

計測自動制御学会東北支部 第170回研究集会 (1997.10.25)

資料番号 170-13

非線形モデル予測制御の二重管式熱交換器への 適用

Temperature control of heat exchanger using nonlinear model predictive control

リーラキャティサクル ティパヤ, ○小尾秀志, 吉田雅俊, 松本繁

Leelakiatisakul Tipaya, Obi Syuzi, Yoshida Masatoshi,
Matsumoto Shigeru

東北大学大学院工学研究科化学工学専攻

Tohoku University

キーワード: モデル予測制御(model predictive control) 非線形(nonlinear)

連絡先: 〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉 東北大学大学院 工学研究科
化学工学専攻 松本研究室

小尾秀志 Tel.: (022)217-7260, Fax.: (022)271-7261

E-mail: sobi@pse.che.tohoku.ac.jp

1. 緒言

化学プロセスには入力と出力の関係が非線形であるものが数多く存在する。これらに対して、多くの非線形制御法の適用が試みられているが、未だに、確立された制御法が得られたとは言い難い。本報では、それらの制御法のうち、プロセスの動的挙動を表す物理モデルを利用した、モデル予測制御の概念に基づく、非線形制御系の設計法についての考察を行なう。本法も、従来より数多く試みられている制御法のうちの一つであるが、その安定性やロバスト性等の制御性能の評価は、シミュレーションに

依るものが多く、より一般的な評価法を示した報告は少ない¹⁾。そこで、本報では、新たな視点からの、本制御系の収束性に関する考察を示す。また、具体例として、二重管式熱交換器を用いて、本法に基づく考察を行なう。

2. 制御系の基本構造

モデル予測制御では、制御系の設計は離散時間系で行なう。このとき、実プロセスの動的挙動は次式で表されるものとする。

$$y(k+1) = F_p(y(k), u(k)) \quad F_p, y, u \in R^1 \quad (1)$$

(1)式中 y はプロセスの出力を表し、これを制御の際の被制御変数とする。また、 u は入力を表し、これを制御の際の操作変数とする。これに対するモデル式を次式で表す。

$$y_m(k+1) = F_m(y(k), u(k)) \quad F_m, y_m \in R^1 \quad (2)$$

F_p 及び F_m は $y(k)$ 及び $u(k)$ の非線形な関数であり、これらがとり得る値の範囲において、なめらかな関数であるとする。

制御則は、(2)式より得られるモデル予測値がこれに対する目標値に等しくなるように、すなわち次式

$$\alpha y(k) + (1 - \alpha)y_{set} = y_m(k+1) = F_m(y(k), u(k)) \quad (3)$$

を満足する $u(k)$ を求めるというものである。制御則(3)では、現時刻において観測された出力 $y(k)$ を用いて操作変数を算出しているゆえ、出力フィードバックを行なっていることになる。また、ここでは F_m は u の非線形な関数としているため、必ずしも明示的な関数から求められる訳では無く、その算出は多くの場合、繰り返し演算等を用いることになる。式中 y_{set} は設定値であり、ここでは定数とする。 α は「目標軌道算出フィルタのパラメータ」であり、 $0 \leq \alpha < 1$ の値を取る。 $\alpha = 0$ とした場合は、次のステップで被制御変数を設定値に等しくする制御動作となる。しかし、実際には、実プロセスとモデルとの間の誤差の影響などで、両者は必ずしも一

致するとは限らず、ずれが生じる。その際、 $y(k)$ と y_{set} の差が大きければ、一般に大きな制御動作が必要となり、それだけずれも大きくなり、結果としてシステムが不安定となる可能性がある。 α は、この値を調整することで、設定値を現時刻の被制御変数の値に近づけ、システムが不安定となる可能性を防ぐ役割を果たすと考えられる。

