

# IIIRノッチフィルタを用いた周波数解析に関する検討

## A Study on Short Time Frequency Analysis by Using IIR Notch Filters

○工藤 憲昌 田所 嘉昭  
○Norimasa Kudoh Yoshiaki Tadokoro

八戸高専 豊橋技術科学大学  
Hachinohe National college of Tech., Toyohashi University of Tech.

キーワード：ノッチフィルタ(Notch Filter), 短時間周波数解析(Short Time Spectrum Analysis),  
非定常信号(Non-stationary Signal), N F T(Notch Fourier Transform)

連絡先：〒039-11 八戸市田面木上野平16-1 八戸高専 電気工学科  
tel:0178-27-7281, fax:0178-27-9379, e-mail:kudohk-e@hachinohe-ct.ac.jp

### 1. はじめに

近年, 分析対象の信号の性質が変化している場合でも, その信号の性質の分析を試みるwavelet変換, Wigner分布による当てはめ等の検討が行われている<sup>1, 2)</sup>。

また, 電気通信で用いる多周波信号, モデム信号, 弦楽器音のように信号を構成する周波数成分がほぼ既知であるという条件で, 各周波数成分の時変の振幅と位相を求めることも重要と考えられる。事前に正確な周波数に関する情報がある時に, 効率的に時変の振幅と位相を短い観測時間で求めるN F T(Notch Fourier Transform)<sup>3)</sup>が提案されている。しかし, 信号を構成する周波数に誤差がある場合や観測雑音が存在する場合には, スペクトル漏れのため, N F Tでは, 正確な振幅と位相を求めることが難しい。

本稿では, 文献3)の方法に共振器を縦属接続することによりスペクトル漏れを低減し, 短い観測時間でより正確に振幅と位相を求める方法を述べる。まず, N F Tを概説し, 解析特性および解析に要する時間の面から, 代表的な周波数解析法である離散的フーリエ変換(D F T)との関連について述べる。次に提案する周波数解析法の振幅・

位相の算出法を述べ, 特性を計算機シミュレーションで確認する。

### 2. N F Tによる周波数解析法の特徴

分析対象の信号 $x(t)$ が(1)式のように直流分を含め $(p+1)$ 個の周波数成分から構成されているとする。これら周波数の値を事前に知っているものとする。尚, 周知のように,  $a_i, b_i$ を求めることにより, 振幅と位相の情報を得ることができる。

$$x(t) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \cos(2\pi f_i t) + b_i \sin(2\pi f_i t) \quad (1)$$

N F T<sup>3)</sup>では, ノッチ周波数を $2\pi f_i$ とすると, (2)式の伝達関数 $H_i(z)$ を持つノッチフィルタを用いる。

$$H_i(z) = 1 - 2 \cos(2\pi f_i) z^{-1} + z^{-2} \quad (2)$$

周波数成分 $f_k (k \neq 0)$ の振幅を求める場合, 図1に示すように, 信号 $x(t)$ を $f_k$ 以外にノッチ周波数を持つノッチフィルタを $p$ 個縦属接続したフィルタに入力する。その結果, 出力 $y_k(t)$ は周波数 $f_k$ の成分しか持たないことになり,  $y_k(t)$ を観測すること

で(1)式の $a_k, b_k$ を求めることができる。(2)式より1段のノッチフィルタには2サンプルの信号が必要であることから図1の構成全体では $(2p-1)$ 個のサンプルが必要であること、および、未知数が $a_k, b_k$ の2個であることを考えると、信号の入力を開始した後 $(2p-1)$ サンプル経過した時点の出力 $y_k((2p-1)n)$ と $y_k((2p)n)$ から $a_k, b_k$ を求めることができる。ここでは、サンプリング周波数 $f_s$ を規格化して $n/f_s$ を単に $n$ と記している。周波数 $f_i$ が基本周波数 $f_1$ の整数倍、つまり、 $f_i=i \cdot f_1$ とし、 $x(n)$ 内の $f_k$ の成分を $x_k(n)$ とすると、 $x_k(n)$ から $y_k(n)$ までの伝達関数 $H_k(z)$ は(3)式で与えられ、この関係を用いて振幅と位相を算出できる。全ての周波数の振幅と位相を求める場合は、残りの $p$ 個の周波数についても図1と同様の縦属構成のフィルタを設ければ良い。

