

不確定要素を含むモデル同定の評価法

Model Validation of Systems with Uncertainties

井前 譲*, ○永沼 明**

Joe Imae* ○Akira Naganuma**

*岩手大学工学部, **岩手大学大学院

*Faculty of Engineering, **Iwate University

キーワード: Model Validation, Uncertainties, Perturbation Model, Identification, Optimal Control,

連絡先: 〒020 盛岡市上田 4-3-5, 岩手大学工学部機械工学科
井前 譲 Tel.: 019(621)6401, Email: jima@msv.cc.iwate-u.ac.jp

1. はじめに

近年, 制御対象の変動や外乱に対して, それらを積極的に取り扱うロバスト制御系設計の研究が盛んである. ロバスト制御で求められるモデルは摂動モデルと呼ばれ, 従来のモデルとは異なり不確定要素や外乱が含まれる. ところで, ロバスト制御系設計において, そのモデルが重要な役割を果たすにも関わらず, モデル同定に関する研究は比較的少なく, また, その同定モデルが正しいかどうかを調べる評価法に関する研究も少ない.

本論文では摂動モデルのモデル評価に焦点を当て, 新たな手法を提案し, 数値実験によりその有効性を検証する.

2. モデル評価

2.1 定義と従来の評価法¹⁾

モデル評価とは, 制御系設計のために与えられたモデルが, 現実の実験データと矛盾することがないか否かを調べるものである. ロバスト制御の観点では, モデル評価とは観測入出力データと矛盾しない適切なノイズ, 外乱,

またはシステムの不確かさを求める問題として扱われる.

[定義 (モデル評価)]

Fig1 のように, 入力信号 $v \in L_2[0, nh)$ のときの観測出力データの測定値を $Y = \bigoplus_{k=0}^{n-1} y_k \in R^C$ とし, パラメータ $\beta > 0, \gamma > 0$ が与えられたとする. ここで条件 $\|A\|_{l_2 \rightarrow l_2} \leq \sqrt{\beta}, \|w\|_1 \leq \sqrt{\gamma}$ において, 式(1)が成立するならば, この摂動モデルは無効ではないといえる.

$$Y = S_h \left(P_w w + (P_g \Delta P_r + P_y) v \right) \quad (1)$$

ここで

w : 外乱 ($\in L_2(-\infty, nh)$) P_w : w の重み関数
 S_h : サンプリング装置 P_r : ノミナルモデル
 h : サンプリング時間 Δ : 不確定要素
 P_g, P_r : Δ の重み関数 C_r : y_k の次元

「モデルが無効ではない」という表現は, ある摂動モデルにおいて, 式(1)が成立する場合でも「そのモデルが有効である」と断定できないことを意味する.

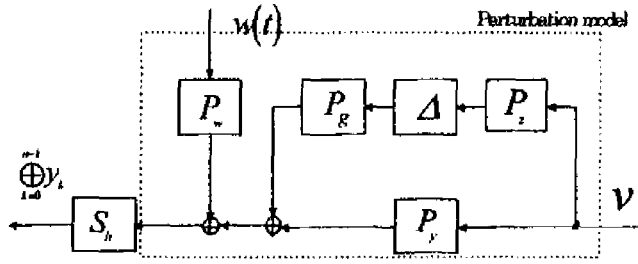


Fig.1 System model for the validation problem

この定義にもとづきモデル評価を LMI 問題として定式化すると次の定理が与えられる。

[定理 1]

入力信号 $v \in L_2[0, nh)$, 観測出力データ $Y = \bigoplus_{k=0}^{n-1} y_k \in R^c$, パラメータ $\beta > 0, \gamma > 0$ が与えられたとき, サンプルング周期 h に関して摂動モデルが無効ではないための必要十分条件は

- a) $Y - S_h P_y v = [R_g R_w] \begin{bmatrix} g \\ w \end{bmatrix}$
- b) $T(g)^* T(g) \leq \beta Z^* Z$
- c) $w^* w \leq \gamma$

を満足するベクトル $g \in \bigoplus_{k=0}^{n-1} R^{b_g}$ と $w \in \bigoplus_{k=0}^n R^{b_w}$ が存在することである。(b_g, b_w は P_g, P_w の状態変数の次元)

ここで $T(v)$ は Toeplitz 行列であり, Z, R_g, R_w はそれぞれ Fig.1 の P_z, P_g, P_w から決定される適切な行列である。