3. 制御系の収束条件に関する考察

(1)式は、繰り返し演算とみなすことが出来る。また、制御則(3)は出力フィードバックゆえ、 u は y の関数となる。 u を y のなめらかな関数と考え、 $F_p(y, u(y))$ は、その値域である完備な集合 Ω で定義されているとする。このとき

$$\sup_{y \in \Omega} \left| \frac{dF_p}{dy} \right| < 1 \quad (4)$$

なら、

$$y^* = F_p(y^*, u(y^*)) \quad (5)$$

を満足する $y^* \in \Omega$ が一意に存在し、任意の初期値 $y(0) \in \Omega$ に対して

$$y(k+1) = F_p(y(k), u(y(k))) \quad (6)$$

で定義される出力 $y(k)$ は、 $k \rightarrow \infty$ のとき、(5)式の y^* に収束する(付記1参照)。以下では(4)を「収束条件」と呼びことにするが、これを展開すると次式が得られる(付記2参照)。

$$\sup_{y \in \Omega} \left\{ \left| \frac{\partial F_p(y, u(y))}{\partial y} + \frac{\partial F_p(y, u(y))}{\partial u} \left(\frac{\partial F_m(y, u(y))}{\partial u} \right)^{-1} \left(\alpha - \frac{\partial F_m(y, u(y))}{\partial y} \right) \right| \right\} < 1 \quad (7)$$

4. モデル式の導出

化学プロセスの動的挙動は、物質収支式及び熱収支式、すなわち次式に示すような、微分方程式の形で表現できるものが少なくない。

$$\frac{dy}{dt} = f_p(y, u) \quad y, u, f \in \mathbf{R}^1 \quad (8)$$

式中、 y はプロセスの出力を表し、これを制御の際の被制御変数とする。 u は入力であり、これを制御の際の操作変数とする。 f_p は y 及び u の非線形な関数であり、これらがとり得る値の範囲において、なめらかな関数であるとする。次に、モデル式を次式で表す。

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m(y, u) \quad y, u, f_m \in R^1 \quad (9)$$

式中 f_m は、プロセスからの出力(被制御変数) y 及び操作変数 u の非線形な関数であり、これらがとり得る値の範囲において、なめらかな関数であるとする。

4.1 打ち切り次数の影響

制御系設計の際に用いるモデル式((2)式)は(9)式を用いて、離散化することにより得られるが、一般には解析的な離散化は難しい。そこで、Taylor級数展開により離散化を行なう。まず最初に、(9)式は(8)式に等しい、すなわち「完全モデル」

$$f_p = f_m \equiv f$$

である場合の考察を行なう。離散化の際の打ち切り次数を n 次とすると、実プロセスとモデル式との間には、

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\Delta t^i}{i!} \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right|_{y(k), u(k)} \quad (10)$$

で表される「予測誤差」が存在することになり、本制御法を適用した場合のプロセス出力は、次式で示す漸化式で表されることになる。

$$y(k+1) = \alpha y(k) + (1-\alpha)y_{set} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\Delta t^i}{i!} \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right|_{y(k), u(y(k))} \quad (11)$$

収束条件(4)が成立していると仮定した場合、定常状態では、(11)式中で

$$y(k) = y(k+1) = y^*, \quad \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right| = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

が成立するゆえ、結果として $y^* = y_{set}$ が成立することが分る。すなわち、連続時間系におけるモデル式が完全モデルである場合、それを用いて制御系を設計した場合、収束条件(4)が成立する範囲ならば、離散化の際の打ち切り次数に拘らず、被制御変数は設定値に収束することが分る。

4.2 実プロセスとモデル式の間パラメータ誤差が存在する場合

前章では、連続系におけるモデル式は、実際のプロセスの動的挙動を正確に表すと仮定した。しかし、その様なモデルが得られることは現実には不可能であり、実際のプロセス(以下では「実プロセス」と称する)の動的挙動と、それを表すモデル式との間には、何らかの「誤差」が存在する。本章では、その原因はモデル式に含まれるパラメータ値と実際の値とが一致しないためであると仮定し、この「パラメータ誤差」の制御性能に対する影響を考察する。

モデル式に含まれるパラメータを $p = [p_1 \cdots p_p]^T$ で表す。このとき、連続時間系におけるモデル式を次式で表す。

$$\frac{dy_m}{dt} = f(y, u; p) \quad y, u, f \in \mathbf{R}^1 \quad p \in \mathbf{R}^p \quad (12)$$

