned} \quad (18)$$

と表せ、拡大制御対象は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(i+1) \\ x_s(i+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -\delta c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ x_s(i) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} b_d \\ 0 \end{bmatrix} u(i-1) \\ &\equiv \hat{A} \hat{x} + \hat{b} u(i-1) \\ &\quad : \hat{A}((n+1) \times (n+1)), \hat{b}((n+1) \times 1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} y(i) &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ x_s(i) \end{bmatrix} \\ &\equiv \hat{c} \hat{x} \quad : \hat{c}(1 \times (n+1)) \end{aligned} \quad (20)$$

となる。(19) 式において、 $\hat{A} - \hat{b}\hat{f}$ を安定にする状態フィードバック則は

$$u(i) = - \begin{bmatrix} f & f_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i+1) \\ x_s(i+1) \end{bmatrix} \quad (21)$$

である。ここで、(21) 式では、入力を現在の入力とするために、右辺の状態を1つ進めている。(21) 式に(19) 式を代入すると

$$\begin{aligned} u(i) &= - \begin{bmatrix} f & f_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -\delta c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ x_s(i) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} f & f_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_d \\ 0 \end{bmatrix} u(i-1) \\ &= -(fA_d - f_s \delta c)x(i) - f_s x_s(i) - f b_d u(i-1) \\ &\equiv -f_x x(i) - f_s x_s(i) - f b_d u(i-1) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

次に、 x の値が正確にはわからない場合が多い事から、オブザーバ

$$\begin{aligned} x_0(i+1) &= A_d x_0(i) + b_d u(i-1) \\ &\quad + k\{y - c x_0(i)\} \\ &= (A_d - kc)x_0(i) \\ &\quad + b_d u(i-1) + ky(i) \end{aligned} \quad (23)$$

を用いる。

以上のフィードバックとオブザーバをまとめると、制御系は Fig.3 で与えられる。

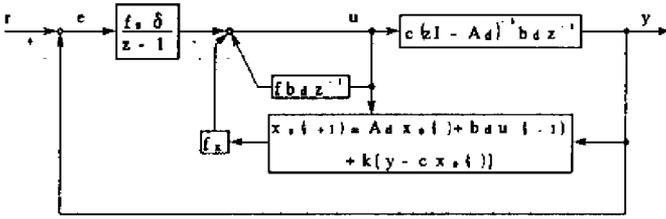


Fig. 3 制御系

これを整理すると、Fig.4 のような制御系が得られる。

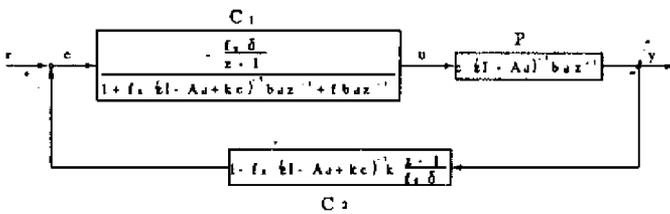


Fig. 4 制御系

安定な場合、 $k=0$ とおけるため、感度と相補感度は Fig.4 より

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{1 + C_1 C_2 P} \\ &= \frac{1}{|zI - A_d| |z-1| \{1 + f_s \delta c (zI - A_d)^{-1} b_d z^{-1} + f_s \delta z^{-1}\}} \\ &\quad \frac{1}{|zI - \hat{A} + \hat{b}f|} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{C_1 C_2 P}{1 + C_1 C_2 P} \\ &= \frac{-f_s \delta c \text{adj}(zI - A_d) b_d z^{-1}}{|zI - \hat{A} + \hat{b}f|} \end{aligned} \quad (25)$$

と求められる。

$\frac{1}{|W_T|}$ が、0dB と交差する周波数を ω_T とする。

$0 \sim \omega_T$ まで $|T|$ を 1 に近似させておくために、

状態フィードバックパラメータ \hat{f} を求める際には以下のような手法を用いる。

$$[zI - \hat{A} + \hat{b}f] \quad (m \times m) \quad (26)$$

であるとする。

制御対象が零点を持たない場合には

$$|zI - \hat{A} + \hat{b}f| = \begin{cases} (z^2 - 2e^{-\frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}} z + e^{-\sqrt{2}\omega_n \delta})^{\frac{m}{2}} & m : \text{even} \\ (z^2 - 2e^{-\frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}} z + e^{-\sqrt{2}\omega_n \delta})^{\frac{m-1}{2}} \\ \quad \times (z - e^{-\omega_n \delta}) & m : \text{odd} \end{cases} \quad (27)$$

