

手動制御による2つの振り子の同時振り上げ

Swinging-Up of Two Pendulums by Manual Control

○伊藤 祐規* , 猪岡 光**

○Yuuki Ito*, Hikaru Inooka**

*青森職業能力開発短期大学校, **東北大学大学院情報科学研究科

*Aomori Polytechnic College, **Tohoku University

キーワード：振り子 (pendulum), 振り上げ運動 (swinging-up motion), エネルギー式 (energy equation)
実時間シミュレーター (real time simulator)

連絡先：〒037 五所川原市飯詰 青森職業能力開発短期大学校 機械システム系 伊藤祐規
Tel.: (0173) 37-3201, Fax.: (0173) 37-3203, E-mail: itou@cc.aomori-pc.ac.jp

1. はじめに

トルクに制限がある場合の振り子の振り上げ運動について理論的および実験的に考察^{(1), (2)}されている。そこでは、エネルギー線図を用いることにより、振り子を速度零で倒立点に到達させるトルクの制御方式が示されている。

本研究では、パラメータの異なる2つの振り子に同一トルクを作用させ、2つの振り子を同時に振り上げる制御方式を調べる手がかりとして試みたシミュレーションについて述べる。シミュレーションでは、手動制御を使い加えるトルクは、絶対値一定で符号のみ異なるトルクと零の3通りとする。はじめ、鉛直線上に静止している振り子にトルクを作用させ振幅が単調に増加するようにする。このとき短い振り子（固有円振動数の大きな振り子）が先に頂点を越えて一方的に回転する。この回転を防ぎ両方の振り子をほぼ同時に倒立させるために、エネルギー線図から導かれる制動トルクを使用する。エネルギー線図を用いると一定値のトルクを加えた場合、振り子を頂点に静止可能か、またはトルク不足で静止不可能かを判定で

きる。また振り子には、静かに頂点に振り上がって行く振り子に回転運動を抑制するトルクを加えると、振り子は非常に長い時間をかけて頂点に到達する性質がある。すなわち頂点近くに長く留まる。もし、2つの振り子に加えたトルクが、ひとつの振り子に対して頂点を越えて回転することを防ぐように働き、他方の振り子には頂点近くに長く留まるように働けば、2つの振り子がほぼ同時に頂点に到達する、すなわち2つの振り子がほぼ同時に振り上がる。

2. モデルと基礎式

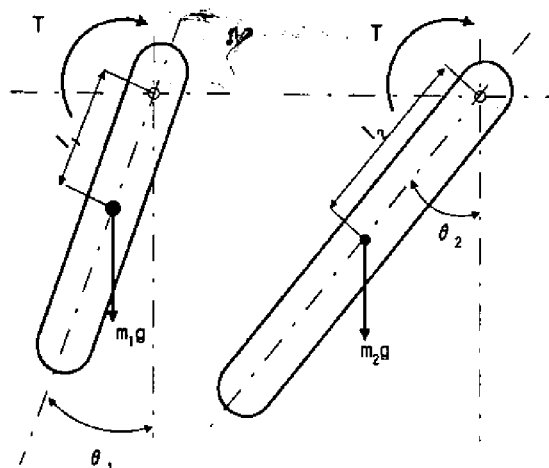


Fig. 1 Model of Pendulum

Fig. 1 に示す2つの振り子のモデルにおいてそれに対応する運動方程式は次式となる。

$$I_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + C_1 \frac{d\theta_1}{dt} + m_1 g l_1 \sin \theta_1 = T \quad (1)$$

$$I_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + C_2 \frac{d\theta_2}{dt} + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = T \quad (2)$$

ここで

θ_1, θ_2 : 振り子の真下からの振り上げ角度
rad

t : 時間 s

m_1, m_2 : 振り子の質量 kg

g : 重力加速度 $m \cdot s^{-2}$

l_1, l_2 : 振り子の重心と回転軸中心間距離 m

I_1, I_2 : 振り子の慣性モーメント $kg \cdot m^2$

C_1, C_2 : 粘性減衰係数 $N \cdot m \cdot s$

T : 振り子の回転軸に加わる加振トルク $N \cdot m$

式 (1), (2) を無次元化して次式を得る。

$$\frac{d^2\theta_1(\tau)}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{d\theta_1(\tau)}{d\tau} + \sin \theta_1(\tau) = \alpha \quad (3)$$

$$\frac{d^2\theta_2(\tau)}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{\gamma}{\beta} \frac{d\theta_2(\tau)}{d\tau} + \frac{\kappa\lambda}{\beta} \sin \theta_2(\tau) = \frac{1}{\beta} \alpha \quad (4)$$