これに対して、実際のプロセスの動的挙動は、モデル式のパラメータに誤差 $\Delta p = [\Delta p_1 \cdots \Delta p_p]^T$ が加わったものとして表せるとする(次式)。

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u; p + \Delta p) \quad y, u, f \in \mathbf{R}^1 \quad p, \Delta p \in \mathbf{R}^p \quad (13)$$

このとき、本制御法を適用した場合のプロセス出力は、次式で示す漸化式で表されることになる。

$$\begin{aligned} y(k+1) = & \alpha y(k) + (1-\alpha)y_{set} \\ & + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\Delta t^i}{i!} \frac{d^{i-1}f}{dt^{i-1}} \Big|_{y(k), u(y(k)); p} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i}{i!} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial p_i} \Big|_{y(k), u(y(k)); p+\Gamma_i \Delta p} \Delta p_i \right) \end{aligned} \quad (14)$$

このとき、定常状態における出力の値を y^* とすると次式が得られる。

$$y^* = y_{set} + \frac{\Delta t}{1-\alpha} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial p_i} \Big|_{y^*, u^*; p+\Gamma_i \Delta p} \Delta p_i \quad (15)$$

すなわち、定常状態誤差が

$$\frac{\Delta t}{1-\alpha} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial p_i} \Big|_{y^*, u^*; p+\Gamma_i \Delta p} \Delta p_i$$

だけ残ることが分る。しかしながら、制御則(3)の代りに次式で示す「予測誤差フィードバック制御則」を採用した場合(次式)、

$$\begin{aligned}\alpha y(k) + (1 - \alpha)y_{set} &= F_m(y(k), u(k)) + e(k - 1) \\ e(k - 1) &\equiv y(k) - y_m(k)\end{aligned}$$

プロセス出力は次式で示す漸化式で表されることになり

$$y(k + 1) = \alpha y(k) + (1 - \alpha)y_{set} - e(k - 1) + e(k) \quad (16)$$

システムが安定であれば、定常状態において $e(k) = e^* = \text{一定}$ 及び $y(k) = y^* = \text{一定}$ となることから、オフセットが取り除かれることが分る。

5. 適用例

前述の考察の適用例として、二重管式熱交換器(Fig.1参照)を取上げる。

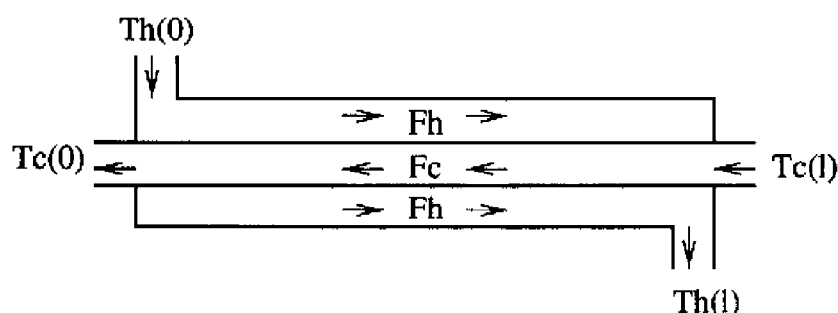


Fig. 1 二重管型熱交換器の概念図

高温側及び低温側の管内温度の動的挙動は、場所と時間の関数、すなわち「分布定数系」で表されることになるが、ここでは、これを集中定数近似で表す。このとき、高温流体の出口温度 $T_h(L)$ 及び低温流体の出口温度 $T_c(0)$ の動的挙動を次式に示す。ここで、被制御変数を高温流体の出口温度 $T_h(L)$ とし、操作変数を低温流体の流量 F_c とすると、本プロセスは非線形プロセスとなる。また、考察の際に用いた式中のパラメータ値を Table 1に示す。

$$\frac{dT_h(L)}{dt} = \frac{2F_h}{\rho_h S_h L} (T_h(0) - T_h(L)) - \frac{2\pi d_{2,av} U \Delta T_{ln}}{\rho_h C_{p,h} S_h} \quad (17)$$

$$\frac{dT_c(0)}{dt} = \frac{2F_c}{\rho_c S_c L} (T_c(0) - T_c(L)) + \frac{2\pi d_{2,av} U \Delta T_{ln}}{\rho_c C_{p,c} S_c}$$

$$\Delta T_{ln} \equiv \frac{(T_h(L) - T_c(L)) - (T_h(0) - T_c(0))}{\ln \frac{T_h(L) - T_c(L)}{T_h(0) - T_c(0)}} \quad (18)$$