2.2 モデル評価法の新提案

従来の手法は, 定義より LMI 条件を導き, その解を求めることによりモデル評価を行っている。しかし, この手法は LMI の条件とモデルとの関連に対し, 物理的な意味付けが希薄である。これはノルムの評価と式(1)の評価を同時に行うためと考えられる。本報告では, モデルと評価法との間の物理的な意味付けに重点を置いた新手法を提案する。すなわち, ノルム評価と式(1)の評価を区別する。それを定理の形で示す。

[定理 2]

入力信号 $v \in L_2[0, nh)$ のとき観測出力データを $Y = \bigoplus_{k=0}^{n-1} y_k \in R^c$ とし, パラメータ $\beta > 0, \gamma > 0$ が与えられたとする。このとき, 摂動モデルが無効ではないための必要十分条件は, 次の二つが成立することである。

- I) $Y = S_h (P_w w + (P_g \Delta P_z + P_y) v)$ を満足する不確定要素 Δ , 外乱 w が存在する。
- II) Δ, w は $\|\Delta\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \sqrt{\beta}, \|w\|_2 \leq \sqrt{\gamma}$ を満足する。

(証明) 定義より明らか。

この定理 2 にもとづいて, 具体的なモデル評価の方法を以下に示す。その際, 議論を簡単にするため不確定要素 Δ は, 動的要素を含まないパラメータとし, 外乱 w は $w = 0$ とする。ここに Δ は時間的変動を含むものとする。また, I) の評価は, 入力連続関数であることを考慮して, 出力のサンプリング点上だけでなく連続時間上で行うこととする。これらの仮定により, モデル評価問題を最適制御問題の枠組みでとらえることが可能となる。実験データ収集の手順を示した後, 具体的な評価方法を I) に関してはアルゴリズム A に, II) に関してはアルゴリズム B に示す。

[実験データ収集]

- i) 対象実システムに対して, 同定すべきモードを十分に励起できるような入力 $v(t)$ を入れる。
- ii) その入力 $v(t)$ に対する出力データを適度な時間幅 h でサンプリングしその観測出力データを $y_k (k=0, 1, \dots, n-1)$ とおく。

[アルゴリズム A]

- ① 観測出力データ y_k にもとづき, 最小自乗法により近似関数を導出し, それを $Q(t)$ とおく。
- ② 摂動モデルに i) の場合と同じ入力 $v(t)$

を与え、出力 $y(t)$ を求める。観測出力データと摂動モデルの出力データとの差 $e(t)$ を $e(t) = Q(t) - y(t)$ とおく (Fig.2).

③最適制御アルゴリズムを適用することにより評価関数 $J = \int_0^{nh} e(t)^2 dt$ が零となるような $\Delta(t)$ を求める。

[アルゴリズム B]

①アルゴリズム A で算出した不確定要素 $\Delta(t)$ 対し、最小自乗法により近似関数を導出し、それを $R(t)$ とおく。

②この $R(t)$ を用いて、次の最適制御問題を考える。

状態方程式：

$$\dot{x}(t) = R(t)u(t), x(0) = 0$$

評価関数：

$$J = - \int_0^{nh} (Ru)' (Ru) dt / \int_0^{nh} u' u dt$$

③最適制御アルゴリズム適用することにより、最小な評価関数値 J_{opt} を求める。

④ $\|R(t)\|_{l_2 \rightarrow l_2}^2 = -J_{opt}$ の関係⁴⁾より $\|R(t)\|_{l_2 \rightarrow l_2}$ を求める。