ただし

$$\omega^2 = \frac{m_1 g l_1}{I_1}, \tau = \omega t, 2\zeta = \frac{C_1}{\omega I_1}, \frac{T}{\omega^2 I_1} = \alpha$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \beta, \frac{m_2}{m_1} = \kappa, \frac{l_2}{l_1} = \lambda, \frac{C_2}{C_1} = \gamma$$

ここで

τ : 無次元時間 ω : 固有円振動数

ζ : 粘性減衰比 α : 無次元加振トルク

振り子のエネルギーは運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーである。その和が全エネルギーとなる。無次元化された第一、第二振り子の全エネルギー E_1, E_2 は

$$E_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{d\theta_1(\tau)}{d\tau} \right]^2 + [1 - \cos \theta_1(\tau)] \quad (5)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \beta \left[\frac{d\theta_2(\tau)}{d\tau} \right]^2 + \kappa\lambda [1 - \cos \theta_2(\tau)] \quad (6)$$

と表される。それぞれ、右辺の第1項は、振り子の運動エネルギーに、右辺の第2項はポテンシャルエネルギーに対応している。横軸を角度、縦軸を無次元エネルギーとして E_1, E_2 をグラフに示したものをエネルギー線図⁽¹⁾と呼ぶ。

また、振り子が微小角 $\Delta \theta$ 動く間に得るエネルギーはトルクが振り子にした仕事に等しい。粘性減衰比 ζ を無視しすると粘性減衰力によって散逸するエネルギーを考えなくても良くなる。加えるトルクを絶対値一定としたからエネルギー線図上での全エネルギーは傾き一定の直線で示される。

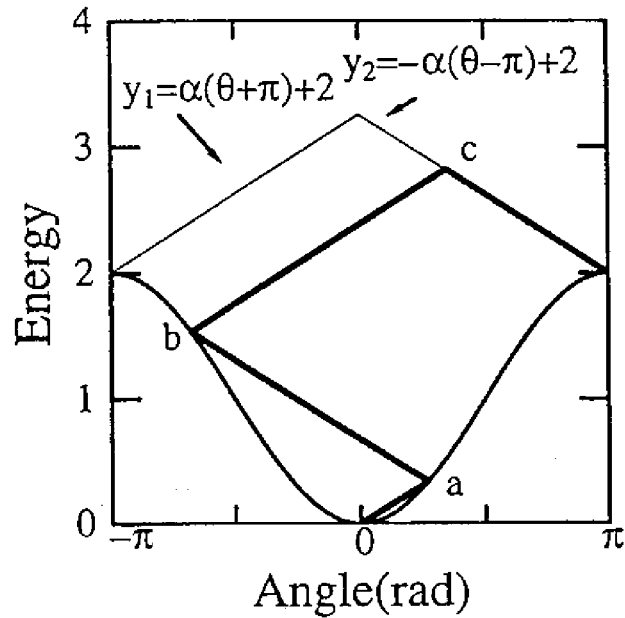


Fig. 2 Energy diagram

fig.2 に第一振り子をトルク α と $-\alpha$ を切り換えて振り上げたときのエネルギー変化の様子をエネルギー線図に示す。0 から a までは α 、a から b までは $-\alpha$ 、b から c までは α 、c から頂点までは $-\alpha$ のトルクを作用させている。a、b 点はポテンシャル・エネルギー曲線上にあるから振り子は停止してからもどって行くことを示し、c 点はトルクが切り換わっても引き続き同じ向きに運動することを示す。直線 y_1 は点 $(-\pi, 2)$ から傾

き α で引いた線で、トルク α を作用させて $-\pi$ にもって行ける角度とエネルギーの関係を表している。直線 y_1 より上にある領域は、トルク α を作用させても振り子が頂点 ($-\pi$) を越えて回転する。直線 y_2 についても同様である。

$$y_1 = \alpha (\theta_1 + \pi) + 2 \quad (7)$$

$$y_2 = -\alpha (\theta_1 - \pi) + 2 \quad (8)$$

従って直線 y_1 、 y_2 は絶対値の大きさ α のトルクで加振するとき、振り子が頂点を越えて回転を始めるエネルギー境界線を示し、全エネルギーがこの線に達したときトルクを切り換える。