を満たすように極を設定する。これは連続時間系において $s^2 + \sqrt{2}\omega_n s + \omega_n^2$ を用いて設計する手法を離散時間系に拡張したものである。

制御対象が零点を持つ場合、安定零点 (α_+) ならば、同じ極を持つように設定し、不安定零点 (α_-) ならば、離散時間系におけるインナ関数が

$$\frac{z + \alpha}{z^{-1} + \alpha} = \frac{z + \alpha}{z + \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{z}{\alpha} \quad (28)$$

である事を考慮にいれ

$$|zI - \hat{A} + \hat{b}f| = \begin{cases} (z^2 - 2e^{-\frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}} z + e^{-\sqrt{2}\omega_n \delta})^{\frac{r}{2}} \\ \quad \times (z + \frac{1}{\alpha_-})(z + \alpha_+) & r : \text{even} \\ (z^2 - 2e^{-\frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\omega_n \delta}{\sqrt{2}} z + e^{-\sqrt{2}\omega_n \delta})^{\frac{r-1}{2}} \\ \quad \times (z - e^{-\omega_n \delta})(z + \frac{1}{\alpha_-})(z + \alpha_+) & r : \text{odd} \end{cases} \quad (29)$$

を満たすように極を設定する。ただし

$$r = m - (\text{Number of Zero}) \quad (30)$$

とする。

基本的に、周波数が ω_T に達する前に相補感度関数 T が減少を始めれば、ロバスト安定に関する設計仕様は満たされることになる。 T の折れ点周波数を ω_n とすると、はじめは $\omega_n = \omega_T$ として、設計仕様を調べる。この時各ゲイン線図が

