

強変分を用いた量子化最適制御問題の数値解法

**A Strong Variation Algorithm for Quantized  
Optimal Control Problems**

井前 讓\*, ○千田 健一\*\*

Joe Imae\*, ○Kenichi Chida\*\*

\*岩手大学工学部, \*\*岩手大学大学院

\*Faculty of Engineering, \*\*Iwate University

キーワード:最適制御(optimal control), 量子化操作量(quantized control),  
強変分(strong variation), チャタリング制御(chattering control),  
数値解法(computational method)

連絡先:〒020 盛岡市上田 4-3-5, 岩手大学工学部機械工学科  
井前 讓 Tel.019(621)6401, E-mail: jima@msv.cc.iwate-u.ac.jp

1. 緒言

与えられた離散値のみをとる場合, その操作量は量子化操作量と呼ばれる. 古くはリレー制御系におけるオンオフ操作量, 最近では, コンピュータ機器導入による信号の量子化(コンピュータ内部の有限桁計算, AD/DA 変換器の量子化)に起因する操作量などを例としてあげることができる. このような量子化操作量のもとでの最適制御問題を量子化最適制御問題<sup>1)~3)</sup>という. 数値解法分野において, 量子化最適制御問題は, 操作量拘束条件に凸性が保証されないことから一般的に取り扱いが極めて困難な問題として知られている.

理論解析分野において, 操作量の拘束条件に凸性が保証されない場合, いわゆる強変分が有効であることが指摘され理論的には大きな成果を得ている. この点から, 数値解法においても強変分の採用は自然なことと考えられるが, 数値解法の収束性を保証し, かつ数値計算に適した実用的な強変分をどの様に構成するかは困難な問題であり, 研究の多くはこのトレードオフに悩まされてきたといえる. 事実, 強変

分が初めて数値計算に取り入れられた Differential Dynamic Programming (DDP)<sup>4)</sup> においては, 強変分の構成方法は極めて簡潔であり数値計算に適していたが, DDP の収束性は証明されなかった. それに対し, Mayne & Polak<sup>5)</sup> は強変分アルゴリズムの提案およびその収束性の理論的証明を与えたが, しかし, そこで提案された強変分構成法は極めて複雑であり, 当時, 具体的計算例は示されなかった. のちに, Virk<sup>6)</sup> は Mayne & Polak の強変分アルゴリズムを時間遅れ系へと拡張し具体的計算例を示してはいるが, 強変分の構成時に使われるある種の切り換え操作に関し, その切り換え時間が無限小となる可能性が高く, 依然実用上の問題は残る. また, 独自の強変分アルゴリズムが井前ら<sup>7)</sup> により提案されている. 収束証明が与えられ数値計算例も豊富に示されているが, Mayne & Polak のアルゴリズムと同様に, 切替え時間の無限小問題が残されている.

本論文では, 量子化最適制御問題を取り扱い, 実用的強変分構成法に基づく新たな数値解法アルゴリズムを提案する. そ

の際、アルゴリズムの理論的収束証明に固執する限り実用的な強変分構成法の提案は困難との判断から、数値的収束証明にとどめる。すなわち、数多くの数値計算例を通してアルゴリズムの収束性を明らかにする。本論文の構成は以下の通りである。2章では、量子化最適制御問題の定式化を行う。その際、量子化最適制御問題を特別な場合として含む、より一般化した形で定式化する。3章では強変分アルゴリズムを提案する。4章では、量子化最適制御問題を含む種々の最適制御問題を取りあげ、アルゴリズムの実用性および収束性について数値的に検討する。5章では、コンテナ・クレーンの振れ止め制御を量子化最適制御問題として定式化しその最適制御について考察する。

## 2. 問題の定式化

制御対象が次のような場合の最適制御問題を考える。すなわち、状態方程式及び初期条件がそれぞれ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

で与えられ、最小にする評価関数  $J(u)$  が

$$J(u) = G(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.2)$$

で与えられるとき、最適操作量を求める問題を考える。ここに、制御区間を  $[t_0, t_1]$  とする。状態変数  $x(t)$  は  $[t_0, t_1] \mapsto R^n$  の絶対連続関数、操作量  $u(t)$  は  $[t_0, t_1] \mapsto U \in R^r$  の有界な可測関数とする。ここで、 $U$  はコンパクトな部分集合である。部分集合  $U$  に関しては凸性の条件が課されていない。すなわち、量子化操作量を特別な場合として含んでいる。

## 3. 強変分アルゴリズム

本論文で取り扱う最適制御問題においては、操作量拘束条件に対し凸性が保証されていない。そのため、弱変分に基づく数値解法は直接には適用できない。本章

では、独自の強変分の構成法に基づき、凸性の保証がない場合に対しても取り扱うことができる最適制御アルゴリズムを新たに提案する。

### 3.1 強変分

最適制御問題の数値解法の基本的な考え方は、ある操作量  $u(t)$  が与えられたとして、この  $u(t)$  を用いて計算される評価関数値  $J(u)$  に対し、より小さい評価関数値  $J(u_\alpha)$  を与える操作量  $u_\alpha(t)$  を見つけることである。すなわち

$$J(u) > J(u_\alpha) \quad (3.1)$$

を満たす  $u_\alpha(t)$  を求めることである。

さて、この  $u_\alpha(t)$  を見つける代表的な1つに次のような方法がある。いま、式(3.2)で与えられる関数  $H$  をハミルトン関数と呼ぶものとする。

$$H(t, x, p, u) = -L(t, x, u) + p^T(t) f(t, x, u) \quad (3.2)$$

ここに  $p(t)$  は随伴ベクトルと呼ばれ、次の微分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= - \left[ \frac{\partial \mathcal{H}(t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p(t) + \left[ \frac{\partial \mathcal{H}(t, x(t), u(t))}{\partial u} \right]^T \\ p(t_1) &= - \left[ \frac{\partial G(t_1, x(t_1))}{\partial x} \right]^T \end{aligned} \quad (3.3)$$