$$H_k(z) = \frac{p}{\sin(2\pi f_k k)} e^{j(2\pi f_k - \pi/2)} \quad (3)$$

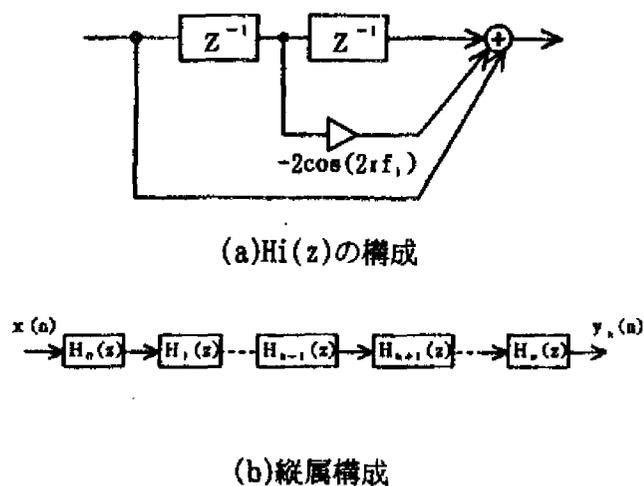


図1.  $f_k$ 成分を抽出するフィルタの構成

NFTの特徴は以下の2点である<sup>3)</sup>。

- (1)縦属構成のノッチフィルタの全遅延素子に信号サンプルが供給された時点以降、毎回出力2サンプルを用いて振幅と位相を算出することができる。このため、信号を構成している周波数成分が変化せず振幅が時変の信号も短い観測時間で分析できる。
- (2)DFTでは、サンプリング周波数 $f_s$ と変換規模 $N$ により分析対象の信号の周波数分解能は $f_s/N$ と規定される。NFTでは、信号を構成している周波数をノッチ周波数としたノッチフィルタを図1のように構成すれば、任意の周波数を分析

できる。

DFTで周波数分解能を高くするためには $N$ を大きくする、つまり、長い観測時間にならざるを得ないが、NFTでは、上述のように、周波数成分の情報を事前に得ている場合には短い観測時間で完全に振幅と位相を分析できる。しかし、一般的には、信号を構成している周波数値には誤差が許容されている場合が多くため事前に正確な情報を得ることは難しく、観測雑音も存在する。

図1のフィルタの振幅特性を図2に示す。尚、DFTとの関連を述べるため、信号 $x(t)$ を構成する周波数は基本周波数の整数倍とし、 $N=2p=16$ とした。この場合のNFT全体の効率的な構成法を図3に示す。図2, 3から上記の条件のもとでは、NFTはSliding DFT<sup>4)</sup>と同一であること分かる。但し、時間的に連続して分析する場合、図3の構成は単位円上に極があるため、有限語長での実現はできず、文献5)のようにノッチフィルタをトリー状に接続する必要がある。

