計測自動制御学会東北支部第168回研究集会(1997.6.13)

資料番号 168-9

Computer Algebra of Ordinary Differential Equations

常微分方程式の数式処理

Shigeru OHKURO

八戸工業大学

Hachinohe Institute of Technology

Keywords: Computer algebra（数式処理），Ordinary differentiale quations (常微分方程式)，Maple software (メイプル・ソフト)，Linear differential equations of 2 nd order（二階線形微分方程式)，Homogeneus eqations with rational function-coefficients(有理関数係数の同次方程式)，Education of mathematical science（数理科学教育）

連絡先：〒031　八戸市妙字大開 88-1 八戸工業大学 工学部 情報システム工学研究所
大黒 茂，Tel.:（0178）25-8143，Fax.:（0178）25-1691，E-mail: **ohkuro@hi-tech.ac.jp**

1．はじめに

最近、数式処理・グラフィック描画のパソコンソフトの進歩はめざましい。米国の Mathematica 及び カナダの Maple 等はその代表的なものである。前者は物理学への応用に秀でているが、コマンド名が長い等の実用面での扱いにくさの問題がある。一方後者は宣伝があまり派手でないせいか、前者より知名度が劣っているようである。しかし、実際に Maple V Release 4 を扱ってみると、数式やコマンドの入力、及び数式の出力において非常に洗練されている点では前者に勝っているようである。特に数式の出力は、書き直してみなくてもそのままで数式として理解出来る形にデザインされている。この点では、数理科学教育には最適な数少ないパソコン用の数式処理・グラフィック描画用ソフトと言える。また大規模な数値計算には Matlab が適しているようである。今回は Maple を用いて二階線形微分方程式をパソコンに解かせた結果を報告する。

2．微分方程式と解

以下では変数係数の二階同次線形微分方程式を考える。今回はさらに焦点を絞って係数が簡単な有理関数の場合を扱う。この様な微分方程式は以前、文献[1] で取り上げられたことがある。この文献の付録Aにおける 50 個の微分方程式の中から、初めの 30 個を選んだ。以下では微分方程式の番号は、両者対応して

いる。 30 個全て Maple で解けた訳ではないが、大部分は解が求まった。解が「初等関数では表わせない」となっていたものが、超幾何関数を用いて解けたものが 1 個あった。

3. Maple による数式処理

ここでは、

$$y''+p(x)y'+q(x)=0$$

の形の方程式を考える。 $p(x),q(x)$ は x の有理関数である。数式処理の様子と結果は Appendix に示した。[2] 29 番の解は超幾何関数で表わされている。

解が求まったものについては、微分方程式に代入して、数式処理により、間違いなく解であることの確認も試みた。

本研究は、八戸工業大学プロジェクト研究（平成 7 年—9 年）「マルチメディアを利用した理工系科目の教育方法の改革に関する研究」の補助（分担）を受けている。

参考文献

1) 渡辺 隼郎：常微分方程式の数式処理, 教育出版 (1974)

2) B.W.チャー, K.O.ゲディス 他：はじめての Maple V, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1993)

Appendix

次頁以下に実際の数式処理の結果を示した。

```
> p(x):=1/x; q(x):=(x^2-1)/x^2;
```

$$p(x) := \frac{1}{x}$$

$$q(x) := \frac{x^2-1}{x^2}$$

```
> de1:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{\frac{\partial}{\partial x} y(x)}{x} + \frac{(x^2-1)\, y(x)}{x^2} = 0$$

```
> soln1:=dsolve(de1,y(x));
```

$$soln1 := y(x) = \_C1 \operatorname{BesselJ}(1,x) + \_C2 \operatorname{BesselY}(1,x)$$