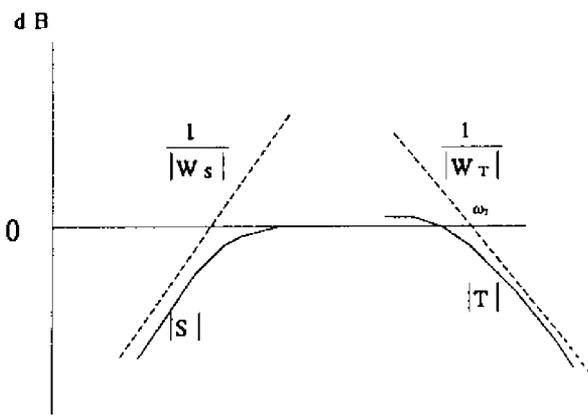


Fig. 5 設計仕様の確認

のようになっていれば、設計仕様を満たす制御器が設計できたことになる。また

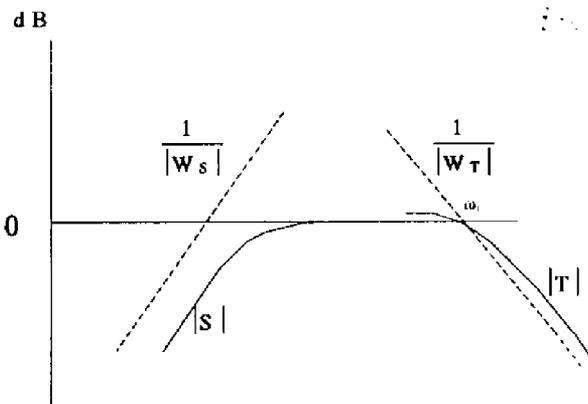


Fig. 6 設計仕様の確認

のようであれば、 ω_n の値を ω_T より少し小さくとり、もう一度、設計仕様を確認する。Fig.6とは逆に

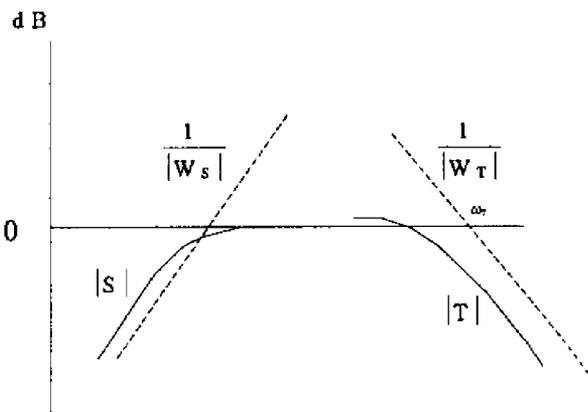


Fig. 7 設計仕様の確認

となっている場合は、 ω_n を ω_T より少し大きくとり、設計仕様を確認する。

この作業を設計仕様を満たされるまで繰り返し、制御系を設計する。

不安定な場合、 $k \neq 0$ であり、感度関数と相補感度関数は Fig.4より

$$S(z) = \frac{1}{1+C_1C_2P} = \frac{1}{|zI-A_d||z-1|\{1+f_x(zI-A_d+kc)^{-1}b_dz^{-1}+fb_dz^{-1}\}} \quad (31)$$

$$T(z) = \frac{C_1C_2P}{1+C_1C_2P} = \frac{\{-f_s\delta+(z-1)f_x(zI-A_d+kc)^{-1}k\}c \text{ adj}(zI-A_d)b_dz^{-1}}{|zI-A_d+bf|} \quad (32)$$

となる。ただし、安定な場合に近づけるため、 $\|k\|$ が小さくなるように

$$\lambda(A - kc) \approx \begin{cases} \lambda(A) & |\lambda(A)| < 1 \\ -\gamma + \lambda(A) & \lambda(A) = 1 \\ \gamma + \lambda(A) & \lambda(A) = -1 \\ \frac{1}{\lambda(A)^*} & |\lambda(A)| > 1 \end{cases} \quad (33)$$

という条件で k を求める。

また、この場合の状態フィードバックパラメータ \hat{f} は、 $k=0$ の時と同様の方法によって求める。

以上が本発表で提案する、離散時間系における2ディスク混合感度問題を連続時間系と同様に解き、制御系を設計する方法である。

4. 数値例

制御対象

$$G_p(s) = \frac{3}{s(s-2)(1+0.01s)} \quad (34)$$

モデル

$$G_m(s) = \frac{3}{s(s-2)} \quad (35)$$

とする。サンプリング周期 $\delta = 0.01$ で離散時間化すると

制御対象

$$G_p(z) = \frac{(0.0398z^2 + 0.1272z + 0.0245) \times 10^{-3}}{z^3 - 2.3881z^2 + 1.7634z - 0.3753} \quad (36)$$

モデル

$$G_m(z) = \frac{(0.1510z + 0.1520) \times 10^{-3}}{z^2 - 2.0202z + 1.0202} \quad (37)$$