本手法では、不確定要素 $\Delta(t)$ の誘導ノルムはアルゴリズム B の④で具体的に算出される。従来の手法とは大きく異なる点である。

(注意1) 3章の数値実験において、実験データ収集の i) では、M 系列信号を参考にして、入力信号を生成した。

(注意2) アルゴリズム I の③において、 Δ の決定には参考文献 2) のアルゴリズムを利用した。

(注意3) 最小自乗法の適用に際しては、した matlab の Optimization TOOLBOX を利用した。

3. モデル評価の数値実験

本章では、不確定要素を含むシステムに対し、本評価法を適用し、その有

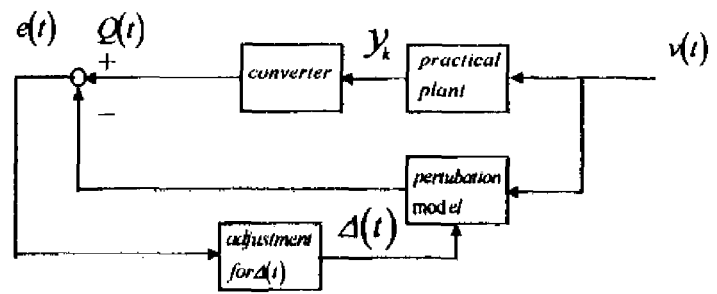


Fig.2 block diagram for model validation

効性を検証する。この場合、不確定要素は前もって与えるものとする。

3.1 2次系の場合

ノミナルモデルが2次の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} v \quad (2)$$

で表される場合を考える。 $c = 1, k = 1, m = 1$ とする。ここで、パラメータ c が不確定であると仮定して、不確定要素を次のように設定する。

$$c = (1 + \Delta), \quad \|\Delta\|_{l_2 \rightarrow l_2} \leq 1 \quad (3)$$

したがって、摂動モデルは式(4)の様に与えられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(1 + \Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (4)$$

さて、不確定要素 $\Delta(t)$ の許容範囲を式(3)を考慮し、不確定要素として許容範囲内の $\Delta_0 = 0.5$ を与えるものとする。すなわち、無効でない摂動モデルを設定したことになる。まず初めに、この場合の実験データを数値計算上で収集する。実験データ収集の ii) において $\Delta_0 = 0.5$ に対し、観測出力データ y_i を求めた (Fig.3)。なお、ルンゲクッタ法のきざみ数は 100 とおいた。サンプリングはそのきざみに対応するものとする。したがって、 $n = 100, h = 10^{-3}$ 。

1) アルゴリズム A を適用する。アルゴリズム A の③においては、 $Q(t)$ として8次

の多項式を用いた (Fig.4). Fig.5,6 は最適制御アルゴリズムにより導出した出力 $y(t)$ と, 不確定要素 $\Delta(t)$ をそれぞれ示す. この時, 同③において評価関数 J の値は $J = 4.1 \times 10^{-4}$ となった. 定理 2 の I) が満たされていると判断できる.

2) 次にアルゴリズム B を適用する.

①~④に従い, 時間関数 $\Delta(t)$ の L_2 誘導ノルムの計算を行った. Fig.7 はこの時の①により導出した $R(t)$ を示す. その結果, $\|\Delta\|_{l_2 \rightarrow l_2} = 0.86$ となった. これは Δ の許容範囲 $\|\Delta\|_{l_2 \rightarrow l_2} \leq 1$ を満足している. よって $\Delta_0 = 0.5$ に対し, $\Delta = 0.86$ が得られており, 比較的良好な結果といえる.

前述の 1), 2) より, 定理 2 の I), II) が満足されているので, このモデルは無効ではない.

3.2 3次系の場合

次に実際のサーボ系を考える (Fig.8) ⁹. 入力を $v(t)$, 出力を $y(t)$ とする時, システムのノミナルモデルは $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = \ddot{\theta}$ として次の状態方程式で表せる.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -M & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{bmatrix} v(t)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