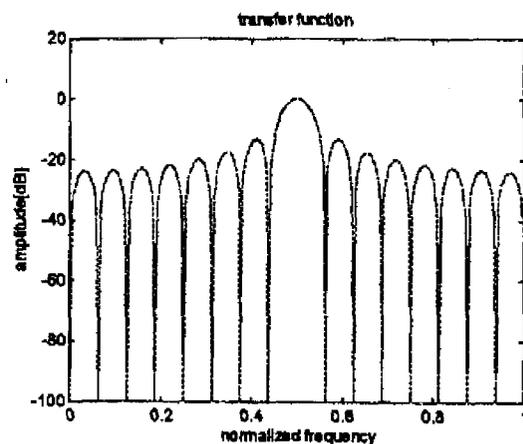


図2. 周波数特性

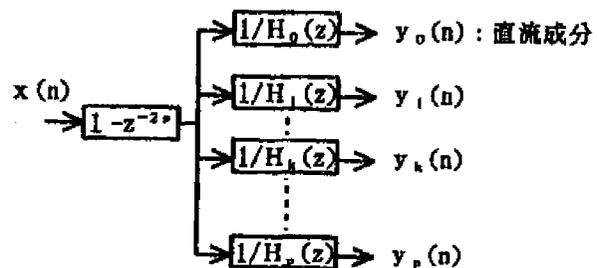


図3. NFTの構成

図2に示すように、スペクトル漏れが発生する場合、NFTの分析結果の全体にわたって誤差を与えることになる。この誤差を低減するには、(1)分析対象の周波数成分付近を増幅し相対的にスペクトル漏れの影響を小さくする、(2)図1の個々のノッチフィルタのノッチ周波数をそれぞれ適応的に制御する、等の方法が考えられる。一般に縦属接続した適応フィルタでは前段の収束状態が後段の収束特性に影響を与えるため収束時間が長くなる傾向にあるたり<sup>9)</sup>、短い観測時間での分析が困難であると考えられるため、本稿では(1)の方法を検討する。

### 3. 周波数成分解析法

#### 3. 1 構成と算出法

上述の(1)に基づいた構成を図4に示す。NFTと同様単位円上に極があるため、有限語長のハードウェアで実現する場合、ノッチフィルタをトリ一状に接続して図4と同一の伝達関数を実現する。

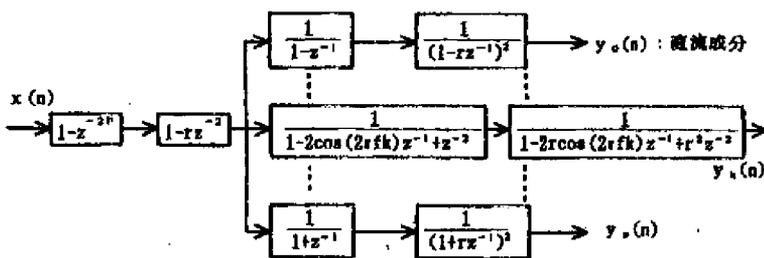
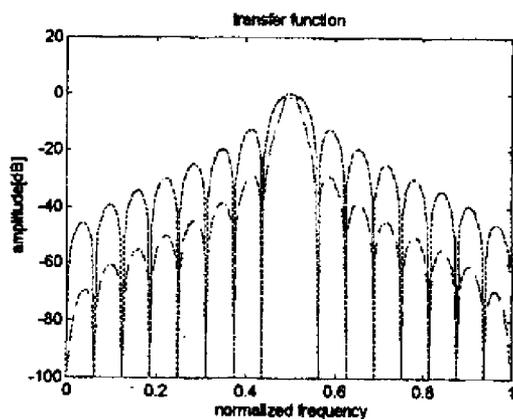


図4. 提案する構成



p=8, — r=0.6, - - r=0.95

図5. 伝達関数

事前にほぼ把握している分析対象の周波数成分をくし型フィルタ $(1-z^{-2p})$ で除去した後、分析周波数近傍を増幅している。rの絶対値は1以下であり、1に近いほど増幅率が高い。伝達関数を図5に示す。rの制御によりNFTよりスペクトル漏れを抑えることができることが分かる。

次に、図4の構成のフィルタの出力から入力信号の振幅と位相を算出する方法を示す。x(t)を構成する周波数を基本周波数の整数倍とすると各周波数成分は(4)式のように表される。この場合、分析対象の周波数以外はフィルタの出力は零となるため、(4)式の信号それぞれに対する伝達関数のみを求めれば良い。(4-1)式の信号に対する $x_0(n)$ から $y_0(n)$ の経路の伝達関数 $H_0(z)$ を(5)式に示す。同様に、(4-2)式の $x_k(n)$ に対する $H_k(z)$ 、(4-3)式、2の $x_p(n)$ に対する $H_p(z)$ を(6)、(7)式に示す。尚、 $2f_p=f_0$ の関係があるものとする。これより、 $H_0(z)$ 、 $H_p(z)$ は位相を変化させず、 $H_k(z)$ は周波数に対して線形に位相を変化させることが分かる。周波数 $f_k$ における位相特性は、 $(1-rz^{-2})$ を挿入したことによるもので、このことで分析を行う時に複素数演算を行わなくとも良くなる。