```
> subs(y(x)=",lhs(de1));
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{\frac{\partial}{\partial x} y(x)}{x} + \frac{(x^2-1)\, y(x)}{x^2} =$$

$$\_C1 \left(-\operatorname{BesselJ}(1,x) + \frac{\operatorname{BesselJ}(1,x)}{x^2} - \frac{\operatorname{BesselJ}(0,x) - \frac{\operatorname{BesselJ}(1,x)}{x}}{x} \right)$$

$$+ \_C2 \left(-\operatorname{BesselY}(1,x) + \frac{\operatorname{BesselY}(1,x)}{x^2} - \frac{\operatorname{BesselY}(0,x) - \frac{\operatorname{BesselY}(1,x)}{x}}{x} \right)$$

$$+ \frac{\_C1 \left(\operatorname{BesselJ}(0,x) - \frac{\operatorname{BesselJ}(1,x)}{x}\right) + \_C2 \left(\operatorname{BesselY}(0,x) - \frac{\operatorname{BesselY}(1,x)}{x}\right)}{x}$$

$$+ \frac{(x^2-1)\,(\_C1 \operatorname{BesselJ}(1,x) + \_C2 \operatorname{BesselY}(1,x))}{x^2}$$

```
> simplfy(");
```

$$\operatorname{simplfy}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{\frac{\partial}{\partial x} y(x)}{x} + \frac{(x^2-1)\, y(x)}{x^2} = \right.$$

$$\_C1 \left(-\operatorname{BesselJ}(1,x) + \frac{\operatorname{BesselJ}(1,x)}{x^2} - \frac{\operatorname{BesselJ}(0,x) - \frac{\operatorname{BesselJ}(1,x)}{x}}{x} \right)$$

$$+ \_C2 \left(-\operatorname{BesselY}(1,x) + \frac{\operatorname{BesselY}(1,x)}{x^2} - \frac{\operatorname{BesselY}(0,x) - \frac{\operatorname{BesselY}(1,x)}{x}}{x} \right)$$

$$+\frac{\_C1\left(\mathrm{BesselJ}(0,x)-\frac{\mathrm{BesselJ}(1,x)}{x}\right)+\_C2\left(\mathrm{BesselY}(0,x)-\frac{\mathrm{BesselY}(1,x)}{x}\right)}{x}$$

$$\left.+\frac{(x^2-1)\,(\_C1\,\mathrm{BesselJ}(1,x)+\_C2\,\mathrm{BesselY}(1,x))}{x^2}\right)$$

???

```
> p(x):=p(x); q(x):=(4*x^2-1)/(4*x^2);
```

$$\mathrm{p}(x):=\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{q}(x):=\frac{1}{4}\,\frac{4\,x^2-1}{x^2}$$

```
> de2:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de2:=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right)+\frac{\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)}{x}+\frac{1}{4}\,\frac{(4\,x^2-1)\,\mathrm{y}(x)}{x^2}=0$$

```
> soln2:=dsolve(de2,y(x));
```

$$soln2:=\mathrm{y}(x)=\frac{\_C1\cos(x)}{\sqrt{x}}+\frac{\_C2\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

```
> subs(y(x)=",lhs(de2));
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right)+\frac{\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)}{x}+\frac{1}{4}\,\frac{(4\,x^2-1)\,\mathrm{y}(x)}{x^2}=\frac{3}{4}\,\frac{\_C1\cos(x)}{x^{5/2}}+\frac{\_C1\sin(x)}{x^{3/2}}-\frac{\_C1\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$+\frac{3}{4}\,\frac{\_C2\sin(x)}{x^{5/2}}-\frac{\_C2\cos(x)}{x^{3/2}}-\frac{\_C2\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\,\frac{\_C1\cos(x)}{x^{3/2}}-\frac{\_C1\sin(x)}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\,\frac{\_C2\sin(x)}{x^{3/2}}+\frac{\_C2\cos(x)}{\sqrt{x}}}{x}$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{(4\,x^2-1)\left(\frac{\_C1\cos(x)}{\sqrt{x}}+\frac{\_C2\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)}{x^2}$$

```
> simplify(");
```

$$\frac{1}{4}\,\frac{4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right)x^2+4\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)\right)x+4\,\mathrm{y}(x)\,x^2-\mathrm{y}(x)}{x^2}=0$$

```
> p(x):=0; q(x):=-2*x/((x*(x-1))^2);
```

$$\mathrm{p}(x):=0$$

$$q(x) := -\frac{2}{x\,(x-1)^2}$$

```
> de3:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de3 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right) - 2\,\frac{y(x)}{x\,(x-1)^2} = 0$$

