

閉ループ同定を用いたコントローラの逐次設計法

○原由有子, 中山淳, 大日方五郎

○Yuko Hara, Atsushi Nakayama, Goro Obinata

秋田大学

Akita University

キーワード：最小二乗法 (Least square method), 式誤差 (equation error),
Toeplitz行列 (Toeplitz matrix), 繰り返し計算アルゴリズム (Iteration Algorithm)

連絡先：〒010 秋田市手形学園町1-1 秋田大学 鉱山学部 機械工学科 大日方研究室
原由有子, Tel.: (0188) 89-2734, Fax.: (0188) 37-0405, E-mail: hara@uws53.akita-u.ac.jp

1. はじめに

本研究では、望ましい規範モデルを仮定し、それを近似するデジタル制御系の設計法を提案する。

考察の対象となるデジタル制御系は、コントローラと制御対象からなるフィードバック制御系であり、制御対象の伝達特性をあらわすパラメータは未知とする。

はじめに最小二乗法に基づき、制御対象の伝達特性をあらわすパラメータを推定し、次に制御系が規範モデルの特性を近似するためのコントローラを設計し、規範モデルの出力と設計した制御系の出力に対する評価を行う。

本研究の特長は、このパラメータ推定とコントローラ設計を交互に繰り返し行うことにある。それは繰り返し計算アルゴリズムを用いることにより、制御対象が解析的に定まらない場合や、あるいは不安定な制御対象である倒立振り子等のように、最初からコントローラを付加しなければ制御対象のパラメータ推定が困難となる場合にも適用できることを意味する。さらにこの設計法で用いたアルゴリズムでは、制御対象の伝達特性をあらわす関数の次数によらずに簡単にデジタルコントローラを決定することができる。

また、閉ループ系での近似が主目的であるため、正確な制御対象のパラメータ推定が行われたかどうかは重要ではなく、設計した制御系の性能が良いならば、目的は達成されたものとする。

る。

本報告では、規範モデル及び制御対象を与え、提案した繰り返し計算アルゴリズムを用いて制御対象のパラメータ推定とコントローラ設計を行い、得られた閉ループ系での結果の後に示す。

2. システム同定

入力と出力の観測データに基づき制御対象の入出力関係をあらわす数式モデルを決定することを、システム同定という。本研究では拡大最小二乗法によりシステム同定を行い、オンライン推定への適用を可能にするため、推定値の算出には逐次計算アルゴリズム²⁾を導入した。はじめに同定すべき対象システムを以下のように仮定する。

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e(k) \quad (1)$$

差分方程式では

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^p c_i r(k-i) + \sum_{i=0}^q d_i e(k-i) + e(k) \quad (2)$$

さらに

$$a^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$b^T = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

$$\begin{aligned} c^T &= [c_1, c_2, \dots, c_n] \\ d^T &= [d_1, d_2, \dots, d_n] \\ \theta^T &= [-a^T, b^T, -c^T, d^T] \end{aligned} \quad (3)$$

および

$$\begin{aligned} y^T(k) &= [y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)] \\ u^T(k) &= [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n)] \\ r^T(k) &= [r(k-1), r(k-2), \dots, r(k-p)] \\ e^T(k) &= [e(k-1), e(k-2), \dots, e(k-q)] \end{aligned} \quad (4)$$

を定義すると、差分方程式は

$$\begin{aligned} y(k) &= -y^T(k)a + u^T(k)b \\ &\quad - r^T(k)c + e^T(k)d + e(k) \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける。

また

$$\begin{aligned} \hat{r}(k) &= y(k) + y^T \hat{a}(k) - u^T \hat{b}(k) \\ \hat{e}(k) &= \hat{r}(k) + \hat{r}^T \hat{c}(k) - e^T \hat{d}(k) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{w}^T(N) = [y^T(N), u^T(N), \hat{r}^T(N), \hat{e}^T(N)] \quad (7)$$