このとき、最適操作量はハミルトン関数  $H$  を最大にするという Pontryagin の最大原理を利用して、求めようとする  $u_\alpha(t)$  を次式で与える。

$$u_\alpha(t) = \alpha r(t) + (1 - \alpha) u(t) \quad (\alpha > 0) \quad (3.4)$$

ただし  $r(t)$  は式(3.5)を満足する関数であり、

$$H(t, x', r', p') = \max H(t, x', u', p') \quad (3.5)$$

$\alpha$  は  $J(u_\alpha)$  が最小になるように調整される。

ところで、この方法は  $u_\alpha(t)$  の構成のために  $r(t)$  と  $u(t)$  の凸結合を用いており、操作量の拘束条件に凸性の保証がない場合、その適用はきわめて困難となる。これに対し、強変分の考え方を利用すれば操作量の拘束条件に凸性を必要としないことはよ

く知られている。この点に着目し、数値計算に適した独自の強変分構成法を以下に示す。

[強変分構成法]

$I_\alpha$ を制御区間内の部分集合とし、 $u_\alpha(t)$ を次のように構成する。

$$u_\alpha(t) = r(t) ; \quad t \in I_\alpha \\ = u(t) ; \quad \text{それ以外の } t \quad (3.6)$$

ここで問題となるのは、どのように $I_\alpha$ の範囲を定めるかということである。 $I_\alpha$ の決定には、式(3.4)で与えられる $u_\alpha(t)$ (以後、記号の整理のため $\hat{u}(t)$ とおく)を利用する。初めに、 $\hat{u}(t)$ を用いて、式(2.1)から軌道 $\hat{x}(t)$ を求める。次に $u_\alpha(t)$ を用いて式(2.1)から得た軌道 $x(t)$ が軌道 $\hat{x}(t)$ に近づくように $I_\alpha$ を構成する。具体的には、まず、制御区間 $[t_0, t_1]$ を有限個に任意分割し、 $t_0 = t^0 < t^1 < \dots < t^m = t_1$ とする。いま、区間 $[t^j, t^{j+1}]$ において $u_\alpha(t), x(t)$ が求まっていると仮定する。ここに $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ 。  $x(t^j)$ を初期値として、区間 $t \in [t^j, t^{j+1}]$ 上で、 $u(t), r(t)$ を与えたときの式(2.1)の解をそれぞれ $x_u(t), x_r(t)$ とおく。このとき、区間 $t \in [t^j, t^{j+1}]$ における $u_\alpha$ は次のように決める。

すなわち、

$$A = |x_u(t^{j+1}) - \hat{x}(t^{j+1})| \\ B = |x_r(t^{j+1}) - \hat{x}(t^{j+1})|$$

とおくとき、 $u_\alpha(t)$ は、

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u(t); & \text{if } A < B \\ r(t); & \text{if } A \geq B \end{cases} \quad (3.7)$$

与えられる。この考え方を終端時刻まで続けることにより、 $u_\alpha(t)$ の構成が完了する。

### 3.2 アルゴリズム

3.1節の強変分構成法を基にしたアルゴリズムを以下に示す。

[強変分アルゴリズム]

〈ステップ 1〉 任意の許容操作量 $u^0(t)$ を定める。 $i=0$ とする。

〈ステップ 2〉 式(2.1)から、 $x'(t)$ を求める。

〈ステップ 3〉 式(2.2)から $J(u')$ を求める。

〈ステップ 4〉 式(3.3)から $u'(t), x'(t)$ を用いて $p'(t)$ を求める。

〈ステップ 5〉 式(3.5)を満たす操作量 $r'(t)$ を求める。

〈ステップ 6〉  $\alpha=1$ とする。

〈ステップ 7〉 式(3.4)から求められる $\hat{u}^{i+1}(t)$ を用いて、式(2.1)から $\hat{x}^{i+1}$ を求める。

〈ステップ 8〉 3.1節で与えた方法により $\hat{u}^{i+1}(t), \hat{x}^{i+1}(t)$ を用いて $u_\alpha^{i+1}(t)$ を構成し、式(2.1)より $x^{i+1}(t)$ を求める。

〈ステップ 9〉 式(2.2)から $J(u_\alpha^{i+1})$ を求める。

〈ステップ 10〉 もし $J(u_\alpha^{i+1}) < J(u^i)$ ならば $\alpha = 0.6\alpha$ として、ステップ7へ。それ以外はステップ11へ。

〈ステップ 11〉 評価関数値が安定したら終了。それ以外は $u^{i+1} = u_\alpha^{i+1}$ ,  $i = i+1$ とおき、ステップ4へ。