第二の振り子について式 (7), (8) に対応する境界線は、

$$y_1 = \alpha (\theta_2 + \pi) + 2 \kappa \lambda \quad (9)$$

$$y_2 = -\alpha (\theta_2 - \pi) + 2 \kappa \lambda \quad (10)$$

となる。

3. 手動制御装置

使用したリアルタイムシミュレータについて説明する。オペレーターが、パルスエンコーダに付いているレバーを動かすとその移動量に比例した無次元トルクがパーソナルコンピュータ (PC) 内で発生する。ここでは、振り上げトルクは絶対値一定で符号のみ異なるものと、零の3種類のみとしたから、PC内で発生したトルクをこの3種類に分ける。PCは、(3), (4) 式を実時間で解きその結果をCRTにグラフィック表示する。オペレーターはCRTを見て、振り子の振幅が単調に増加して振り子が振り上がるようにレバー操作を繰り返す。

振り子が振り上がってくると全エネルギーはエネルギー境界線 y_1 または y_2 にとどく。エネルギー境界線にとどいた後は、PCが判断して制動トルクを作用させる。従って全エネルギーが境界線上を動いている間は、オペレータの入力は無視される。オペレータの入力した加振トルクは二つの

振り子の全エネルギーがともに境界線の下にある範囲でのみ有効となる。

加えるトルクの絶対値の大きさは数回の入力で短い振り子が振り上がる程度のものとし、また振りの速さは、オペレータがディスプレイをみて十分ついてゆける範囲となるように振り子のパラメータを選ぶ。

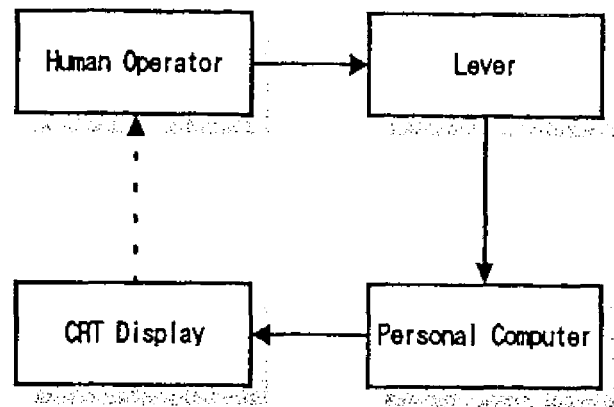


Fig. 3 Real-time simulator

シミュレーションでは下記のパラメータを用いた。

parameter	value
ω	3.031
β	2.344
γ	1.07
κ	1.50
λ	1.25

Table 1: Physical parameter of model

また、振り子運動の初期条件は、全てゼロとしトルクは

$$\alpha = 0.4 \quad (11)$$

とした。さらに振り子が静かに頂点に到達したと認める範囲を以下のようにした。

$$|\theta(\tau) - \pi| \leq 0.070 \text{ rad} \quad (12)$$

または

$$|\theta(\tau) + \pi| \leq 0.070 \text{ rad} \quad (13)$$

$$|\dot{\theta}(\tau)| \leq 0.052 \text{ rad/sec} \quad (14)$$

4. シミュレーション結果

はじめに、頂点から(14)式で示される初速度

$$\dot{\theta}(\tau) = 0.052 \text{ rad/sec} \quad (15)$$

で二つの振り子が振り降りてくる様子を Fig. 4 に示し、Fig. 5 に同じ条件で振り降りてくる振り子にエネルギー式から判断した制動トルクが作用したときの様子を示す。