```
> soln3:=dsolve(de3,y(x));
```

$$soln3 := y(x) = \frac{\_C1\,x}{x-1} + \frac{\_C2\,(x^2 - 2\ln(x)\,x - 1)}{x-1}$$

```
> p(x):=(2*x^3-10*x)/(x^4-1); q(x):=(16*x^4+16)/(x^4-1)^2;
```

$$p(x) := \frac{2\,x^3 - 10\,x}{x^4 - 1}$$

$$q(x) := \frac{16\,x^4 + 16}{(x^4-1)^2}$$

```
> de4:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de4 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right) + \frac{(2\,x^3 - 10\,x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)}{x^4 - 1} + \frac{(16\,x^4 + 16)\,y(x)}{(x^4-1)^2} = 0$$

```
> soln4:=dsolve(de4,y(x));
```

$soln4 :=$

$$y(x) = \frac{\_C1\,e^{(-\sqrt{3}\,(-\ln(1-I\,x)+\ln(1+I\,x)))}\,(x^2-1)}{x^2+1} + \frac{\_C2\,(x^2-1)\,e^{(\sqrt{3}\,(-\ln(1-I\,x)+\ln(1+I\,x)))}}{x^2+1}$$

```
> p(x):=4/(x*(x-1)); q(x):=2*x/(x*(x-1))^2;
```

$$p(x) := \frac{4}{x\,(x-1)}$$

$$q(x) := \frac{2}{x\,(x-1)^2}$$

```
> de5:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de5 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right) + 4\,\frac{\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)}{x\,(x-1)} + 2\,\frac{y(x)}{x\,(x-1)^2} = 0$$

```
> soln5:=dsolve(de5,y(x));
```

$soln5 := y(x) =$

$$\frac{\_C1\,(x-2)}{x-1} + \frac{\_C2\,(x^3 - 3\,x^2 - 15\,x + 18 + 6\ln(x-1)\,x^2 - 18\ln(x-1)\,x + 12\ln(x-1))}{(x-1)^2}$$

```
> p(x):=2*x/(x^2-1); q(x):=-2*(x^2-1)/(x^2-1)^2;
```

$$p(x) := 2\,\frac{x}{x^2-1}$$

$$q(x) := -\frac{2}{x^2-1}$$

```
> de6:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de6 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + 2\frac{x\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x^2-1} - 2\frac{y(x)}{x^2-1} = 0$$

```
> soln6:=dsolve(de6,y(x));
```

$$soln6 := y(x) = \_C1\, x + \_C2\left(-\frac{1}{2}\ln(x-1)\,x + \frac{1}{2}\ln(x+1)\,x - 1\right)$$

```
> p(x):=(3*x-1)/(2*x*(x-1));q(x):=-2*(x^2+x)/(4*(x*(x-1))^2);
```

$$p(x) := \frac{1}{2}\frac{3x-1}{x(x-1)}$$

$$q(x) := -\frac{1}{2}\frac{x^2+x}{x^2(x-1)^2}$$

```
> de7:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de7 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{1}{2}\frac{(3x-1)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{(x^2+x)\,y(x)}{x^2(x-1)^2} = 0$$

```
> soln7:=dsolve(de7,y(x));
```

$$soln7 := y(x) = \frac{\_C1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{\_C2\sqrt{x}\,(-3+x)}{x-1}$$

```
> p(x):= x/(x*x+1); q(x):= 2*(x^2+1)/(x*x+1)^2;
```

$$p(x) := \frac{x}{x^2+1}$$

$$q(x) := \frac{2}{x^2+1}$$