$$x_0(n) = a_0 \quad (4-1)$$

$$x_k(n) = a_k \cos(2\pi f_k n) + b_k \sin(2\pi f_k n) \quad (4-2)$$

$$x_p(n) = a_p \cos(\pi n) \quad (4-3)$$

$$H_0(z) \Big|_{z=e^{j0}} = \frac{1-z^{-2p}}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1-rz^{-2}}{(1-rz^{-1})^2} \Big|_{z=e^{j0}} = \frac{2p}{1-r} \quad (5)$$

$$H_k(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f_k}} = \frac{1-z^{-2p}}{1-2\cos(2\pi f_k)z^{-1}+z^{-2}} \times \frac{1-rz^{-2}}{1-2r\cos(2\pi f_k)z^{-1}+r^2z^{-2}} \Big|_{z=e^{j2\pi f_k}} = \frac{p}{(1-r)\sin(2\pi f_k)} e^{j(2\pi f_k n - \pi/2)} \quad (6)$$

$$H_p(z) \Big|_{z=e^{j\pi}} = \frac{1-z^{-2p}}{1+z^{-1}} \cdot \frac{1-rz^{-2}}{(1+rz^{-1})^2} \Big|_{z=e^{j\pi}} = \frac{2p}{1-r} \quad (7)$$

(5)、(6)式の伝達関数から $y_0(n)$ 、 $y_p(n)$ がそれぞれ(8)、(9)式で与えられるため、 $a_0$ と $a_p$ は(10)、(11)式を用いてサンプル毎に求めることができる。

$$y_0(n) = 2pa_0 / (1-r) \quad (8)$$

$$y_p(n) = 2pa_p \cos(\pi n) / (1-r) \quad (9)$$

$$a_0 = (1-r)y_0(n) / 2p \quad (10)$$

$$a_p = (-1)^n (1-r)y_p(n) / 2p \quad (11)$$

$a_k, b_k$ については、 $y_k(n-1), y_k(n)$ の隣合う2サンプルを用いて算出する。これらの値は、(6)式の伝達関数の振幅成分と位相成分を考慮すると、それぞれ、(12), (13)式のように与えられ、更に、(14), (15)式のように変数 $\alpha_k(n), \beta_k(n)$ を定義すると、(16), (17)式によりサンプル毎に算出できる。

$$y_k(n-1) = \frac{p}{(1-r)\sin(2\pi f_k)} \times \{a_k \sin(2\pi f_k(n+1)) - b_k \sin(2\pi f_k(n+1))\} \quad (12)$$

$$y_k(n) = \frac{p}{(1-r)\sin(2\pi f_k)} \times \{a_k \sin(2\pi f_k n) - b_k \cos(2\pi f_k n)\} \quad (13)$$

$$\alpha_k(n) \equiv \frac{(1-r)\sin(2\pi f_k)}{p} y_k(n-1) = a_k \sin(2\pi f_k n) - b_k \cos(2\pi f_k n) \quad (14)$$

$$\beta_k(n) \equiv \frac{1-r}{p} \{y_k(n) - y_k(n-1)\cos(2\pi f_k)\} = a_k \cos(2\pi f_k n) + b_k \sin(2\pi f_k n) \quad (15)$$

$$a_k = \alpha_k(n) \sin(2\pi f_k n) + \beta_k(n) \cos(2\pi f_k n) \quad (16)$$

$$b_k = -\alpha_k(n) \cos(2\pi f_k n) + \beta_k(n) \sin(2\pi f_k n) \quad (17)$$

### 3. 2 出力信号の確定時間

図4に示すIIR型フィルタの出力 $y_o(n), y_k(n), y_p(n)$ の確定後、前述の方法によりサンプル毎に振幅と位相を算出する。各フィルタのインパルス応答を求め、十分に減衰するまでの時間を出力信号の確定時間と考えることにする。伝達関数 $H_o(z), H_p(z)$ のフィルタのIIR部のインパルス応答は、それぞれ、 $(n+1)r^n, (n+1)(-r)^n$ である。伝達関数 $H_k(z)$ のフィルタのIIR部については、直接求めることが難しいため、図6のように、1次のIIRフィルタの並列構成に変形してから求める。この構成のインパルス応答 $h_k(n)$ は、 $\delta(n)$ を単位インパルスとすると(18)式で与えられる。