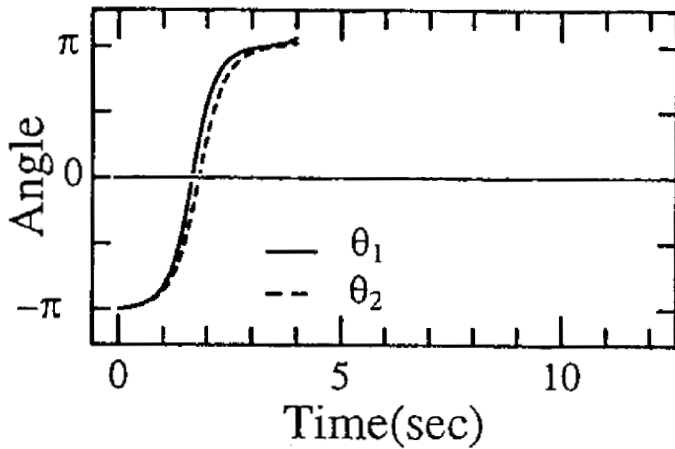


Fig. 4 Free oscillation

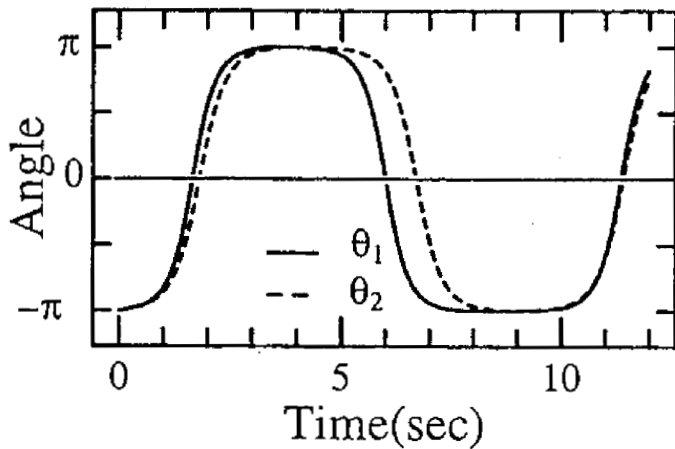


Fig. 5 Free oscillation with torque $-\alpha$

Fig. 4 では第一振り子が 3.32 秒、第二振り子が 3.63 秒で頂点に到達し頂点を越えて回転している。Fig. 5 では第一振り子が頂点に到達する直前(3.31 ~ 3.34 秒)に制動トルク $-\alpha$ が働き頂点越えの回転を防ぎまた二つの振り子とも頂点付近に長く留まることを示している。頂点から戻ってきて再び逆方向から頂点に近づくときはさらに頂点付近に長く留まっている。