```
> de8:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de8 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{x\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x^2+1} + 2\frac{y(x)}{x^2+1} = 0$$

```
> soln8:=dsolve(de8,y(x));
```

$$soln8 := y(x) = \_C1\ \mathrm{hypergeom}\left([-I\sqrt{2}, I\sqrt{2}], \left[\frac{1}{2}\right], -\frac{1}{2}I(x+I)\right)$$
$$+ \_C2\sqrt{2}\sqrt{-I(x+I)}\ \mathrm{hypergeom}\left(\left[-I\sqrt{2}+\frac{1}{2}, I\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right], \left[\frac{3}{2}\right], -\frac{1}{2}I(x+I)\right)$$

```
> p(x):=-(x^2-2)/(x*(x^2-1));q(x):=(x^6-3*x^4+2*x^2)/(x^2*(x^2-1)^
  2);
```

$$p(x) := -\frac{x^2-2}{x(x^2-1)}$$

$$q(x) := \frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2}{x^2 (x^2-1)^2}$$

```
> de9:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de9 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - \frac{(x^2-2)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x(x^2-1)} + \frac{(x^6 - 3x^4 + 2x^2)\, y(x)}{x^2 (x^2-1)^2} = 0$$

```
> soln9:=dsolve(de9,y(x));
```

$soln9 := y(x) =$

$$\text{DESol}\left(\{(x^3 - x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \_Y(x)\right) + (-x^2+2)\left(\frac{\partial}{\partial x} \_Y(x)\right) + (x^3 - 2x)\, \_Y(x)\}, \{\_Y(x)\}\right)$$

???

```
> p(x):= -(x-1)/x;   q(x):= -x/x^2;
```

$$p(x) := -\frac{x-1}{x}$$

$$q(x) := -\frac{1}{x}$$

```
> de10:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de10 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - \frac{(x-1)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x} - \frac{y(x)}{x} = 0$$

```
> soln10:=dsolve(de10,y(x));
```

$$soln10 := y(x) = \_C1\, e^x + \frac{\_C2\, \text{hypergeom}\left([1, 1], [\ ], -\frac{1}{x}\right)}{x}$$

```
> p(x):= 0;   q(x):= (-x^2+4*x-3)/x^2;
```

$$p(x) := 0$$

$$q(x) := \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2}$$

```
> de11:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de11 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{(-x^2 + 4x - 3)\, y(x)}{x^2} = 0$$

```
> soln11:=dsolve(de11,y(x));
```

$$soln11 := y(x) = \text{DESol}\left(\{x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \_Y(x)\right) + (-x^2 + 4x - 3)\, \_Y(x)\}, \{\_Y(x)\}\right)$$

???

```
> p(x):=(-3*x+1)/x; q(x):=(2*x^2-3*x-4)/x^2;
```

$$p(x) := \frac{-3x + 1}{x}$$

$$q(x) := \frac{2x^2 - 3x - 4}{x^2}$$

```
> de12:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de12 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{(-3x+1)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x} + \frac{(2x^2 - 3x - 4)\, y(x)}{x^2} = 0$$

```
> soln12:=dsolve(de12,y(x));
```

$$soln12 := y(x) = \frac{\_C1\, e^x}{x^2} + \frac{\_C2\,(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\, e^{(2x)}}{x^2}$$

```
> p(x):=(14*x-16)/(24*x*(x-1));q(x):=-11*x*(x-1)/(24*x*(x-1))^2;
```

$$p(x) := \frac{1}{24} \frac{14x - 16}{x(x-1)}$$

$$q(x) := -\frac{11}{576} \frac{1}{x(x-1)}$$

```
> de29:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de29 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \frac{1}{24} \frac{(14x-16)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x(x-1)} - \frac{11}{576} \frac{y(x)}{x(x-1)} = 0$$