## 4. 数値計算例

今回提案の強変分アルゴリズムは理論的な収束証明は与えられていない。したがって、本章では、最適制御問題の数値解法分野でよく取りあげられるいくつかの例題を通して、本アルゴリズムの数値的な収束性を検証する。例題としては、操作量拘束条件のある場合とない場合を取りあげ、さらに拘束のある場合においては、凸性が保証されている場合と保証されていない場合についても考える。数値計算において、微分・積分計算は4次のルンゲ・クッタ・ギル法、シンプソン法をそれぞれ利用した。評価関数値の収束判定条件として

$$|(J(u^{i+1}) - J(u^i)) / J(u^i)| \leq 5.0 \times 10^{-5} \quad (4.1)$$

を採用した。また、強変分構成のために用

いた制御区間  $[t_0, t_1]$  の分割数は、プログラムの簡単化のため、微分・積分計算の分割数と同じとした。

[例題1]

次式で与えられる Rayleigh 問題を考える<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + (1.4 - 0.14x_2^2(t))x_2(t) + 4u(t) \\ x_1(0) &= x_2(0) = -5 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$J(u) = \int_0^{2.5} (x_1^2(t) + u^2(t)) dt \quad (4.3)$$

初めに、操作量拘束条件が与えられていない場合を取りあげる。拘束条件がない場合は操作量の凸性が自然と保証されるため、弱変分を用いた手法が適用可能である。提案の強変分アルゴリズムは量子化操作量に対して開発されたものであるが、この場合にも適用可能であることを示す。最初に与える操作量として  $u^0(t) = -0.5$  を選び、制御区間  $[0, 2.5]$  のきざみ数は 500 で計算した。その結果、評価関数値は 97.74 から 29.29 へと15回の繰り返して収束した。評価関数の変化を Fig.4.1 に、最適操作量、最適状態量についてはそれぞれ Fig.4.2, Fig.4.3 に示す。興味深いのは、得られた最適操作量において、ある種のチャタリング現象があらわれていることである。なお、この現象は、収束判定条件の値を厳しくすることで回避することができる。

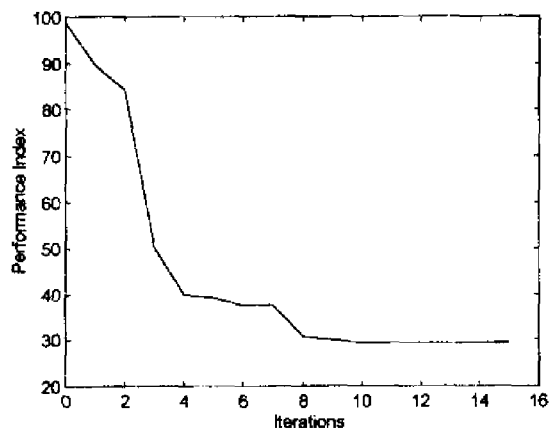


Fig.4.1 評価関数値(例題 1)

[例題2]

状態方程式、初期条件、評価関数は例題1と同じであるが、操作量拘束条件として  $|u| \leq 1$  が与えられている場合を考える。すなわち、凸性が保証される拘束条件の場合である。この場合、本アルゴリズムが有効であることを示す。最初に与える操作量として例題1と同じものを選び、制御区間のきざみ数を100とした。計算結果は、4回の繰り返して評価関数値は 98.74 から 42.81 に収束した(Fig.4.4)。例題1と異なり、強変分は一度もあらわれなかった。最適操作量と最適状態量をそれぞれ Fig.4.5 と Fig.4.6 に示す。

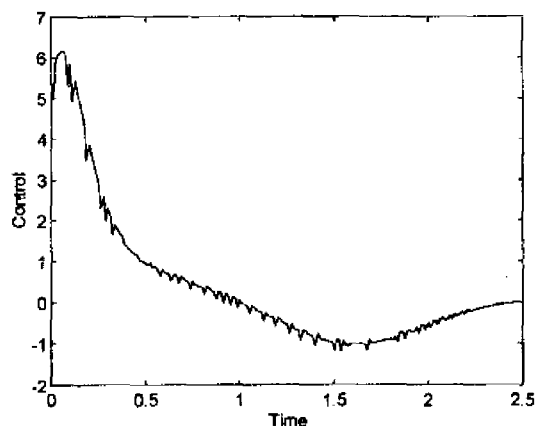


Fig.4.2 最適操作量(例題 1)

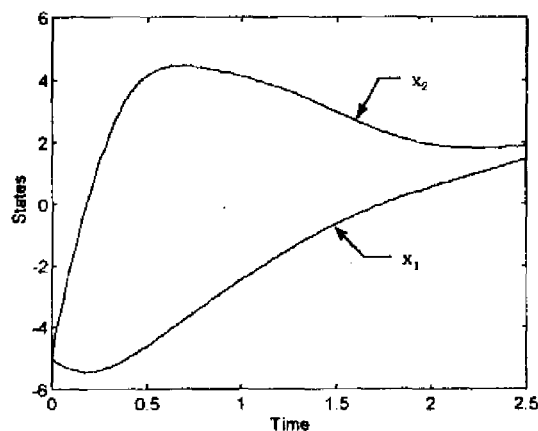


Fig.4.3 最適状態量(例題 1)