$H_o(z), H_k(z), H_p(z)$ のIIR部のインパルス応答が $\epsilon$ まで減衰するまでに要するサンプル数を $\tau_o, \tau_k, \tau_p$ とし、 $H_o(z), H_k(z), H_p(z)$ のFIR部も含めた出力確定までのサンプル数 $T_1, T_2, T_3$ は(19)式のようになる。このサンプル数経過後、(10), (11), (16), (17)式を用いてサンプル毎にほぼ正確に振幅と位相を求めることが可能になる。

$$h_k(n) = \delta(n) + \frac{-re^{j2\pi f_k}}{e^{-j2\pi f_k} - e^{j2\pi f_k}} \times \frac{(r^{n-1}e^{j2(n-1)\pi f_k} - r^{n-1}e^{-j2(n-1)\pi f_k})}{\sin(2\pi f_k)} r^n \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} T_o &= 1 + p + \tau_o \\ T_k &= p + \tau_k \\ T_p &= 1 + p + \tau_p \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

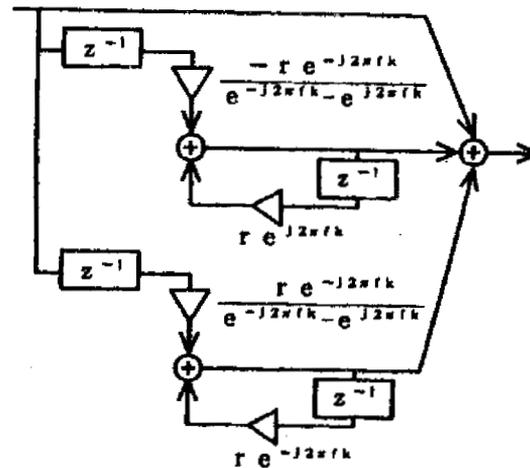
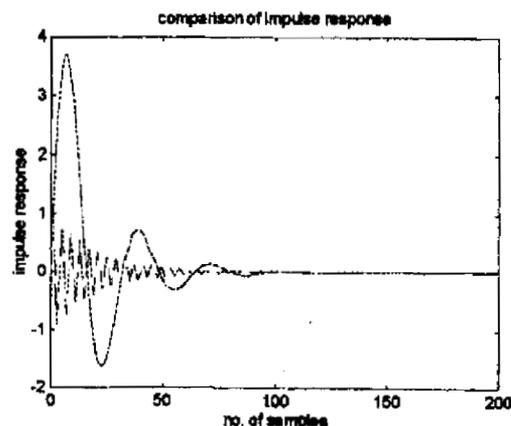


図6. 1次IIRフィルタの並列構成

(18)式の分子が正弦波であるため、インパルス応答の包絡線は $r^n/\sin(2\pi f_k)$ で与えられることになる。このため、 $2\pi f_k$ が $\pi/2$ に近い場合インパルス応答の減衰が早く、0または $\pi$ に近い場合遅くなる。よって、分析対象の信号を振幅変調により、 $\pi/4$ 付近に周波数シフトを行ってから本方式を適用すれば、より短い時間で周波数解析を行うことが期待できる。図7にインパルス応答の減衰特性について示す。



$$r=0.95, \quad -2\pi f_k = \pi/16, \quad -2\pi f_k = \pi/2$$

図7. インパルス応答の減衰特性

## 4. シミュレーション

信号に雑音が重畳している場合、事前の周波数成分に関する知識と実際の信号周波数が異なる場合について、NFTと比較する。

### (1)信号に雑音が重畳している場合

周波数が2[kHz]でcosine成分の振幅が2.5, sin成分の振幅が2.0の波形に分散1/3の白色雑音が重畳した場合の分析特性を図8に示す。尚、サンプリング周波数 $f_s$ は8[kHz]であり、SN比は14.88[dB]である。 $r=0$ がNFTによるものであり、 $r=0.9$ の方が振幅と位相の値が収束するまでの時間がかかるが、それ以降は誤差が少ないことが分かる。

