

多入出力非線形系のモデル規範形適応制御

Model Reference Adaptive Control System for Multi-Input and Multi-Output Nonlinear System

○高橋吉徳, 大久保重範

○Yoshinori Takahashi, Shigenori Okubo,

山形大学

Yamagata University

キーワード: 非線形適応制御 (nonlinear adaptive control), 大域的安定性 (global stability), 多入出力システム (multi-input and multi-output system), 調整則 (adjustable law), 強正実性 (strictly positive real)

連絡先: 〒992 米沢市城南4-3-18 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室

高橋吉徳, Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: takayosi@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

本論文ではある非線形関数をノルムの大きさで分類し, 大域的安定性が保証されるMRACSの設計とその証明を示す. 制御対象に非線形関数 $f(v(t))$ が含まれ $f(v(t))$ のノルムが $v(t)$ のノルムの中間関数で抑えられる非線形系($\|f(v(t))\| \leq \alpha + \beta\|v(t)\|^\gamma$)を扱う. 本論文ではパラメータ誤差を含めたMRACSの全系の状態方程式を精密に記述し, 全状態に関する2次形式の微分不等式を導き, この微分不等式を解析的に解くことによって大域的安定性を証明する. この場合パラメータ誤差が時間的に指数減衰することが重要になる. 微分不等式を使った証明は非線形指数 γ の大きさによって3ケース($0 \leq \gamma < 1$, $1 \leq \gamma < 2$, $2 \leq \gamma$)に分けて扱う. ここでは $\gamma = 5$ で外乱がある場合のシミュレーションを示し, 本設計法の有効性と系の大域的安定性を確認する.

2. 問題の設定

制御対象を(1)~(3)式, モデルを(4), (5)式とする.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(v(t)) + d(t) \quad (1)$$

$$v(t) = C_f x(t) + d_v(t) \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (3)$$

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r_m(t) \quad (4)$$

$$y_m = C_m x_m(t) \quad (5)$$

各ベクトルの次元は $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^l$, $v(t) \in R^{l'}$, $f(v(t)) \in R^{l'}$, $y(t) \in R^l$, $d(t) \in R^n$, $d_v(t) \in R^{l'}$, $d_0(t) \in R^l$, $x_m(t) \in R^{n_m}$, $r_m(t) \in R^{l'_m}$, $y_m(t) \in R^l$ である. (C, A, B) , (C_m, A_m, B_m) は可制御・可観測でモデルは安定である. $C(pI - A)^{-1}B$ の零点は左半平面に存在する. $d(t)$, $d_0(t)$, $d_v(t)$ は有界な外乱とする. 利用可能な状態は $y(t)$, $v(t)$ で

ある。また非線形関数 $f(v(t))$ は既知であり、以下の式が成り立つものとする。

$$\|f(v(t))\| \leq \alpha + \beta \|v(t)\|^\gamma \quad (6)$$

$$(\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0)$$

3. 制御系の設計

微分演算子 $p = d/dt$ を用いて $y(t)$, $y_m(t)$ の伝達関数表示を行う。 (C, A, B) , (C_m, A_m, B_m) より、

$$C(pI - A)^{-1}B = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (7)$$

$$C(pI - A)^{-1}B_f = \frac{N_f(p)}{D(p)} \quad (8)$$

$$C_m(pI - A_m)^{-1}B_m = \frac{N_m(p)}{D_m(p)} \quad (9)$$

ここで、 $D(p) = |pI - A|$, $D_m(p) = |pI - A_m|$ であり、 $\partial D(p) = n$, $\partial D_m(p) = n_m$ である。上式より $y(t)$, $y_m(t)$ は以下のようになる。

$$D(p)y(t) = N(p)u(t) + N_f(p)f(v(t)) + w(t) \quad (10)$$

$$D_m(p)y_m(t) = N_m(p)r_m(t) \quad (11)$$

$$w(t) = C \text{adj}(pI - A)d(t) + D(p)d_0(t) \quad (12)$$

また $N(p)$, $N_f(p)$, $N_m(p)$ については、

$$N(p) = \text{diag}(p^{\sigma_i})N_r + \tilde{N}(p) \quad (13)$$

$$N_f(p) = \text{diag}(p^{\sigma_{f_i}})N_{f_r} + \tilde{N}_f(p) \quad (14)$$

$$N_m(p) = \text{diag}(p^{\sigma_{m_i}})N_{m_r} + \tilde{N}_m(p) \quad (15)$$

と分解でき、 $\partial_r N(p) = \sigma_i$, $\partial_r N_f(p) = \sigma_{f_i}$, $\partial_r N_m(p) = \sigma_{m_i}$ であり、 $N(p)$ は行プロパー ($|N_r| \neq 0$) であるものとする。また既知のモニックな多項式 $D_d(p)$ を与えると外乱 $d(t)$, $d_0(t)$ は下式を満たすものとする。