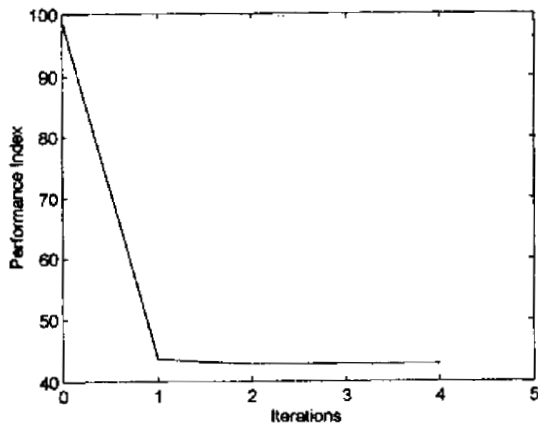


Fig.4.4 評価関数値(例題 2)

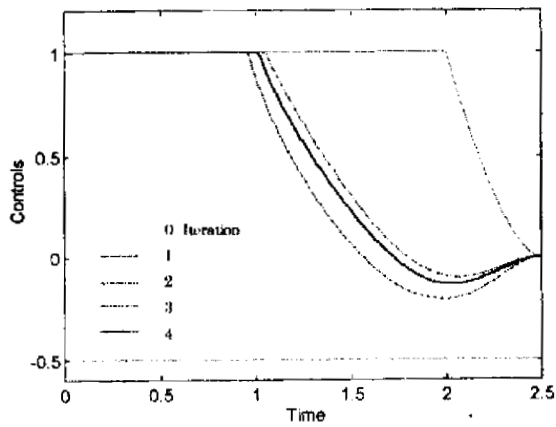


Fig.4.5 最適操作量(例題 2)

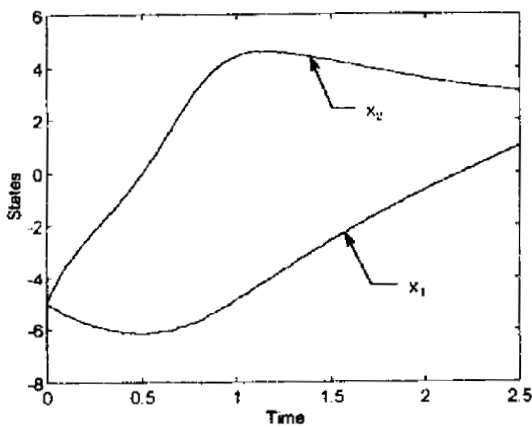


Fig.4.6 最適状態量(例題 2)

[例題3]

4次元システムの Mayer 形最適制御問題を考える<sup>4)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.5x_1(t) + 5x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -5x_1(t) - 0.5x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -0.6x_3(t) + 10x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -10x_3(t) - 0.6x_4(t) + u(t) \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 10 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$$J(u) = \sum_{i=1}^4 x_i^2(4.2) \quad (4.5)$$

ここでは、操作量拘束条件として離散値集合  $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$  を考える. したがって量子化操作量の問題となる. この種の問題は、凸性が保証されておらず、弱変分を用いる手法で解こうとすると取り扱いが極めて難しい. 本アルゴリズムを適用した結果は以下のとおりである. 制御区間  $[0, 4.2]$  を 400 等分し、最初に与える操作量として  $u^0(t) = 0$  を選んだ. 評価関数値は、41.4 から 1.005 へと6回の繰り返りで収束した. このとき得られた最適操作量はバンバン解となった. 拘束条件  $|u| \leq 1$  の下での最適解と同様な結果が得られた. 評価関数の変化、最適操作量、最適状態量については Fig.4.7, Fig.4.8, Fig.4.9 に示す.

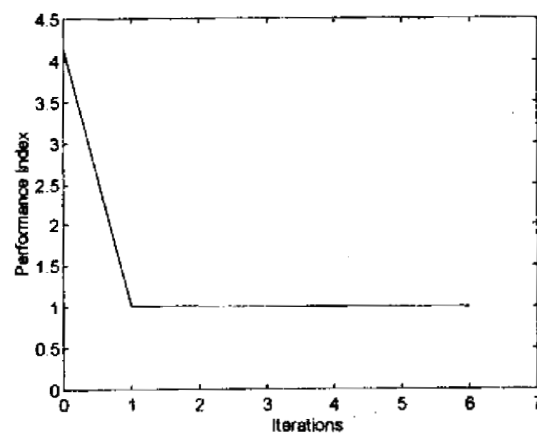


Fig.4.7 評価関数値(例題 3)

[例題4]

3次元システムのBolza形最適制御問題を考える<sup>2)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.2x_2(t) - 0.2x_3 + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -0.7x_3(t) + u(t) \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$J(u) = \sum_{i=1}^3 x_i^2(4) + \int_0^4 u^2(t) dt \quad (4.7)$$

操作量拘束条件として操作量の値域が  $\{0, \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 2.0\}$  の離散値で与えられる量子化最適制御問題を考える. 最初に与

える操作量は,  $u^0(t) = 1.0$  を選び, 制御区間  $[0, 4]$  を 200 等分して, 計算を実行した. 評価関数値は 83.49 から 1.324 へ収束し, 繰り返し数は 32 回であった (Fig. 4.10). 最適操作量, 最適状態量についてはそれぞれ Fig. 4.11, Fig. 4.12 に示す. 得られた最適操作量を見ると, チャタリングが起きているのがわかる. 参考のため, この例題をD DPの強変分構成法を用いた方法で解いたが, きざみ数が 10000 でも評価関数値は 2.058 までしか下がらなかった. また, 井前らの強変分アルゴリズムでは最適解を得るためにきざみ数 8000 を必要とした<sup>8)</sup>.