を定義すると、逐次推定アルゴリズムは以下のようになる。ただしN時点での推定値を $\hat{\theta}(N)$ とする。

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(N+1) &= \hat{\theta}(N) + \hat{K}(N+1) [y(N+1) - \hat{w}^T(N+1) \hat{\theta}(N)] \\ \hat{K}(N+1) &= \hat{P}(N) \hat{w}^T(N+1) \{1 + \hat{w}^T(N+1) \hat{P}(N) \hat{w}^T(N+1)\}^{-1} \\ \hat{P}(N+1) &= \{I - \hat{K}(N+1) \hat{w}^T(N+1)\} \hat{P}(N) \end{aligned} \quad (8)$$

3. 閉ループ系の近似に基づく低次コントローラ的设计

制御対象と規範モデルの伝達関数をそれぞれ $G(z)$ 、 $M(z)$ とする。この章では、次式であらわされる制御対象とコントローラからなる閉ループ系 $W(z)$ が、与えられた規範モデル $M(z)$ の特性を近似するためのコントローラ $C(z)$ の設計を行う。

$$W(z) = \frac{G(z)C(z)}{1+G(z)C(z)} \quad (9)$$

コントローラ $C(z)$ はFIR型とし、次式で定義する。

$$C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m} \quad (10)$$

これより出力誤差評価関数は次式で与えられる。

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M(e^{j\omega}) - W(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (11)$$

しかしこれを最小にするコントローラ $C(z)$ の未知パラメータを求めるためには非線形な最適化問題を解かなければならない。そこで本研究では線形演算の範囲で解を求めるために出力誤差に $\{1+G(z)C(z)\}$ を乗じた次のような式誤差評価関数³⁾を用いた。

$$\begin{aligned} J_e &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M(e^{j\omega}) \{1 + G(e^{j\omega}) C(e^{j\omega})\} \\ &\quad - G(e^{j\omega}) C(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned} \quad (12)$$

これは

$$V(z) \triangleq \{1 - M(z)\} G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^{-k} \quad (13)$$

と定義すると、

$$J_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M(e^{j\omega}) - V(e^{j\omega}) C(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (14)$$

と表される。また $C_h(z)$ を規範モデル実現のための高次コントローラとすると

$$M(z) = G(z)C_h(z) / \{1 + G(z)C_h(z)\}$$

であり、式(14)は次のように表現することができる。

$$J_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{G(e^{j\omega})}{1 + G(e^{j\omega}) C_h(e^{j\omega})} \{C_h(e^{j\omega}) - C(e^{j\omega})\} \right|^2 d\omega \quad (15)$$

また式 (14) は $M(z)$ のインパルス応答系列 $\{m_k\}$ と $V(z)$ のインパルス応答系列 $\{v_k\}$ により、

$$Je = \alpha_0 - 2 \sum_{i=0}^m c_i \rho_i + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m c_i c_j \phi_{|i-j|} \quad (16)$$

$$\alpha_0 = \sum_{k=0}^{\infty} m_k^2, \quad \rho_i = \sum_{k=0}^{\infty} m_{k+i} v_k,$$

$$\phi_i = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k+i} v_k \quad i = 0, 1, \dots, m$$

と表される。

式 (16) の Je を最小にするコントローラのパラメータ $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ は、 Je の最小化のための必要条件から次式の $(m+1)$ 次元の連立一次方程式の解として得られる。

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_m \\ \phi_1 & \phi_0 & \dots & \phi_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m & \phi_{m-1} & \dots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_m \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで式 (16) の係数行列は $\{v_k\}$ の共分散で構成されていて、かつ Toeplitz 行列であるから、その形により常に正則である。したがって式 (16) は常に唯一解を持つ。またこの係数行列は対称な Toeplitz 行列であるので、解 $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ は逆行列の計算をしなくても簡単な高速演算アルゴリズム¹⁾によって $C(z)$ の次数 m の増加に対して逐次的に解くことができる。そのために式 (16) の代わりに

$$\Phi^{(i)} C^{(i)} = \rho^{(i)} \quad (18)$$

とおき、

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} c_0^{(i)} \\ c_1^{(i)} \\ \vdots \\ c_m^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (19)$$