$$D_d(p)d(t) = 0, D_d(p)d_0(t) = 0, \partial D_d(p) = n_d \quad (16)$$

従って $w(t)$ は次式を満たす。

$$D_d(p)w(t) = 0 \quad (17)$$

次に $\partial T(p) = \rho$ ($\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \sigma_i$) のモニックで安定な多項式 $T(p)$ を選び、次式より $R(p)$, $S(p)$ を求める。

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(p)R(p) + S(p) \quad (18)$$

上式の各項式の次数の関係より $\partial R(p) = \rho + n_m - n_d - n$, $\partial S(p) \leq n_d + n - 1$ となる。出力誤差を $e(t) = y(t) - y_m(t)$ と与えると (18) 式より

$$T(p)D_m(p)e(t) = D_d(p)D(p)R(p)y(t) + S(p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (19)$$

となる。ここで、 $|Q(p)|$ が安定多項式であるような多項式行列 $Q(p)$ を考えて次のように表す。

$$Q(p) = \text{diag}(p^{\rho+n_m-n+\sigma_i}) + \tilde{Q}(p) \quad (20)$$

ただし、 $\partial_r \tilde{Q}(p) < \rho + n_m - n + \sigma_i$ とする。

この $Q(p)$ を使うと (19) 式は以下のように記述できる。

$$e(t) = \frac{Q(p)N_r}{T(p)D_m(p)} [u(t) + N_r^{-1}Q(p)^{-1} \times \{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\}u(t) + N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p)y(t) + N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_f(p)f(v(t)) - N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t)] \quad (21)$$

$e(t) = 0$ より

$$u(t) = N_r^{-1}Q(p)^{-1} \{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\}u(t) - N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p)y(t) - N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_f(p)f(v(t)) + u_m(t) \quad (22)$$

外部信号 $u_m(t) = N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t)$ である。上式の伝達関数行列項を状態空間表示で表すと以下のようになる。

$$N_r^{-1}Q(p)^{-1} \{D_d(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\} = H_1(Ip - F_1)^{-1}G_1 \quad (23)$$

$$N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p) = E_2 + H_2(Ip - F_2)^{-1}G_2 \quad (24)$$

$$N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_f(p) = E_3 + H_3(Ip - F_3)^{-1}G_3 \quad (25)$$

ここで $|pI - F_i| = |Q(p)|$ ($i = 1 \sim 4$) とする。ただし $u(t)$ に信号の微分を使わないために次数についてつぎの制約があり、これらは満たされているものとする。

$$n_m - \sigma_{m_i} \geq n - \sigma_i \quad (i = 1 \sim l) \quad (26)$$

$$\sigma_i \geq \sigma_{f_i} \quad (i = 1 \sim l) \quad (27)$$

$$\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \sigma_i \quad (i = 1 \sim l) \quad (28)$$

このとき $e(t)$ は $T(p)D_m(p) = 0$ を満たし、 $e(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となる。以上の設計はモデル追従形制御系である。

つぎに制御対象のパラメータが未知である場合のモデル規範形制御系の設計について述べる。制御入力 $u(t)$ は内部状態を使うと以下のように記述できる。

$$\begin{aligned} u(t) &= C_r r_h(t) - H_1 \zeta_1(t) \\ &\quad - (E_2 y(t) + H_2 \zeta_2(t)) \\ &\quad - (E_3 f(v(t)) + H_3 \zeta_3(t)) \\ &= [C_r, -H_1, -E_2, -H_2, -E_3, -H_3] \zeta(t) \\ &= \Theta \zeta(t) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\zeta^T(t) = [r_h^T(t), \zeta_1^T(t), y^T(t), \zeta_2^T(t), f^T(v(t)), \zeta_3^T(t)] \quad (30)$$

$$\dot{\zeta}_1(t) = F_1 \zeta_1(t) + G_1 u(t) \quad (31)$$

$$\dot{\zeta}_2(t) = F_2 \zeta_2(t) + G_2 y(t) \quad (32)$$

$$\dot{\zeta}_3(t) = F_3 \zeta_3(t) + G_3 f(v(t)) \quad (33)$$

ここで $C_r = N_r^{-1}$, $r_h(t) = Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t)$ である。未知パラメータを調整するための基本式は $u(t)$ を定める(29)式と未知パラメータに関して同じ構造を持つようにしなければならない。そ