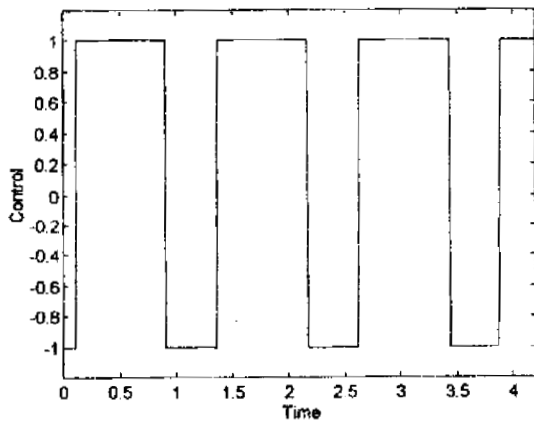


Fig. 4.8 最適操作量(例題 3)

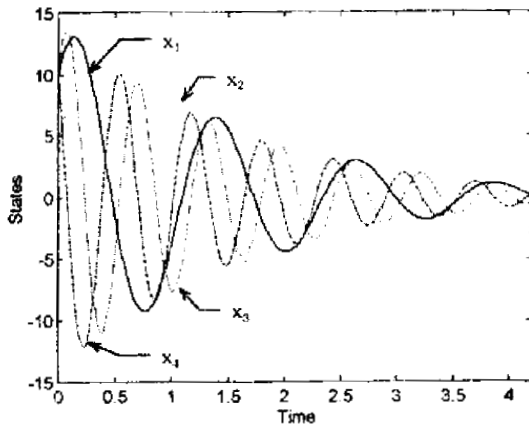


Fig. 4.9 最適状態量(例題 3)

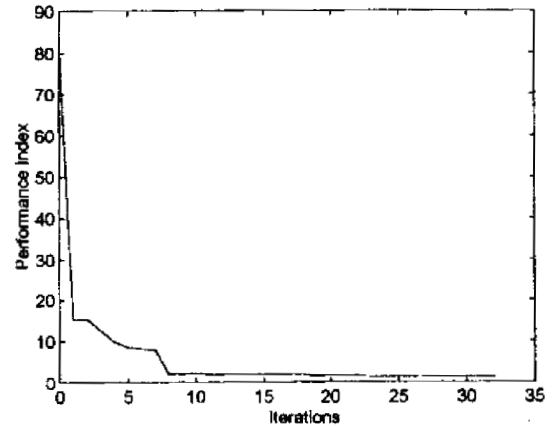


Fig. 4.10 評価関数値(例題 4)

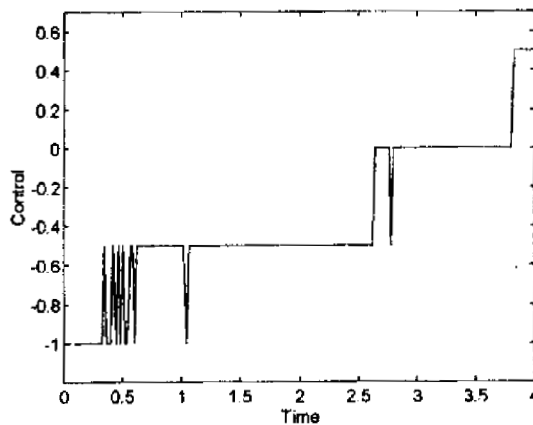


Fig. 4.11 最適操作量(例題 4)

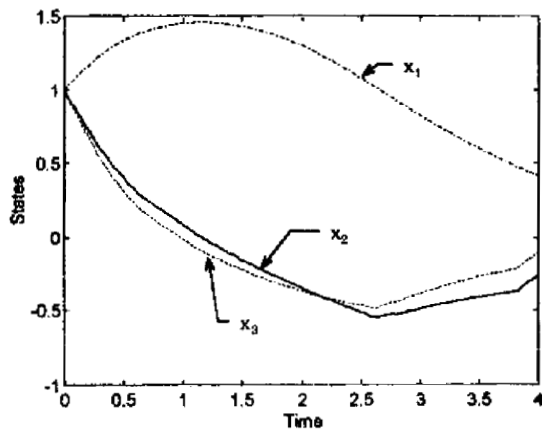


Fig.4.12 最適状態量(例題 4)

ところで、状態方程式、初期条件、操作量拘束条件は同じとし、評価関数(4.7)の終端状態に重み  $r_0$  が加わった場合を考えた。すなわち、

$$J(u) = r_0 \times \sum_{i=1}^3 x_i^2(4) + \int_0^4 u^2(t) dt \quad (4.8)$$

である。これは、終端状態をできる限り原点に近づけることを意味する。 $r_0$  は外点ペナルティパラメータと呼ばれ、 $r_0 = 10$  として計算した。最適制御問題の数値解法においてペナルティ法を併用することがしばしば生じる。このような場合にも本アルゴリズムが有効であることを示す。きざみ数は同じく 200 で、最初に入力する操作量は  $u^0(t) = -0.5$  を選んだ。計算の結果は、38 回の繰り返しで評価関数値は 14.26 から 1.78 へ収束した(Fig.4.13)。この問題に対してもDDPの強変分を用いて解いたが、きざみ数を 10000 としても評価関数値は 22.30 より低下しなかった。また、井前らのアルゴリズムを適用しても成功しなかった。最適状態量を Fig.4.14 に示す。終端状態が Fig.4.12 と比べて原点に近づいていることがわかる。