と漸次的に $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ を求める高速演

算アルゴリズムを示す。ここで添字 (i) は i 次の係数であることを表している。

初期解を

$$\begin{aligned} c_0^{(0)} &= \rho_0 / \phi_0 \\ e_0^{(0)} &= -\phi_1 / \phi_0 \\ \lambda_0 &= \phi_0 + e_0^{(0)} \phi_1 \end{aligned} \quad (20)$$

として、漸化式 ($i = 0, 1, \dots, m-1$)

$$\begin{aligned} \theta_i &= \rho_{i+1} - \sum_{k=0}^i c_k^{(i)} \phi_{i+1-k} \\ c_{i+1}^{(i+1)} &= \theta_i / \lambda_i \\ c_j^{(i+1)} &= c_j^{(i)} + c_{i+1}^{(i+1)} e_{i-j}^{(i)}, j = 0, 1, \dots, i \\ \eta_i &= -\phi_{i+2} - \sum_{k=0}^i e_k^{(i)} \phi_{i+1-k} \\ e_{i+1}^{(i+1)} &= \eta_i / \lambda_i \\ e_j^{(i+1)} &= e_j^{(i)} + e_{i+1}^{(i+1)} e_{i-j}^{(i)}, j = 0, 1, \dots, i \\ \lambda_{i+1} &= \lambda_i - e_{i+1}^{(i+1)} \eta_i \end{aligned} \quad (21)$$

によってコントローラ $C(z)$ のパラメータ $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ が求まる。

4. システム同定とコントローラ設計の関連

実際の制御系の設計におけるシステム同定とコントローラ設計の不可分性について述べる。

開ループ系での近似が良いようにコントローラ設計を行っても、閉ループ系での近似は保障されない。つまり、開ループ系で近似されてもフィードバックさせることにより周波数特性が変化するため、閉ループ系での性能は保障されないことになる。

またシステム同定の観点からいうならば、観測雑音や設計したコントローラにより、精密なシステム同定を行うことが困難な場合がある。あるいは設計したコントローラの存在なしには

システム同定が行えない場合もある。これは閉ループ系の性能が制御対象の同定精度に左右され、その同定精度はコントローラの特性に左右されることにある。しかも完全な制御は同定を不可能にする場合がある。

以上のことから、制御対象が未知の場合に、閉ループ系での特性を近似的に実現しようとする設計問題においては、システム同定かコントローラ設計かどちらか一方のみ行うことは不完全であり、この不可分性からシステム同定とコントローラ設計は干渉しているといえ、それに配慮した方法が望まれる。

本研究で目的としている閉ループ特性の近似的実現では、制御対象のシステム同定の精度とコントローラ設計による閉ループ特性の近似精度は互いに関連があり、どちらか一方の精度を上げても目的を達することにはならない。そこで、閉ループ構成の中で制御対象の同定とコントローラ設計を繰り返す方法を提案する。提案した方法は、繰り返しの中で二つの方法のバランスが適切にとられるのではないかと、いう考えに基づいている。

5. シミュレーション

Fig. 2 に示す制御系が Fig. 1 に示す規範モデルの特性を近似するように設計する。

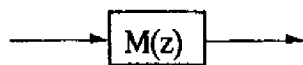


Fig. 1 Block Diagram of the Reference Model

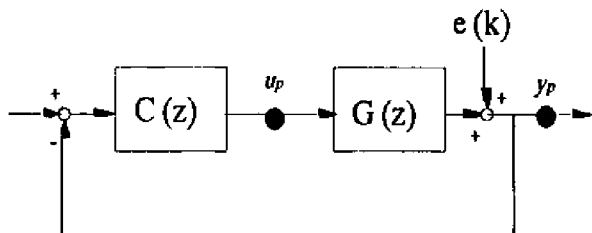


Fig. 2 Block Diagram of the Closed-Loop system

(1) 制御対象への入力信号 $u_p(k)$ と制御対象からの出力 $y_p(k)$ (SN比0.02の観測誤差を含む) 信号を検出し、その観測データに最小二乗法を適用することにより制御対象 $G(z)$ のシステム同定を行う。