のために(21)式の両辺で $r_m(t) = 0$ とおき、左辺の $e(t)$ を $y(t)$ に変え、右辺の $r_m(t)$ を $r_m(t) = 0$ とした式から、制御対象の別表現を求める。

$$\begin{aligned} &u(t)/(T(p)D_m(p)) \\ &= -N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)N_f(p) - Q(p)N_r\} \\ &\quad \cdot [u(t)/(T(p)D_m(p))] \\ &\quad - N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p)[y(t)/(T(p)D_m(p))] \\ &\quad - N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_f(p) \\ &\quad \cdot [f(v(t))/(T(p)D_m(p))] \\ &\quad + N_r^{-1}Q(p)^{-1}y(t) \\ &= [C_r, -H_1, -E_2, -H_2, -E_3, -H_3]\xi(t) \\ &= \Theta \xi(t) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \xi^T(t) &= \{[Q(p)^{-1}y(t)]^T, \xi_1^T(t), \\ &\quad [y(t)/(T(p)D_m(p))]^T, \xi_2^T(t), \\ &\quad [f(v(t))/T(p)D_m(p)]^T, \xi_3^T(t)\} \end{aligned} \quad (35)$$

ここで $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ はつぎの系により構成される。

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1 \xi_1(t) + G_1 \{u(t)/(T(p)D_m(p))\} \quad (36)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2 \xi_2(t) + G_2 \{y(t)/(T(p)D_m(p))\} \quad (37)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3 \xi_3(t) + G_3 \{f(v(t))/T(p)D_m(p)\} \quad (38)$$

未知パラメータ Θ の推定は以下の式に Kreisselmeier の指数減数形調整則を使って行う。

$$u_p(t) = u(t)/(T(p)D_m(p)) = \Theta \xi(t) \quad (39)$$

Θ の推定値を $\hat{\Theta}(t)$ とすれば、つぎのように構成される。

$$J(t) = \int_0^t \{\hat{\Theta}(t)\xi(\tau) - u_p(\tau)\}^T \cdot \{\hat{\Theta}(t)\xi(\tau) - u_p(\tau)\} e^{-q(t-\tau)} d\tau \rightarrow \min \quad (40)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\lambda/2\partial J(t)/\partial \hat{\Theta}(t) \quad (41)$$

$$\dot{\hat{\Omega}}(t) = -q\hat{\Omega}(t) + \xi(t)\xi^T(t), \hat{\Omega}(0) = 0 \quad (42)$$

$$\dot{\hat{\Lambda}}(t) = -q\hat{\Lambda}(t) + u_p(t)\xi^T(t), \hat{\Lambda}(0) = 0 \quad (43)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\lambda\{\hat{\Theta}(t)\hat{\Omega}(t) - \hat{\Lambda}(t)\} \quad (44)$$

ここで $\lambda > 0, q > 0, \Theta(t) \in R^{l \times N_1}, \Omega(t) \in R^{N_1 \times N_1}, \Lambda(t) \in R^{l \times N_1}$ である。以下にパラメータの収束を示す。 $\Delta\Theta(t) = \Theta(t) - \Theta$ として、 $\Lambda(t) = \Theta\Omega(t)$ に注意すれば、つぎの関係を得る。

$$\Delta\dot{\Theta}(t) = -\lambda\Delta\Theta(t)\Omega(t) \quad (45)$$

$$W(t) = T_r\{\Delta\Theta(t)\Delta\Theta^T(t)\} \quad (46)$$

$$\dot{W}(t) = -2\lambda T_r\{\Delta\Theta(t)\Omega(t)\Delta\Theta^T(t)\} \quad (47)$$