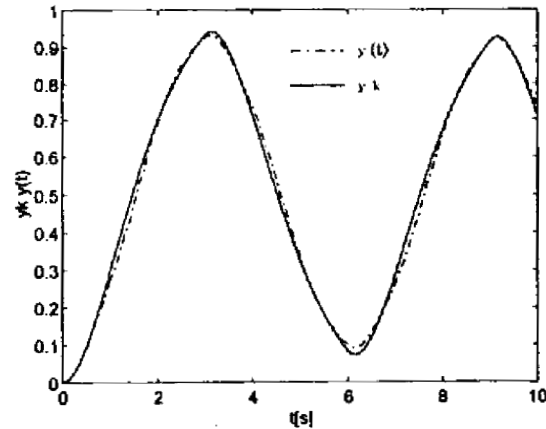


Fig.5 $y(t)$ and y_k

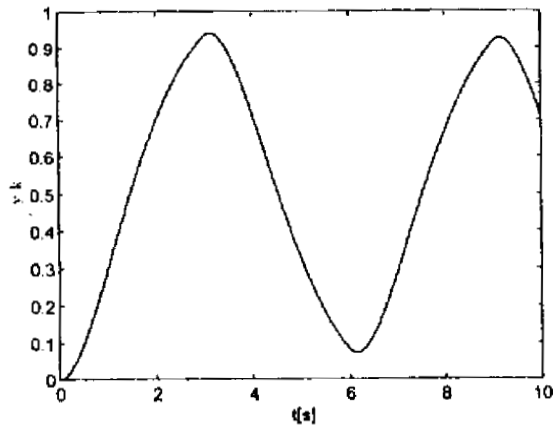


Fig.3 Sampled output y_k

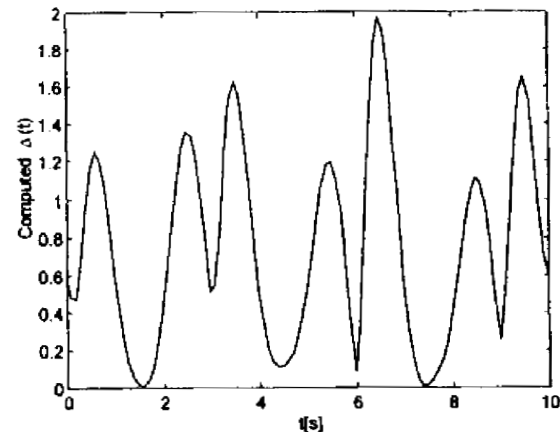


Fig.6 Computed uncertainty $\Delta(t)$

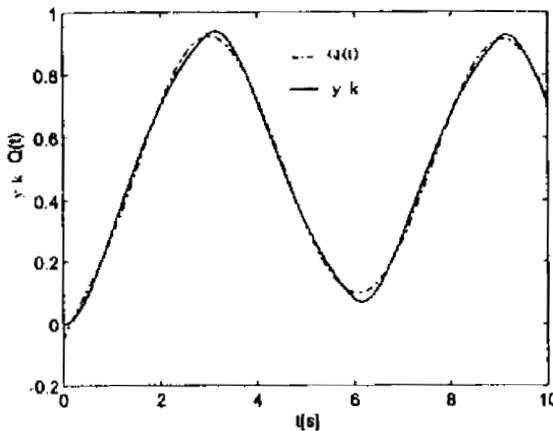


Fig.4 $Q(t)$ and y_k

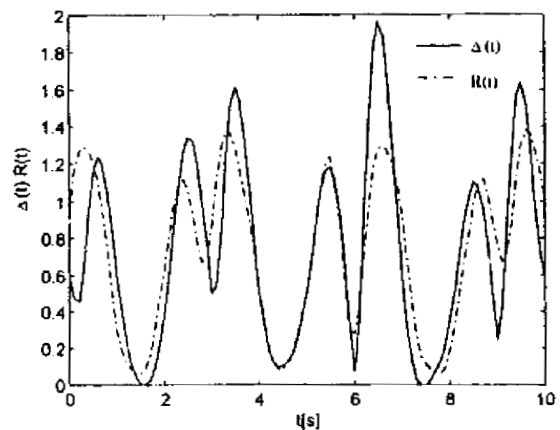


Fig.7 $\Delta(t)$ and $R(t)$

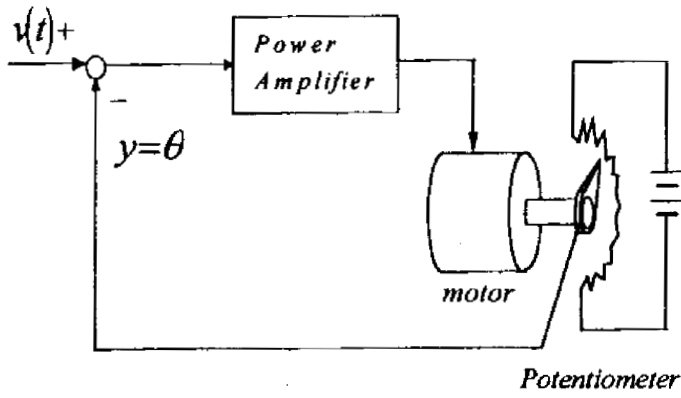


Fig.8 Block diagram for servo systems

ここに、 $L = \frac{\tau_e + \tau_M}{\tau_e \tau_M}$, $M = \frac{1}{\tau_e \tau_M}$, $N = \frac{\tau_e \tau_M}{K_E}$