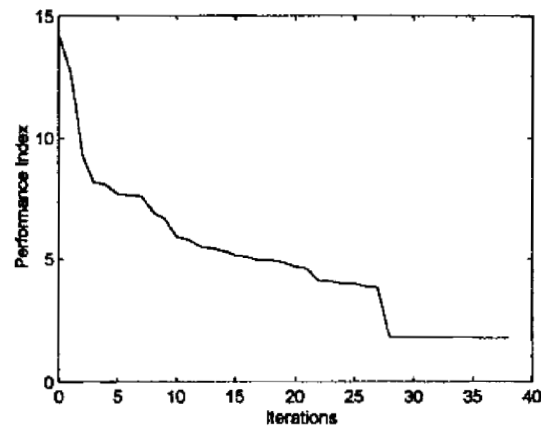


Fig.4.13 評価関数値(例題 4.2)

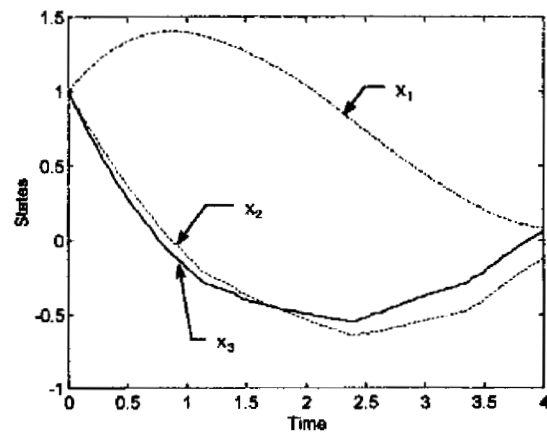


Fig.4.14 最適状態量(例題 4.2)

## 5. コンテナ・クレーン制御

本章では、現実的な最適制御問題として、コンテナ・クレーンの振れ止め制御<sup>9)</sup>について考える。最適制御の数値解法分野では比較的高次元なシステムの例として取りあげられる制御問題である。初めに、コンテナ・クレーンの全体図を Fig.5.1 に示す。

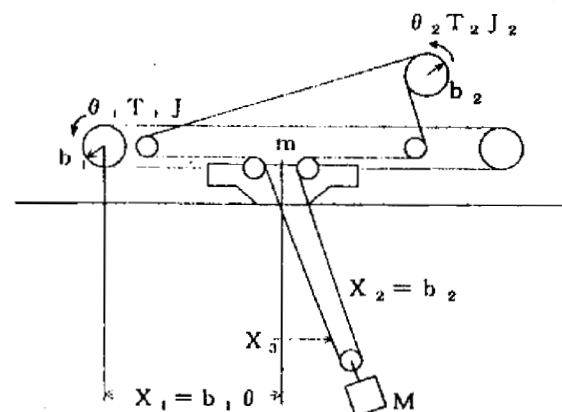


Fig.5.1 コンテナ・クレーンの全体図

$x_1, x_4$  (ただし  $\dot{x}_1 = 9x_4$ ) はトロリの位置と速度,  $x_2, x_5$  (ただし  $\dot{x}_2 = 9x_5$ ) はつり上げロープの長さおよび巻き上げ速度,  $x_3, x_6$  (ただし  $\dot{x}_3 = 9x_6$ ) は荷の振れ角と角速度,  $T_1, T_2$  はトロリ横行用及び荷の巻き上げ用の電動機のトルクを表す.  $J_1, \theta_1, b_1, J_2, \theta_2, b_2$  はそれぞれ, トロリ横行用と巻き上げ用ドラムの慣性モーメント, 回転角, 半径を表し,  $m, M$  はトロリと荷の質量を表す.  $g$  を重力加速度とする. また, 横行及び巻き上げの速度, 電動機のトルクにはそれぞれ制約があるで  $x_4, x_5, T_1, T_2$  を

$$\begin{aligned} |x_4| \leq x_4 \max \quad |x_5| \leq x_5 \max \\ |T_1| \leq T_1 \max \quad |T_2| \leq T_2 \max \end{aligned} \quad (5.1)$$

を満足すると仮定する. このとき, コンテナ・クレーンに対し次のような関係式を得る. ただし, トルク  $T_1, T_2$  を

$$u_1 = \frac{b_1 T_1}{J_1 + m b_1^2}, \quad u_2 = \frac{b_2 (T_2 + M b_2 g)}{J_2 + M b_2^2} \quad (5.2)$$

と置き換え, 操作量を  $u = (u_1, u_2)^T$  で与えるとする.

状態方程式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 9x_4(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 9x_5(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 9x_6(t) \\ \dot{x}_4(t) &= 9(u_1(t) + 17.2656x_3(t)) \\ \dot{x}_5(t) &= 9u_2(t) \\ \dot{x}_6(t) &= -\frac{9}{x_2(t)}(u_1(t) + 27.0756x_3(t) + 2x_5(t)x_6(t)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

初期条件:

$$x(0) = [0, 22, 0, 0, -1, 0]^T \quad (5.4)$$

終端条件:

$$x(1) = [10, 14, 0, 2.5, 0, 0]^T \quad (5.5)$$

操作量, 状態量拘束条件:

$$\begin{aligned} |u_1(t)| &\leq 2.83374, \forall t \in [0, 1] \\ -0.80865 &\leq u_2(t) \leq 0.71265, \forall t \in [0, 1] \\ |x_4(t)| &\leq 2.5, \forall t \in [0, 1] \\ |x_5(t)| &\leq 1.0, \forall t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (5.6)$$