次に逆位相で二つの振り子がほぼ同時に振り上がる例を示す。

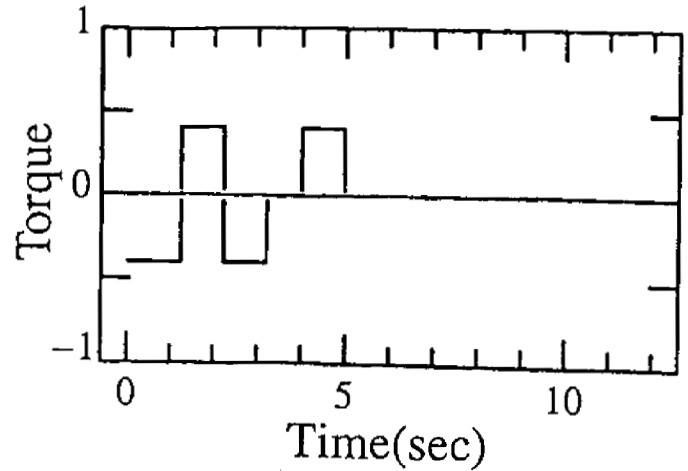


Fig. 6 Operator's torque input

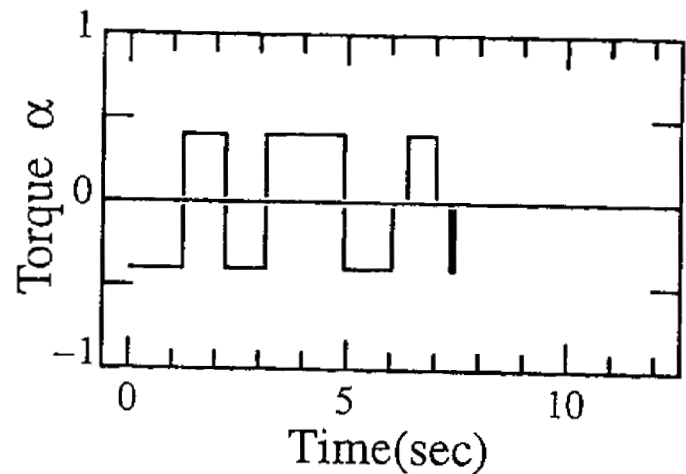


Fig. 7 Actual torque input

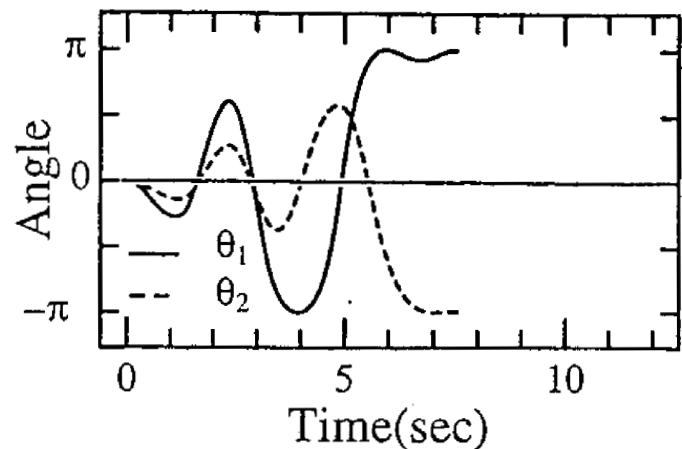


Fig. 8 Simulation (1)

オペレータが加えた加振トルクを Fig. 6 に示す。全エネルギーを計算しそれが境界線に達したとき、オペレータが加えた加振トルクに換わり制動トルクが働くため実際にモデル作用した加振トルクは Fig. 7 となる。3 秒過ぎに第一振り子がエネルギー境界線 y_1 に達し制動トルクが作用し始める。オペレータは 5 秒の直前で加振をやめている。その後の加振トルクは境界線の判断から PC が判断し

て加えた制動トルクである。そして、7.5秒直前に働いた微小時間の制動トルクが第一振り子を π 付近に第二振り子を $-\pi$ 付近に長く引き留めるため二つの振り子が逆位相でほぼ同時に静かに振り上がる。