となる。

(36)、(37) 式より、重み関数は

$$W_T(z) = \frac{z^2 - 1.96z + 0.961}{0.005z + 0.005} \quad (38)$$

$$W_S(z) = \frac{\delta}{z - 1} \quad (39)$$

とする。

制御対象とモデルのゲイン線図は

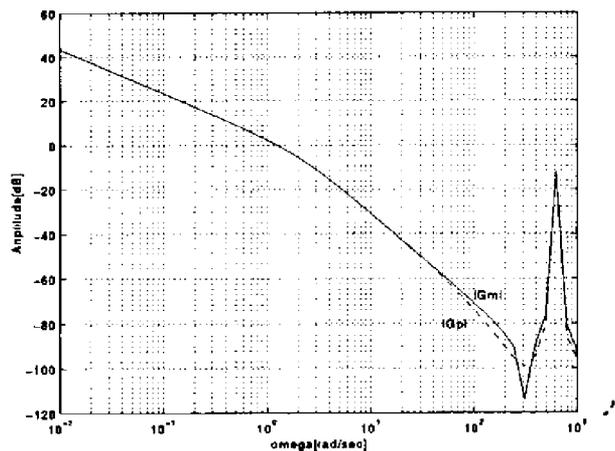


Fig. 8 制御対象とモデルのゲイン

となる。この時のモデル誤差 Δ を離散時間系に変換したものと、相補感度の重み $W_T(z)$ のゲイン線図は

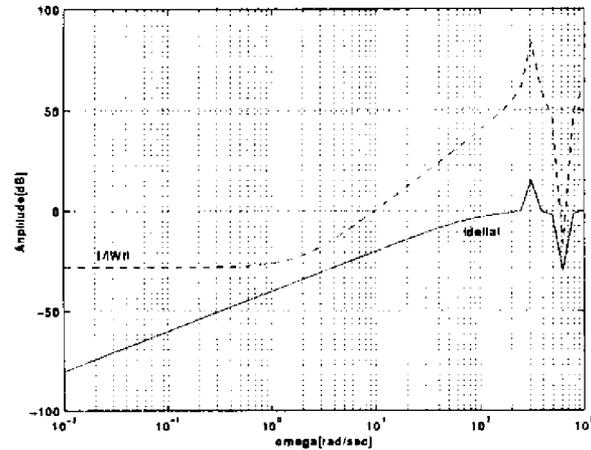


Fig. 9 モデル誤差と重み関数のゲイン

となり、モデル誤差が重みで抑えられている事がわかる。

与えられたモデルのパラメータを、離散時間系に変換すると

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 1.0202 & 0 \\ 0.0101 & 1 \end{bmatrix} \\ b_d &= \begin{bmatrix} 0.0101 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \\ c &= [0 \quad 3] \end{aligned} \quad (40)$$

となる。この時の極および零点は

$$\begin{aligned} pole &= \begin{bmatrix} 1.0202 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \\ zero &= -1.0067 \end{aligned} \quad (41)$$

である。(41) 式より、極が不安定である事から、(33) 式を用いて極を

$$pole = \begin{bmatrix} 0.9798 \\ 0.9999 \end{bmatrix} \quad (42)$$

に移動させる。(ここで、 $\gamma = 0.0001$ とした。) それにより得られる k は

$$k = \begin{bmatrix} 0.0271 \\ 0.0135 \end{bmatrix} \quad (43)$$

となる。

次に、拡大系を考える。(40) 式で求めたパ

ラメータより

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.03 \\ 0 & 1.0202 & 0 \\ 0 & 0.0101 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0101 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

である。(41)式より、不安定零点をもつから、それを考慮にいれ、極の一つを $\frac{1}{-1.0067} = -0.9934$ で与える。

与えられた重み関数の逆数のゲイン線図を Fig.10に示す。

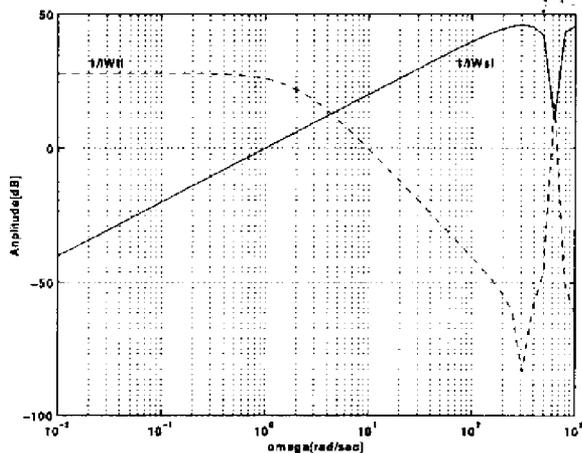


Fig. 10 重み関数（感度と相補感度）の逆数のゲイン線図

Fig.10より、重み関数 $W_T(z)$ のゲインが 0dBと交差する点は 10.0 rad/sec 弱であるので、 $\omega_n = 9.0 \text{ rad/sec}$ に設定すると、配置する3つの極は

$$\text{pole} = \begin{bmatrix} 0.9364 + 0.0597i \\ 0.9364 + 0.0597i \\ -0.9934 \end{bmatrix} \quad (45)$$

となる。これにより求められる状態フィードバックパラメータ \hat{f} は

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} -4999.9 & 199.4 & 2509.1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