各種パラメータは次の通りに設定した。

電気的時定数： $\tau_e = 1.4$ [ms]

機械的時定数： $\tau_M = 18$ [ms]

逆起電力定数： $K_E = 12.5$ [10^{-2} V · s/rad]

本例題では K_E が不確定であると考え、

$$N = \tau_e \tau_M \left(\frac{1}{K_E} + \Delta \right) = 25.2(0.08 + \Delta) \quad (6,a)$$

$$\|\Delta\| \leq 0.5 \quad (6,b)$$

とした。したがって摂動モデルとして次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.14 & -19.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.2(0.08 + \Delta) \end{bmatrix} v(t) \quad (7)$$

さて、3.1 節と同様に、 Δ の許容範囲式 (6,b) を考慮して $\Delta_0 = 0.3$ を与える。すなわち、 Δ_0 から得られる実験データに対してはこのモデルは無効ではない。

$\Delta_0 = 0.3$ として実験データを収集した後、アルゴリズム A, B を適用する。3.1 節と同様の手順で計算を行った (Fig.9~13)。その際、アルゴリズム A の③の評価関数値は

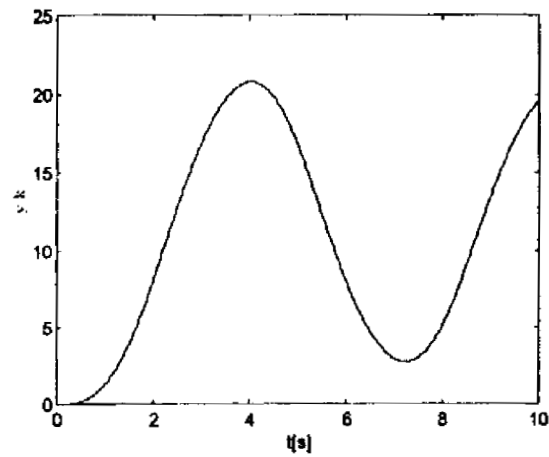


Fig.9 Sampled output y_k

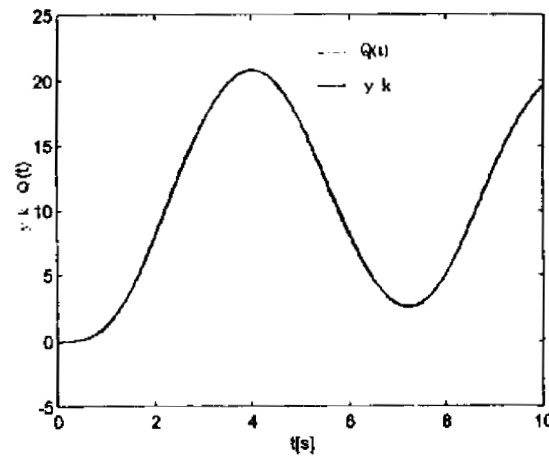


Fig.10 $Q(t)$ and y_k

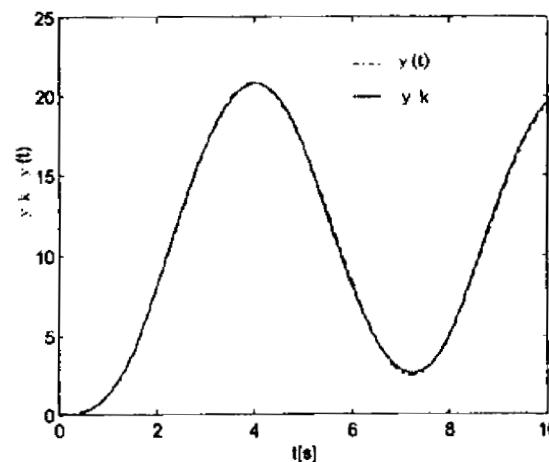


Fig.11 $y(t)$ and y_k

$J = 4.0 \times 10^{-4}$ であり、アルゴリズム B の④の L_2 誘導ノルムは、 $\|\Delta\|_{L_2 \rightarrow L_2} = 0.32$ となった。