Table 1 パラメータ値

S_h	高温流体流路断面積	$2.0 \times 10^{-3} m^2$
S_c	低温流体流路断面積	$2.0 \times 10^{-4} m^2$
l	管長	$2.0m$
U	総括伝熱係数	$780(J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot K^{-1})$
A_{av}	伝熱面積	$0.12m^2$
C_p	流体の比熱	$4200(J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1})$
ρ	流体の密度	$1000(kgm^{-3})$

5.1 収束性に関する考察

プロセスとモデルのパラメータの間に誤差を与えることにより、制御性能への影響の考察を行なった。この際、プロセスと仮定したモデル式は、打ち切り次数を4次としたTalyor級数展開により導出した。これに対してモデル式は、打ち切り次数を2次としたTalyor級数展開により導出した。図2は、高温流体の入り口温度 $80^\circ C$ 、流量 $0.1kg \cdot s^{-1}$ 、低温流体の入り口温度 $10^\circ C$ 、流量 $0.15kg \cdot s^{-1}$ の際の定常状態において、モデルに含まれるパラメータのうち、総括伝熱係数 U_m の値を、実プロセスの値 U_p に対して $0.5 \sim 2.5$ 倍まで変化させた際の収束指標の変化の様子を示している。これより、モデル誤差が存在しない場合は収束性がもっとも良好になることがわかるが、これを少しでもずれると、収束性が大きく損なわれることが分る。

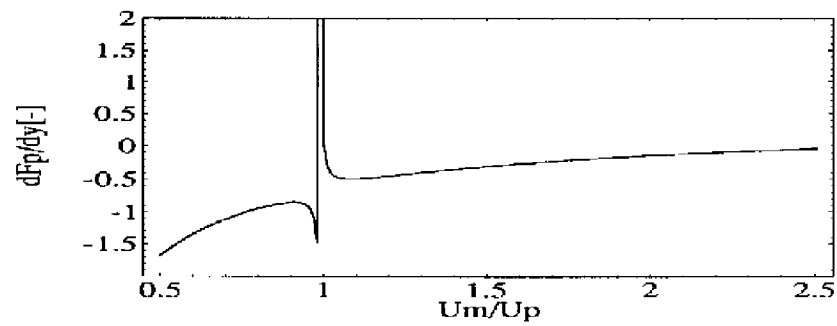


Fig. 2 パラメータ誤差の収束性への影響

次に、図3は、先程と同様の定常状態においての、離散時間間隔の収束性への影響を示している。これより約3秒以上では制御が出来無いことが分る。

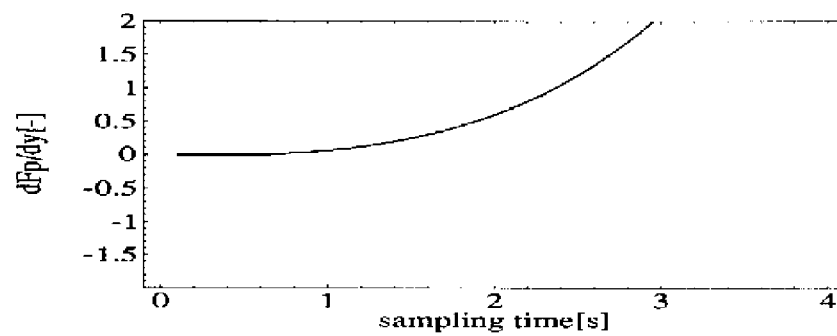


Fig. 3 総括伝熱係数の収束性への影響

6. 結論

本報では、プロセスの動的挙動を表す物理モデルを出発点とした、モデル予測制御の概念に基づく、非線形制御系の設計法について述べ、その際問題となる、制御系の収束性に関する考察を行なった。非線形モデル予測制御による制御系の設計の際問題となる、モデル式の打ち切り次数や、プロセス/モデル間の誤差に関する新たな考察法と、その適用例を示した。この方法を用いれば、パラメータ推定を行ないながら制御を行なう場合、どのパラメータ値を優先的に更新させるべきかといったことに対して、事前の判断基準を与えることなどが出来る。今後の課題としては、予測誤差フィードバックを行なった際の収束性に関する考察をさらに進めることなどが挙げられる。