ところで, 本論文では消費エネルギー節約の観点から, 最小にすべき評価関数としては

$$J = \int_0^1 \{x_3^2(t) + x_6^2(t) + 10[u_1^2(t) + u_2^2(t)]\} dt \quad (5.7)$$

を採用した. すなわち, できる限り少ない入力エネルギーのもと, 制御区間  $[0, 1]$  において荷の振れ  $x_3, x_6$  を小さくする最適操作量を求める問題を意味する. さらに, 操作量に関しては, 現実的な観点から量子化操作量を採用した. 実システムの制御においては, 一般にデジタルコンピュータが重要な役割を果たす. その場合, DAコンバータなどにより, 実システムへの入力信号は量子化されたものとなる. したがって, 本問題を量子化操作量のもとでの制御問題としてとらえ, 操作量拘束条件として

$$\begin{aligned} u_1(t) &\in \{-2.80, -2.52, -2.24, \dots, 2.52, 2.80\} \\ u_2(t) &\in \{-0.70, -0.63, -0.56, \dots, 0.63, 0.70\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

の離散値の集合を考えた.

以上の定式化のもと, 最初に与える操作量を  $u^0(t) = [0, 0]^T$ , きざみ数を 500, 収束判定条件を

$$|(J(u^{i+1}) - J(u^i)) / J(u^i)| \leq 5.0 \times 10^{-7} \quad (5.9)$$

として計算を実行した. ところで, この計算においては次のような工夫をしている. すなわち, 本アルゴリズムは, 状態量拘束条件に対し直接的な取り扱いができないため, 終端条件には外点ペナルティ法を, 状態量拘束条件には内点ペナルティ法を採用した. したがって, 実際には次のような拡張評価関数  $\tilde{J}$  のもと計算を行っている.

$$\begin{aligned} \tilde{J} = r_1 \{ &(x_1(t) - 10)^2 + (x_2(t) - 14)^2 + x_3^2(t) \\ &+ (x_4(t) - 2.5)^2 + x_5^2(t) + x_6^2(t)\} \\ &+ \int_0^1 \{x_3^2(t) + x_6^2(t) + 10[u_1^2(t) + u_2^2(t)] \\ &+ r_2 \left( \frac{1}{2.5^2 - x_4^2(t)} + \frac{1}{1^2 - x_5^2(t)} \right)\} dt \end{aligned} \quad (5.10)$$



ここに、 $r_1$ は外点ペナルティパラメータ、 $r_2$ は内点ペナルティパラメータである。パラメータの選定には試行錯誤により行い、 $r_1$ を0.1から1.0へ、 $r_2$ を1.0から0.01へそれぞれ変化させた。この場合、 $r_1=0.1$ において $r_2$ を1.0から0.01へと変化させたのち、 $r_1=0.4$ においても $r_2$ を同様に变化させた。この手順を $r_1=1.0$ になるまで繰り返した。その結果、430回の繰り返しのにより、評価関数値は511.243から5.028へ収束した(Fig.5.2)。このとき得られたの最適操作量をFig.5.3に示す。

なお、この問題に対しては量子化最適制御問題としての最適解は報告されていない。参考のため、操作量が連続値をとる場合の計算を実行した。378回の繰り返しのにより評価関数値が4.425に収束した。量子化操作量のもとでの最適評価関数値に近い値を示しており、最適な量子化操作量が得られていると判断できる。この場合での最適操作量をFig.5.4に示す。また、最適状態量に関しては、量子化及び連続な操作量の場合を共にFig.5.5にそれぞれ示す。

ところで、Fig.5.3とFig.5.4を比較するとき、連続値をとる最適操作量の場合は微妙な操作量変化が必要となるのに対し、量子化操作量の場合は量子化された数値だけに限定されており、比較的簡単な制御方式になっている点に注目されたい。なお、チャタリング現象をどう対処するかは今後の課題とする。

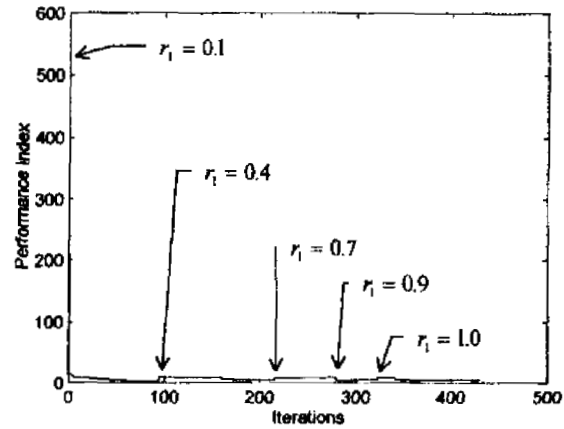


Fig.5.2 評価関数の変化

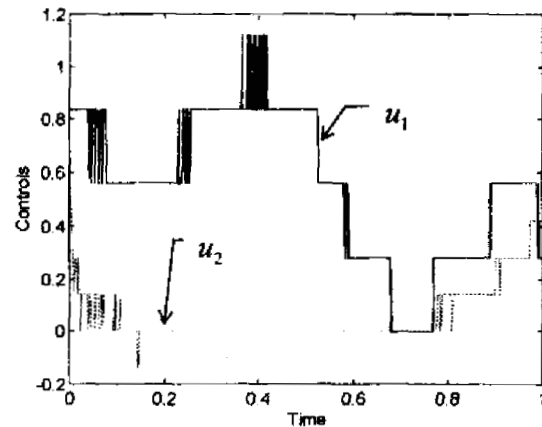


Fig.5.3 最適操作量(量子化操作量)