```
> soln29:=dsolve(de29,y(x));
```

$$soln29 := y(x) = \_C1 \text{ hypergeom}\left(\left[\frac{1}{24}, \frac{-11}{24}\right], \left[\frac{2}{3}\right], x\right) + \_C2\, x^{1/3} \text{ hypergeom}\left(\left[\frac{-1}{8}, \frac{3}{8}\right], \left[\frac{4}{3}\right], x\right)$$

```
> p(x):=-(4*x+1)/(2*x); q(x):=4*(x^2+x-1)/(4*x^2);
```

$$p(x) := -\frac{1}{2} \frac{4x+1}{x}$$

$$q(x) := \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$$

```
> de43:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de43 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - \frac{1}{2} \frac{(4x+1)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)}{x} + \frac{(x^2 + x - 1)\, y(x)}{x^2} = 0$$

```
> soln43:=dsolve(de43,y(x));
```

$$soln43 := y(x) = \frac{\_C1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9}\, \sqrt{-2x - 3\sqrt{2}\sqrt{-x} + 3}\; e^{(x + \sqrt{2}\sqrt{-x})}}{\sqrt{x}\, \sqrt{-2x + 3\sqrt{2}\sqrt{-x} + 3}}$$
$$+ \frac{\_C2 \sqrt{4x^2 + 6x + 9}\, \sqrt{-2x + 3\sqrt{2}\sqrt{-x} + 3}\; e^{(x - \sqrt{2}\sqrt{-x})}}{\sqrt{x}\, \sqrt{-2x - 3\sqrt{2}\sqrt{-x} + 3}}$$

```
> subs(y(x)=",lhs(de43)):
> simplify(");
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right)x^2+4\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)x^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)x-2\,y(x)\,x^2-2\,y(x)\,x+2\,y(x)}{x^2}=0$$

```
> p(x):=-2*(2*x+1)/(2*x*(x-1));q(x):=-(64*x^4+1)/(2*x*(x-1))^2;
```

$$p(x) := -\frac{2\,x+1}{x\,(x-1)}$$

$$q(x) := -\frac{1}{4}\,\frac{64\,x^4+1}{x^2\,(x-1)^2}$$

```
> de44:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de44 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right)-\frac{(2\,x+1)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)}{x\,(x-1)}-\frac{1}{4}\,\frac{(64\,x^4+1)\,y(x)}{x^2\,(x-1)^2}=0$$

```
> soln44:=dsolve(de44,y(x));
```

$$soln44 := y(x) = \mathrm{DESol}\Big(\{(4\,x^4-8\,x^3+4\,x^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\_Y(x)\right)+(-8\,x^3+4\,x^2+4\,x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\_Y(x)\right)+(-64\,x^4-1)\,\_Y(x)\},\ \{\_Y(x)\}\Big)$$

???

```
> p(x):=-6*(2*x+1)/(6*x*(x-1));q(x):=-(16*x^4+9)/(6*x*(x-1))^2;
```

$$p(x) := -\frac{2\,x+1}{x\,(x-1)}$$

$$q(x) := -\frac{1}{36}\,\frac{16\,x^4+9}{x^2\,(x-1)^2}$$

```
> de45:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de45 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right)-\frac{(2\,x+1)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)}{x\,(x-1)}-\frac{1}{36}\,\frac{(16\,x^4+9)\,y(x)}{x^2\,(x-1)^2}=0$$

```
> soln45:=dsolve(de45,y(x));
```

$$soln45 := y(x) = \frac{\_C1\,\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}}{(x-1)^{1/6}}+\frac{\_C2\,\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}\displaystyle\int\frac{e^{(4/3\,x)}\,(x-1)^{10/3}}{x^2}\,dx}{(x-1)^{1/6}}$$