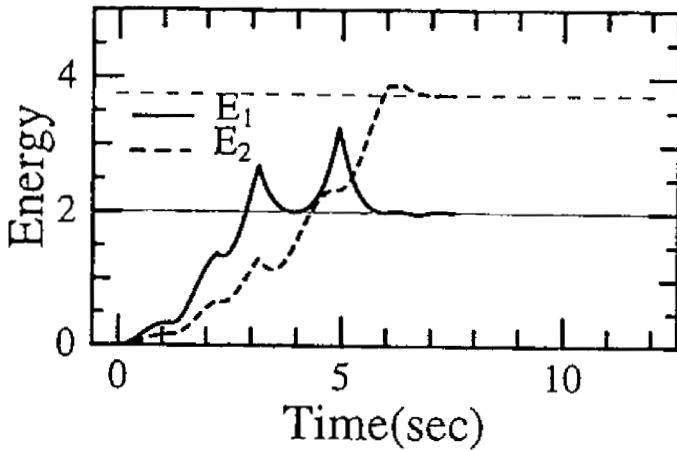


Fig. 9 Energy of pendulum

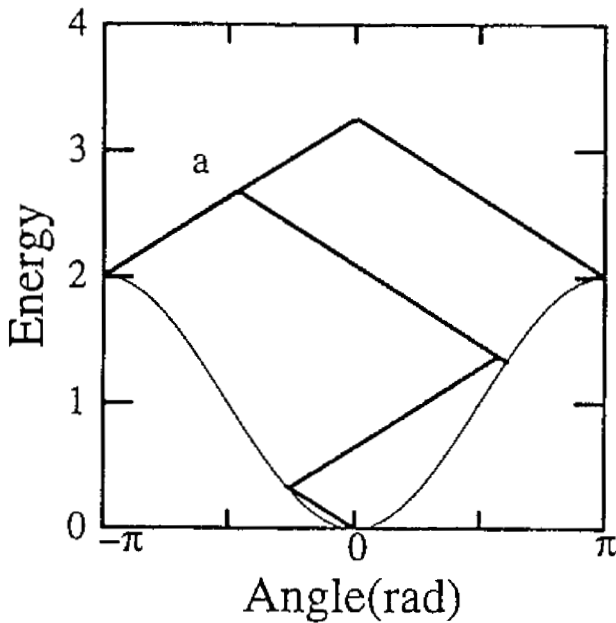


Fig. 10 Energy diagram pendulum 1

Fig. 9 は全エネルギーの時間変化を示し、Fig. 10 は第一振り子のエネルギー線図である。図中の a 点は 3 秒過ぎにオペレータが加振を中断したにもかかわらず PC が制動トルク α を加え始めた点である。その後、 $-\pi$ に到達し逆に振れて再び a 点を通過し π に到達後、6 秒過ぎにある加振トルクゼロ間にポテンシャル・エネルギー曲線上を下降し、6 秒過ぎに第二の振り子に働いた制動トルクで再び π 近くに引き上げられたことを示す。

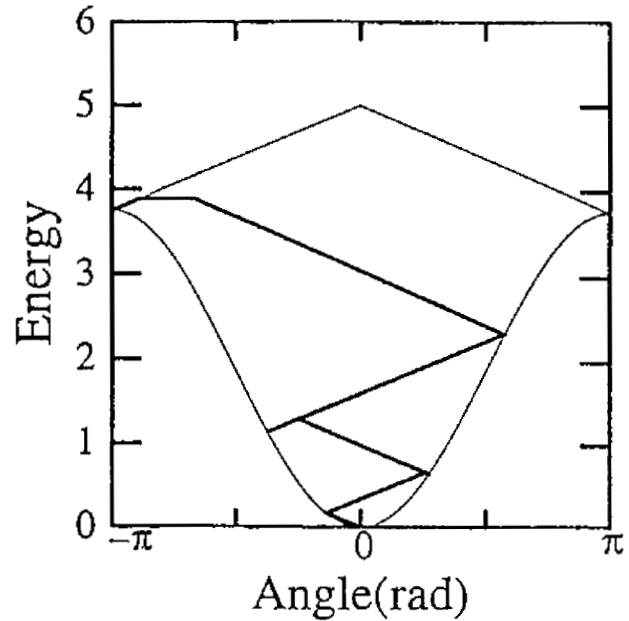


Fig. 11 Energy diagram pendulum 2

Fig. 11 に第二振り子のエネルギー線図を示す。Fig. 6 の加振トルクは、オペレータが実時間シミュレータを使い何度か試みて得られたもので、習熟が必要である。この他に第一振り子と第二振り子の位相が Fig. 8 と反対になって振り上がる例を Fig. 12 に示す。数多くのシミュレーションを繰り返して得られた振り上りパターンは、ほとんどこの 2 通りであった。

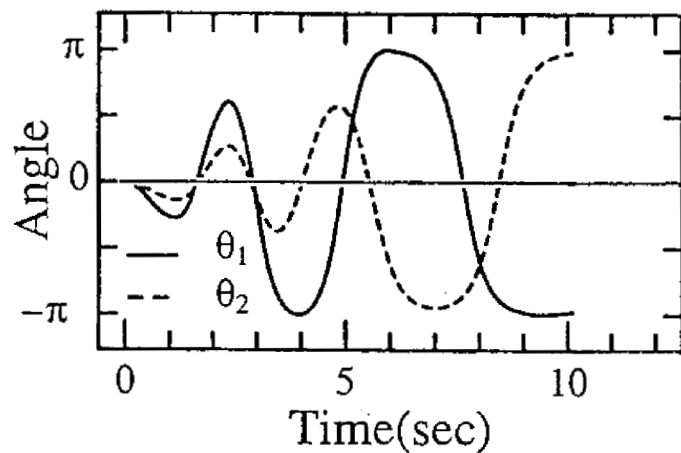


Fig. 12 Simulation (2)

Simulation (2) でオペレータが入力した加振トルクは、Simulation (1) の記録を参考にして、最後の $+\alpha$ の加振時間を 0.2 秒短くしたものであるが、PC が作る制動トルクが変わるために振り上げパターンが変わる。