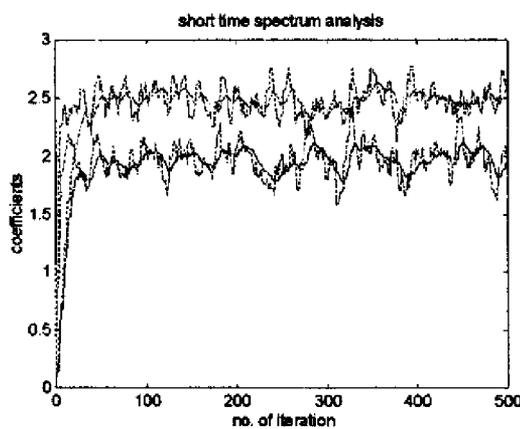


図8. 雑音が重畳している場合

### (2)周波数誤差がある場合( $f_s=8$ [kHz])

ノッチ周波数を1[kHz]と2[kHz]に設定し、 $f_1$ として1.05[kHz]と $f_2$ として2[kHz]の2周波数成分か

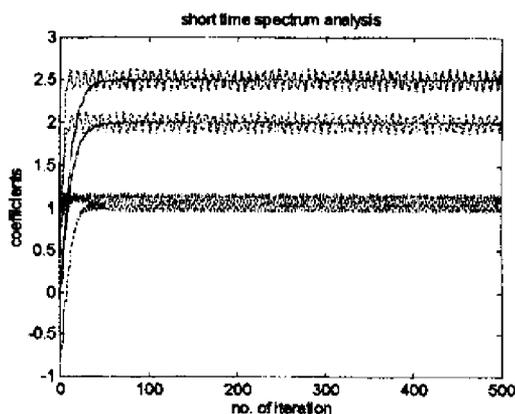


図9. 周波数誤差がある場合

らなる信号を入力した。ここで $a_1=b_1=1.5$ ,  $a_2=2.5$ ,  $b_2=2.0$ とした。1[kHz]に対して5[%]の周波数誤差を持つためスペクトル漏れにより図9のように分析に誤差が生じる。NFTでは2[kHz]の成分に振動が見られるが、 $r=0.9$ の場合ほとんど変動が見られない。1[kHz]については振幅の絶対値を示しており、 $r=0.9$ の方が減衰が大きいいためNFTよりやや小さい値となっている。

## 5. まとめ

NFTを解析特性および解析に要する時間の面から概説し、ノッチ周波数を整数倍に限定するとsliding DFTと同一特性を持つことを述べる。また、NFTに共振器を縦属接続することによりスペクトル漏れを低減し、短い観測時間でより正確に振幅と位相を求める方法を述べた。最後に提案する周波数解析法の振幅・位相の算出法を述べ、雑音が重畳している場合および周波数誤差がある場合について、その特性を計算機シミュレーションで確認した。今後は、縦属接続するIIR部を、文献7)のような収束時間が比較的短い適応IIR型とした場合の特性について検討したい。

## 参考文献

- 1)G.Strang,T.Nguyen: Wavelets and Filter Banks,362/390,Wellesley-Cambridge(1995)
- 2)電子情報通信学会編:デジタル信号処理ハンドブック,162/163,オーム社(1992)
- 3)Y.Tadokoro,K.Abe: Notch Fourier Transform, IEEE Trans. on ASSP, No9,1282/1288(1987)
- 4)S.Haykin: Adaptive Filter Theory 2nd edition,360/361,Prentice-Hall(1991)
- 5)阿部,田所: ランダムサンプリングデータに対する離散フーリエ変換の検討,信学技報DSP89-42,25/32(1990)
- 6)武部幹訳: 適応フィルタ入門,182/191,現代工学社(1987)
- 7)李他: 単一正弦波検出用高精度IIR形適応フィルタ,電子情報通信学会論文誌A Vol.J80-A No.4 716/720(1997)