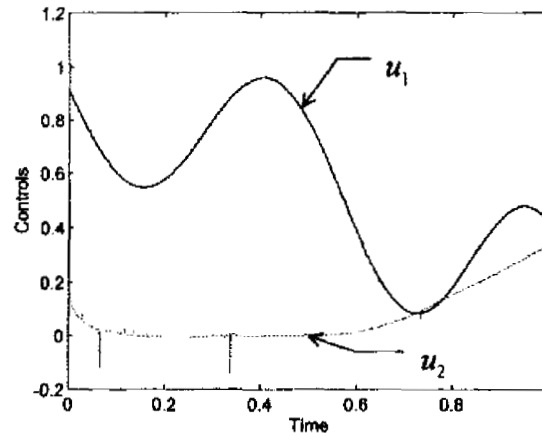
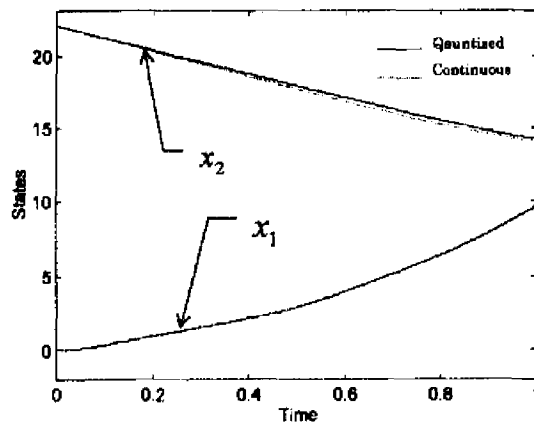
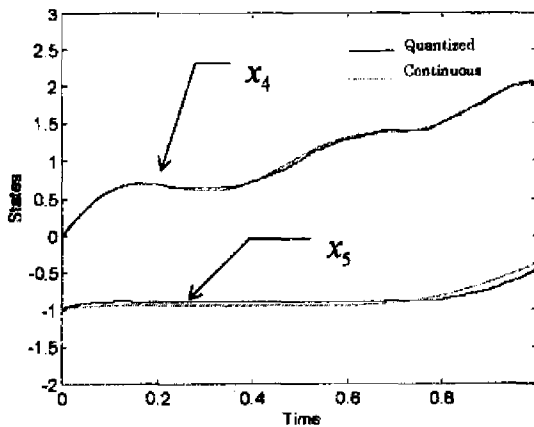


Fig.5.4 最適操作量(連続操作量)

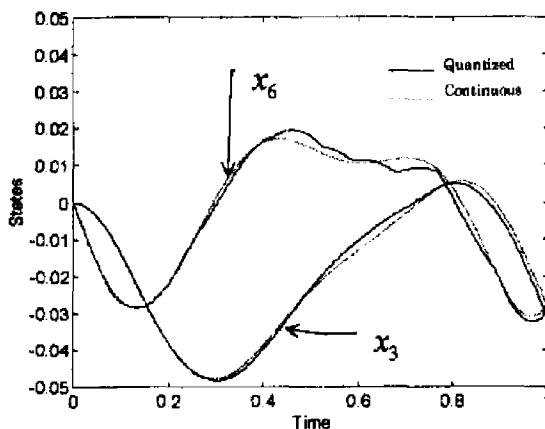
とによってその有効性を確認した。



(a)  $x_1, x_2$



(b)  $x_4, x_5$



(c)  $x_3, x_6$

Fig.5.5 最適状態量

## 6. 結言

強変分を用いるアルゴリズムにおいて、数値計算に適した独自の強変分構成法を考案し、それに基づくアルゴリズムを新たに提案した。本アルゴリズムを量子化最適制御問題に適用し、具体的な数値計算を行うこ

## 参考文献

- 1) M.Sznaier and M.J.Damborg, Control of Constrained Discrete Time Linear Systems Using Quantized Controls, Automatica, 25-4,623/628 (1989)
- 2) R.M.Havira and J.B.Lewis, Computation of Quantized Controls Using Differential Dynamic Programming, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-17-2, 191/196 (1972)
- 3) 林, 宗像, 金子, 離散時間形量子的最適制御システムへの一制御手法の考察, システム制御, 21-5, 285/294 (1977)
- 4) D.H.Jacobson and D.Q.Mayne, Differential Dynamic Programming, Academic Elsevier, New York (1970)
- 5) D.Q.Mayne and E.Polak, First-Order Strong Variation Algorithms for Optimal Control, J.O.T.A., 16, 277/301 (1975)
- 6) G.S.Virk, Digital Implementation of Strong Variational Algorithms, Optimal Control Applications & Methods, 6,211/223 (1985)
- 7) 井前, 箱守, 操作量拘束を含む最適制御問題に対する強変分を用いた数値解法アルゴリズム, sice 論文集, 19-11, 851/857 (1983)
- 8) J.Imae, A Chattering Control Based Algorithm for Nonlinear Optimal Control Problems with Bounded Controls restricted to Nonconvex Sets, Int.J.Control, (掲載予)
- 9) Y.Sakawa & Y.Shindo, Optimal Control of Container Cranes, Automatica, 18-3, 257/266 (1982)