次に第一振り子と第二振り子が同じ位相で振り

上がる例を示す。

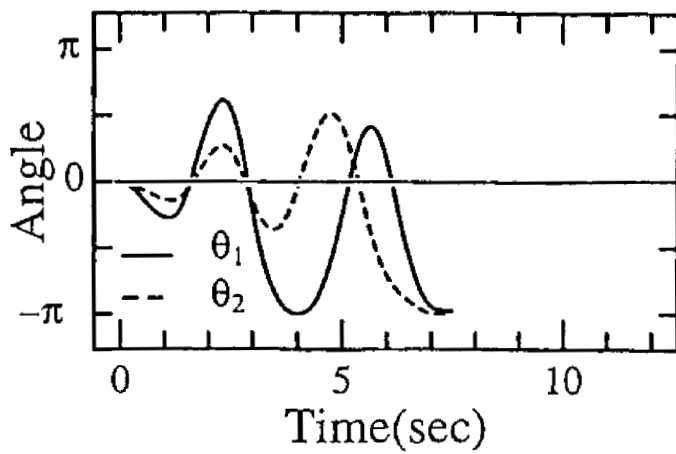


Fig.13 Simulation (3)

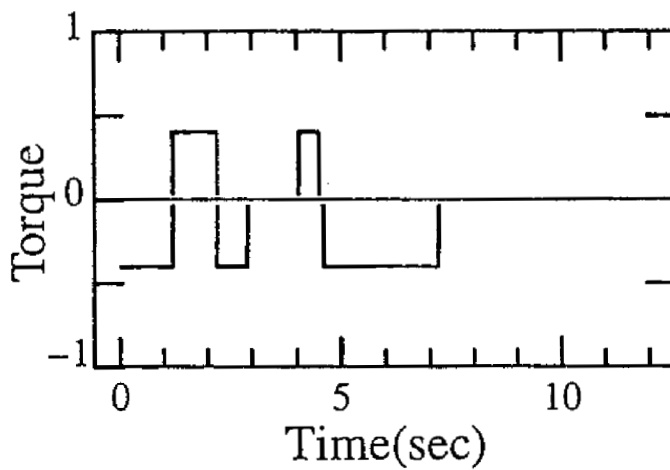


Fig.14 Operator's torque input

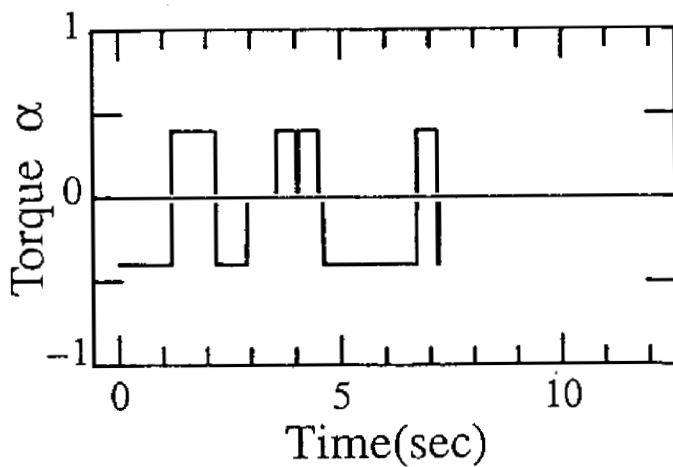


Fig.15 Actual torque input

これまで示した3つのタイプのシミュレーションではオペレータが加振トルクの入力を止めた後に制動トルクが働き振り子を振り上げている。オペレータの加振トルクの入力タイミングが移動したため、あとで働く制動トルクによる振り上げが失敗することもある。このときオペレータがCR