明らかに定理 2 の I), II) を満たしており、この摂動モデルは無効ではない。

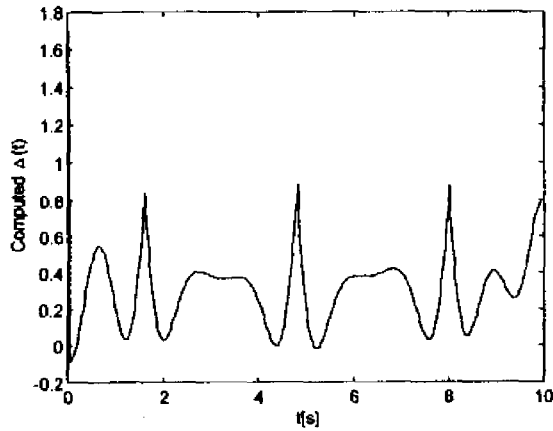


Fig.12 Computed uncertainty $\Delta(t)$

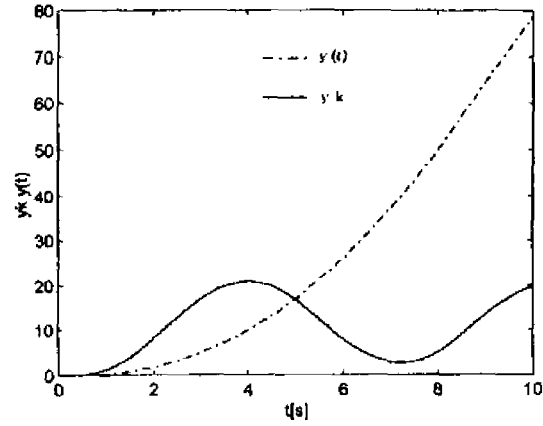


Fig.14 $y(t)$ and y_k

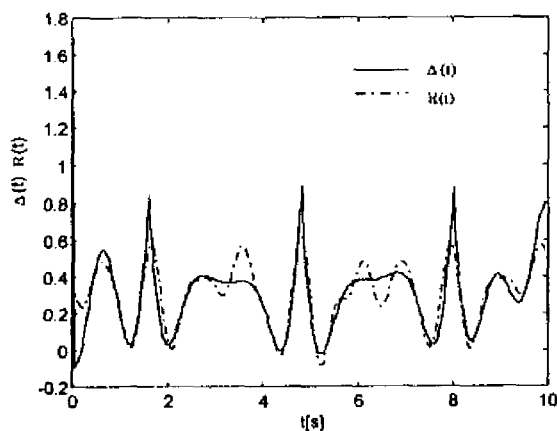


Fig.13 $\Delta(t)$ and $R(t)$

3.3 無効の場合

最後に、3.2と同じシステムで摂動モデルが誤っている場合を考える。具体的には、パラメータ N が不確定要素 $\Delta_0 = 0.3$ を含んでいる観測出力データ y_k に対し、パラメータ M に不確定要素が含まれていると考えた。すなわち、式(8)のもとに摂動モデルを作り $y(t)$ を求めた。

$$M = \frac{1}{\tau_L \tau_k} (1 + \Delta) = \frac{1}{25.2} (1 + \Delta) \quad (8)$$

したがって、この y_k に対しては摂動モデルは無効となることが予想される。この場合、アルゴリズム A に従い計算した結果を示す(Fig.14)。このように、システムに対して誤った摂動モデルを設定した場合、アルゴリズム A の③において、 $e(t)$ が零に収束せず、評価関数の値は $J=8041$ と非常に大きいものとなった。

よって、定理 2 の 1) を満足しないので、このモデルは無効である。

4. 結言

摂動モデルの評価法において、物理的意味づけの明確な手法の提案を試み、また、数値実験により、この手法の有効性を示した。この手法の利点の 1 つは、不確定要素を直接取り扱うことにより、モデルの不確定要素 Δ の L_2 誘導ノルムの大きさが算出できることにある。

参考文献

- 1) Geir Dullerud & Roy Smith, The experimental validation of robust control models for a heat experiment : A linear matrix inequality approach, The 34th Conf. Decision & Control, 3486/3491(1995)
- 2) 井前, 平山, 古館, 非ホロノミックシステムの軌道計画問題, 日本機械学会論文集(C編), 62-600, 3168/3174(1996)
- 3) 見城尚志, 永守重信, メカトロニクスのための DC サーボモータ, 44/46, 総合電子出版社, (1982)
- 4) 井前讓, 最適制御アルゴリズムを用いた H_∞ ノルム計算, シミュレーション, 15-3, 39/47(1996)