```
> subs(y(x)=",lhs(de45));
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)\right)-\frac{(2\,x+1)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right)}{x\,(x-1)}-\frac{1}{36}\,\frac{(16\,x^4+9)\,y(x)}{x^2\,(x-1)^2}=-\frac{1}{4}\,\frac{\_C1\,e^{(-2/3\,x)}}{x^{3/2}\,(x-1)^{1/6}}$$

$$-\frac{1}{6}\frac{\_C1\,e^{(-2/3\,x)}}{\sqrt{x}\,(x-1)^{7/6}}-\frac{2}{3}\frac{\_C1\,e^{(-2/3\,x)}}{\sqrt{x}\,(x-1)^{1/6}}+\frac{7}{36}\frac{\_C1\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}}{(x-1)^{13/6}}+\frac{2}{9}\frac{\_C1\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}}{(x-1)^{7/6}}$$
$$+\frac{4}{9}\frac{\_C1\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}}{(x-1)^{1/6}}-\frac{1}{4}\frac{\_C2\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{x^{3/2}\,(x-1)^{1/6}}-\frac{1}{6}\frac{\_C2\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{\sqrt{x}\,(x-1)^{7/6}}-\frac{2}{3}\frac{\_C2\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{\sqrt{x}\,(x-1)^{1/6}}$$
$$-\frac{\_C2\,(x-1)^{19/6}\,e^{(-2/3\,x)}\,e^{(4/3\,x)}}{x^{5/2}}+\frac{7}{36}\frac{\_C2\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{(x-1)^{13/6}}+\frac{2}{9}\frac{\_C2\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{(x-1)^{7/6}}$$
$$+3\frac{\_C2\,(x-1)^{13/6}\,e^{(-2/3\,x)}\,e^{(4/3\,x)}}{x^{3/2}}+\frac{4}{9}\frac{\_C2\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{(x-1)^{1/6}}-(2\,x+1)\left(\frac{1}{2}\frac{\_C1\,e^{(-2/3\,x)}}{\sqrt{x}\,(x-1)^{1/6}}\right.$$
$$-\frac{1}{6}\frac{\_C1\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}}{(x-1)^{7/6}}-\frac{2}{3}\frac{\_C1\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}}{(x-1)^{1/6}}+\frac{1}{2}\frac{\_C2\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{\sqrt{x}\,(x-1)^{1/6}}-\frac{1}{6}\frac{\_C2\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{(x-1)^{7/6}}$$
$$\left.-\frac{2}{3}\frac{\_C2\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{(x-1)^{1/6}}+\frac{\_C2\,(x-1)^{19/6}\,e^{(-2/3\,x)}\,e^{(4/3\,x)}}{x^{3/2}}\right)/(x\,(x-1))$$
$$-\frac{1}{36}\frac{(16\,x^4+9)\left(\frac{\_C1\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}}{(x-1)^{1/6}}+\frac{\_C2\sqrt{x}\,e^{(-2/3\,x)}\,\%1}{(x-1)^{1/6}}\right)}{x^2\,(x-1)^2}$$
$$\%1 := \int \frac{e^{(4/3\,x)}\,(x-1)^{10/3}}{x^2}\,dx$$

```
> simplify(");
```

$$\frac{1}{36}\left(36\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)x^4-72\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)x^3+36\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)x^2-72\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)x^3\right.$$
$$\left.+36\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)x^2+36\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)x-16\,\mathrm{y}(x)\,x^4-9\,\mathrm{y}(x)\right)\Big/\left(x^2\,(x-1)^2\right)=0$$

```
> p(x):=0;   q(x):=3*(x^4-x^2+1)/(2*x*(x^2-1))^2;
```

$$\mathrm{p}(x) := 0$$
$$\mathrm{q}(x) := \frac{3}{4}\frac{x^4-x^2+1}{x^2\,(x^2-1)^2}$$

```
> de50:=diff(y(x),x,x) + p(x)*diff(y(x),x) + q(x)*y(x) = 0;
```

$$de50 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)+\frac{3}{4}\frac{(x^4-x^2+1)\,\mathrm{y}(x)}{x^2\,(x^2-1)^2}=0$$

```
> soln50:=dsolve(de50,y(x));
```

???

```
> quit;
```