付記 1

初期値 $y(0)$ に対して(6)式によって帰納的に定義される出力の列 $\{y(k)\}_{k=0,1,2,\dots}$ を考える。平均値の定理から各 k に対して

$$F_p(y(k+1), u(y(k+1))) - F_p(y(k), u(y(k))) = \frac{dF_p}{dy} \Big|_{y=\xi_k} (y(k+1) - y(k)) \quad (19)$$

を満足する ξ_k が $y(k)$ と $y(k+1)$ の間に取れる。ここで、

$$a \equiv \sup_{y \in \Omega} \left| \frac{dF_p}{dy} \right|$$

とおくと、(19)式より

$$|y(k+2) - y(k+1)| \leq a |y(k+1) - y(k)| \quad (20)$$

が得られる。(20)式より

$$|y(k+1) - y(k)| \leq a^k |y(1) - y(0)| \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で、 $m > n$ のとき、

$$\begin{aligned} & |y(m) - y(n)| \\ & \leq |y(m) - y(m-1)| + \dots + |y(n+1) - y(n)| \\ & \leq (a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a^n) |y(1) - y(0)| \\ & < \frac{a^n}{1-a} |y(1) - y(0)| \end{aligned} \quad (21)$$

$0 \leq a < 1$ ゆえ、 $m > n \rightarrow \infty$ なら

$$|y(m) - y(n)| \rightarrow 0$$

となり、 $\{y(k)\}$ はCauchy列である。更に、 $\{y(k)\} \subset \Omega$ ゆえ、 Ω の完備性より $\{y(k)\}$ はある $y^* \in \Omega$ に収束する。このとき、(6)式で $k \rightarrow \infty$ とすると、関数 $F_p(y, u(k))$ の連続性から

$$y^* = F_p(y^*, u(y^*))$$

を得る。更に、 $z^* \in \Omega$ で、

$$z^* = F_p(z^*, u(z^*))$$

とすると(20)式と同様にして

$$|y^* - z^*| = |F_p(y^*, u(y^*)) - F_p(z^*, u(z^*))| \leq a |y^* - z^*|$$

を得るが、 $0 \leq a < 1$ より、

$$y^* - z^* = 0$$

すなわち、

$$y^* = z^*$$

が得られ、これより、 y^* の一意性が示せた。

付記 2

u は y の関数であるが、必ずしも明示的な関数から得られるとは限らないため、多くの場合 $\frac{du}{dy}$ を直接求めることは出来ない。そこで、以下のような考察を行なう。

制御則(3) の両辺を $y(k)$ により微分し $\frac{du}{dy}$ について総めると次式が得られる。但し、 y_{set} は定数としているため、 $\frac{dy_{set}}{dy} = 0$ である。

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{\partial F_m(y, u(y))}{\partial u} \right)^{-1} \left(\alpha - \frac{\partial F_m(y, u(y))}{\partial y} \right) \quad (22)$$

これより次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{dF_p}{dy} &= \frac{\partial F_p(y, u(y))}{\partial y} + \frac{\partial F_p(y, u(y))}{\partial u} \frac{du}{dy} \\ &= \frac{\partial F_p(y, u(y))}{\partial y} + \frac{\partial F_p(y, u(y))}{\partial u} \left(\frac{\partial F_m(y, u(y))}{\partial u} \right)^{-1} \left(\alpha - \frac{\partial F_m(y, u(y))}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{23}$$

よって、収束条件として(7)が得られ、(7)を満足するとき、本制御法により、被制御変数 y は(5)式を満足する y^* に収束する。

参考文献

- 1) J. Ortega, AICHE J.,42,3388(1996)