(2) 同定により推定された制御対象のモデルを $\hat{G}(z)$ とし、与えられた規範モデル

$M(z)$ のインパルス応答 $\{m_k\}$ 及び $\{1-M(z)\}\hat{G}(z)$ のインパルス応答 $\{v_k\}$ から共分散系列を算出し、係数行列を作成する。Toeplitz行列を解く高速演算アルゴリズムにより、コントローラ $C(z)$ のパラメータを決定する。

(3) 制御対象 $G(z)$ と設計したコントローラ $C(z)$ で構成される閉ループ系の応答と、規範モデル $M(z)$ の応答を比較する。

(4) 設計したコントローラ $C(z)$ と制御対象 $G(z)$ の閉ループ系で (1) と同様にシステム同定を行い新たに制御対象のモデル $\hat{G}(z)$ を定める。以上を繰り返す。数値例は以下の通りである。

制御対象 (不安定) :

$$G(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 3.5z^{-1} + 4.68z^{-2} - 2.921z^{-3} + 0.8263z^{-4} - 0.085z^{-5}} \quad (22)$$

規範モデル (安定) :

$$M(z) = \frac{0.25z^{-2}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5z^{-2}} \quad (23)$$

初期コントローラ (安定化コントローラではない) :

$$C(z) = 0.001 \quad (24)$$

また、シミュレーション方法 (3) での評価では、次式で表わされる評価関数を用いた。ただし、 $y_m(k)$ は規範モデルのインパルス応答系列、 $y_c(k)$ は制御対象と設計したコントローラで構成される閉ループ系のインパルス応答系列である。

$$J = \frac{\sum_{k=1}^S \{y_m(k) - y_c(k)\}^2}{\sum_{k=1}^S \{y_m(k)\}^2} \quad (25)$$

ただし、 S は応答を評価するのに十分な値をとるものとする。

6. シミュレーション結果

シュミレーションで得られたコントローラは以下の通りである。

2次コントローラ

$$C(z) = 0.176 - 0.338z^{-1} + 0.170z^{-2} \quad (26)$$

3次コントローラ

$$C(z) = 0.234 - 0.519z^{-1} + 0.360z^{-2} - 0.067z^{-3} \quad (27)$$

4次コントローラ

$$C(z) = 0.242 - 0.546z^{-1} + 0.397z^{-2} - 0.091z^{-3} + 0.005z^{-4} \quad (28)$$