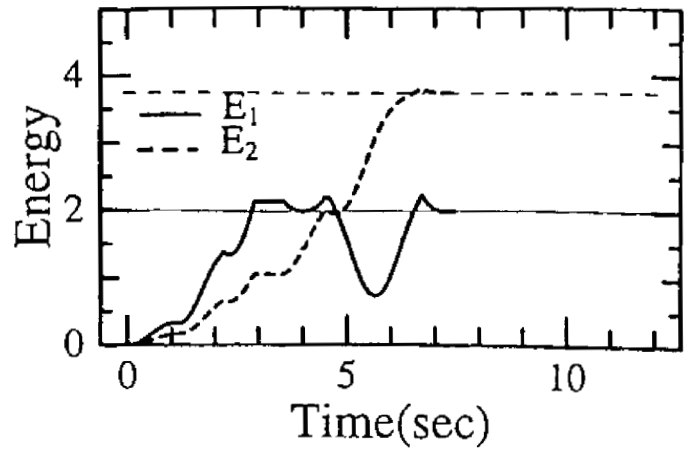


Fig.16 Energy of pendulum

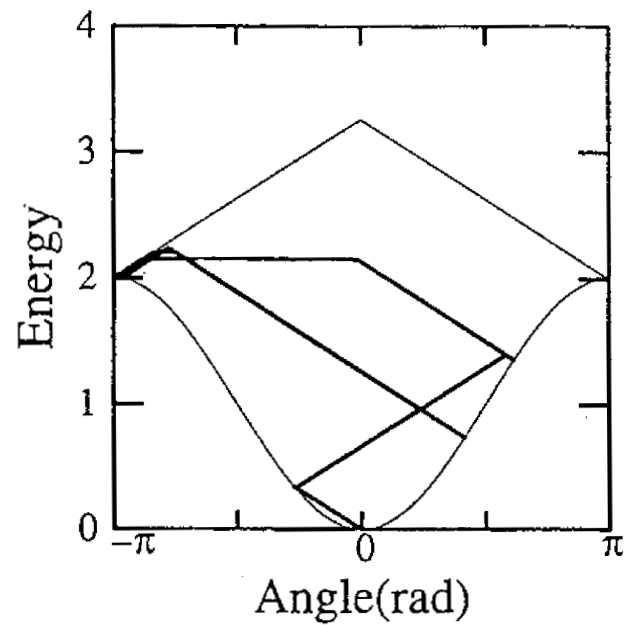


Fig.17 Energy diagram pendulum 1

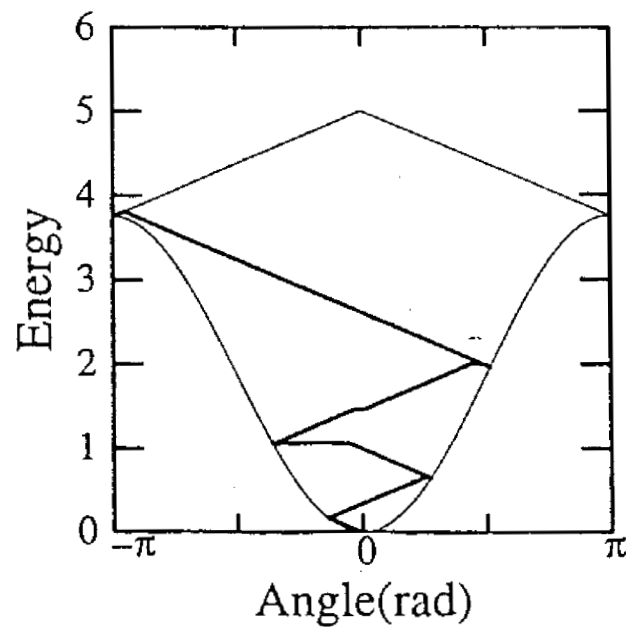


Fig.18 Energy diagram pendulum 2

Tを見て失敗と予測しさらに加振トルクを入力することにより同時に振り上げることができるかどうかを調べた。CRTに制動トルクが働いているとき振り子の色が変わるようにすると、制動トルクの働きでの振り上げが失敗したことがわかる。その直後にオペレーターが加振トルクを加える方法を調べた。その結果、頂点から遠ざかる二つの振り子をともに頂点に近づけることはできなかった。なぜならPCの判断で制動トルクの働きを止めたときは、少なくともひとつの振り子は頂点から大きく離れて、全エネルギーが減少する方向に運動を始めていて、加えたトルクが一方の振り子に対して頂点近くに留まるように作用し、他方には頂点を越えて回転することを防ぐように働くことが無いからである。

5. 結言

片方の振り子が振り上がるまではオペレータの判断で加振トルクを加え、その後はPCが振り子のエネルギーから判断してトルクを加える手動制御による実時間シミュレーションを使い、ほぼ同じタイミングで二つの振り子が振り上がることを示された。オペレーターが入力したトルクと、実際に作用したトルクが異なるため、簡単に加振方法を解析できない。しかし、制動トルクを働かせるタイミングの判定にエネルギー線図が有効であることが示された。

参考文献

- 1) 高橋・猪岡, 機論, 53-485, C(1987), 107
- 2) 橋元・猪岡, 機論, 57-533, C(1991), 82