である。

以上で求めたパラメータを Fig.4に代入して、感度と相補感度、および与えられた重み関数のゲイン線図を描くと、Fig.11となる。

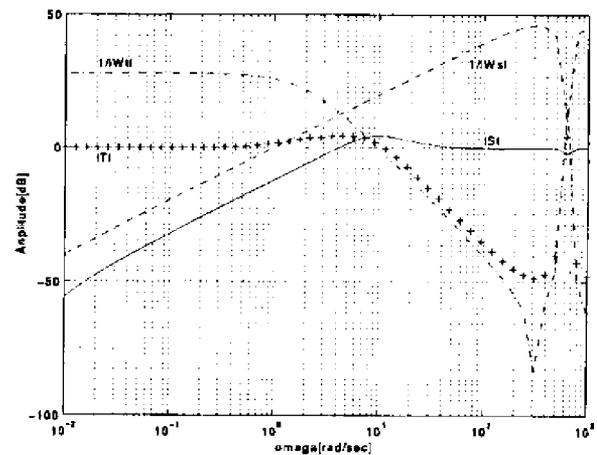


Fig. 11 設計仕様の確認

このゲイン線図より、設計仕様は満たされていない事がわかる。ここで前述したように ω_n の値を 9.0 rad/sec より小さく取することを考え、5.0 rad/sec として再度設計仕様の確認を行う。

$\omega_n = 5.0 \text{ rad/sec}$ の時、新たに配置する極は

$$\text{pole} = \begin{bmatrix} 0.9647 + 0.0341i \\ 0.9647 + 0.0341i \\ -0.9934 \end{bmatrix} \quad (47)$$

となる。これにより求められる状態フィードバックパラメータ \hat{f} は

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} -1587.4 & 199.4 & 1395.1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

である。

以上のパラメータによる各ゲイン線図は

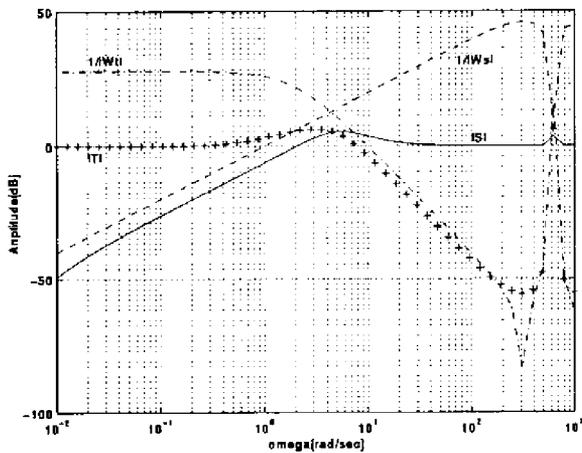


Fig. 12 設計仕様の確認

となり、今回は設計仕様が満たされていることがわかる。

この時のステップ応答を、Fig.13に示す。

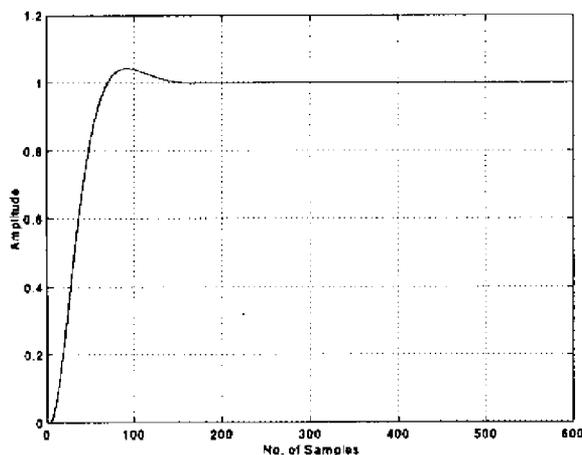


Fig. 13 ステップ応答

Fig.13より、求めたパラメータにより制御系が安定な動作をしていることがわかる。

5. おわりに

本発表では、離散時間系における2ディスク混合感度問題を、連続時間系と同様の方法で解くための手法を示した。

数値例より、離散時間系においても連続時間系と同様の方法で2ディスク混合感度問題

が解ける事が確認できた。

ただし考慮すべき点として、半周期、つまり $\frac{\pi}{\omega_c}$ 以上の周波数において、各ゲイン線図の挙動がおかしくなることが挙げられる。これにより、この周辺の周波数帯での制御が行えるかどうかは今のところ不明であるので、今後はこのような点についても考慮していきたいと思う。

参考文献

- [1] 美多 勉, 原 辰次, 近藤 良: 基礎デジタル制御, コロナ社
- [2] 我妻, 渡部, 高橋, 山田: 極配置に基づく混合感度問題の一解法, 計測自動制御学会論文集, Vol.32, No.9, pp.1345-1353, 1996