Fig. 3 に制御対象と設計したコントローラから構成された閉ループ系におけるインパルス応答を示す。ここでmは設計したコントローラの次数である。

Fig. 4 に設計したコントローラの次数を上げた場合の評価の推移（繰り返し計算した結果の平均）を示す。

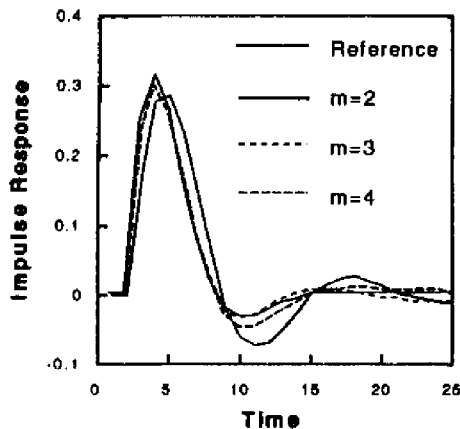


Fig. 3 Impulse Responses of the Reference Model and the Closed-Loop system

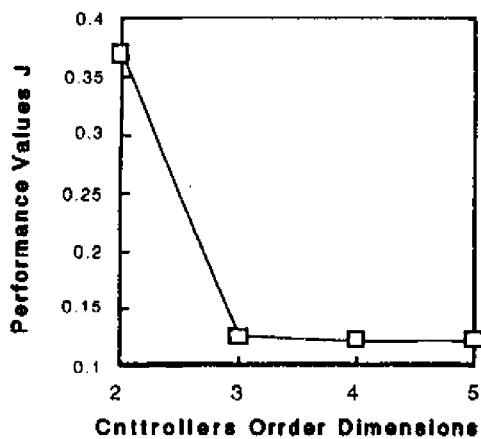


Fig. 4 Comparison of the Controller- Order on the Performance Values

この2つの結果から、コントローラの次数が2次の場合に比べ、3次の方が閉ループ系の性能が良いのが歴然としている。またその性能も2次から3次への変化に対し、3次からそれ以上への変化はなだらかである。このことから今回の数値例では、制御系が規範モデルを近似するためには、3次のコントローラで十分であると思われる。また、本研究で提案したアルゴリズムは制御対象の次元によらず、簡単にコントローラを定めることができる良さがある。

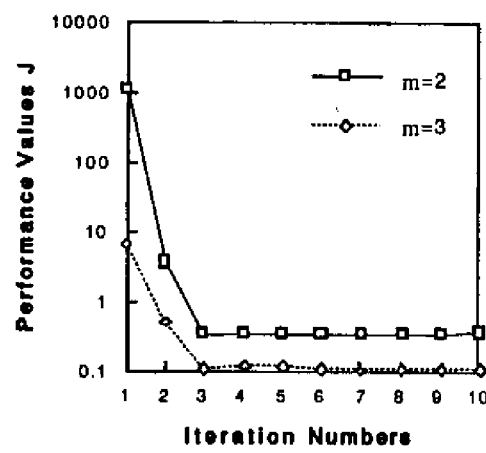


Fig.5 Comparison of the Iteration

Fig. 5 に繰り返すことによる評価値の推移を示す。このシミュレーションでは、繰り返し計算の途中で閉ループ系の応答が発散することもあったが、そのままの計算結果を用いて繰り返し計算を進めていくと、最終的には制御対象のパラメータ推定とそれに対するコントローラを設計することができた。ただし、応答が発散した場合S=500時点までの評価をとりFig. 5での値としている。設計したコントローラの次数に関わらず共通していえることは、繰り返し計算を5回から8回程度行うことで制御系に対する最適と思われるコントローラが求まった。

7. おわりに

開ループ系において、制御対象の同定とコントローラの設計を繰り返し行う方法を提案した。コントローラはFIR型であり、その次数は任意に与えることができるという特徴がある。同定の方法としては通常の大最小二乗法を用いた。

同定と設計ともに線形演算で構成され高速なアルゴリズムが利用できる。シュミレーションにより、不安定な制御対象に対して、本方法が有効に使用できることが確認された。

同定と設計を同時に行う方法と考えられる適応制御との比較や、同定と設計の繰り返しにおけるバランスの取り方、またその際に考慮すべき評価への周波数重みの導入、さらには同定の評価と設計の評価のバランスなど多くの課題がある。

参 考 文 献

- 1) 中村 富雄：最小 2 乗近似に基づく線形離散時間制御系の設計に関する研究，昭和 63 年度 東北大学博士論文
- 2) 中溝 高好：線形離散時間システムの同定手法，システムと制御，Vol.25, No.8, 476/489, (1981)
- 3) Goro Obinata et.al. : An Equation Error Method for the Design of Digital Controllers, IEEE. Trans. Auto. Contr., Vol.33, No.4, 384/386, (1988)
- 4) 杉江、岡田：システム同定と補償器の統合化設計，システム／制御／情報，Vol.41, No.1, 6/11, (1997)