信号 $\xi(t)$ について常時励振(P.E.)であるものとし、(48)式を満たしているものとすれば、(49)式が成立する。

$$\int_t^{t+T} \xi(\tau)\xi^T(\tau)d\tau \geq kI > 0, t \geq -T, T > 0 \quad (48)$$

$$\Omega(t+T) \geq e^{-qT} \int_t^{t+T} \xi(\tau)\xi^T(\tau)d\tau \geq ke^{-qT}I \quad (49)$$

(47)式と(49)式から(50)式を得る。

$$\dot{W}(t) \leq -2\lambda ke^{-qT}W(t) \quad (50)$$

これより

$$\|\Delta\Theta(t)\| \leq \|\Delta\Theta(0)\|e^{-\lambda ke^{-qT}t} \quad (51)$$

が成立する。したがって

$$\|\Delta\Theta(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (52)$$

を得る。これは(48)式が成立する場合、 $\xi(t)$ の有界・非有界にかかわらず、推定値 $\Theta(t)$ が真値に収束することを意味する。

4. 大域的安定性の証明

全系の挙動はつぎの微分方程式で記述される。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(v(t)) + d(t) \quad (53)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (54)$$

$$v(t) = C_f x(t) + d_v(t) \quad (55)$$

$$u(t) = -(H_1 + \Delta H_1(t))\zeta_1(t) - (E_2 + \Delta E_2(t))y(t)$$

$$\begin{aligned} & -(H_2 + \Delta H_2(t))\zeta_2(t) \\ & -(E_3 + \Delta E_3(t))f(v(t)) \\ & -(H_3 + \Delta H_3(t))\zeta_3(t) \\ & + (C_r + \Delta C_r(t))r_h(t) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\dot{\zeta}_1(t) = F_1\zeta_1(t) + G_1u(t) \quad (57)$$

$$\dot{\zeta}_2(t) = F_2\zeta_2(t) + G_2y(t) \quad (58)$$

$$\dot{\zeta}_3(t) = F_3\zeta_3(t) + G_3f(v(t)) \quad (59)$$

上記の方程式をまとめればつぎのようになる。

$$\dot{z}(t) = A_s z(t) + B_s f(v(t)) + \Delta A_s(t)z(t) + \Delta B_s(t)f(v(t)) + d_s(t) \quad (60)$$

$$v(t) = C_s z(t) + d_v(t) \quad (61)$$

ここで各変数はつぎのようになる。

$$A_s = \begin{bmatrix} (A - BE_2C) & -BH_1 \\ -G_1H_2C & (F_1 - G_1H_1) \\ G_2C & 0 \\ 0 & 0 \\ & -BH_2 & -BH_3 \\ & -G_1H_2 & -G_1H_3 \\ & F_2 & 0 \\ & 0 & F_3 \end{bmatrix}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} B_f - BE_3 \\ -G_1E_3 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix}, C_s = [C_f, 0, 0, 0],$$

$$\Delta A_s(t) = - \begin{bmatrix} B \\ G_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [\Delta E_2(t)C, \Delta H_1(t), \Delta H_2(t), \Delta H_3(t)],$$

$$\Delta B_s(t) = - \begin{bmatrix} B \\ G_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta E_3(t),$$

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} BC_r r_h(t) - BE_2 d_0(t) + d(t) \\ G_1 C_r r_h(t) - G_1 E_2 d_0(t) \\ G_2 d_0(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \Delta C_r(t) r_h(t) - B \Delta E_2(t) d_0(t) \\ G_1 \Delta C_r(t) r_h(t) - G_1 \Delta E_2(t) d_0(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^T(t) = [x^T(t), \zeta_1^T(t), \zeta_2^T(t), \zeta_3^T(t)] \quad (62)$$

$d_s(t)$ はその内容から有界な信号であることがわかる。目的は(60), (85)式における $z(t)$ の有界性を証明することである。

- A_s の特性方程式を求めれば, (88)式になる。

$$|pI - A_s| = |Q(p)|^2 V_s(p) T(p)^t D_m(p)^t \quad (63)$$

$V_s(p)$ は $C(pI - A)^{-1}B$ の不変零点多項式であり, これは安定であるものとする。ゆえに A_s は安定なシステム行列になる。

- パラメータ誤差 $\Delta A_s(t), \Delta B_s(t)$ は $\|\Delta\theta(t)\|$ が指数的に減衰するので, 同様に指数的に減衰する。

$$\|\Delta A_s(t)\| \leq C_3 \|\Delta\theta(t)\| \leq C_4 e^{-\nu t} \quad (64)$$

$$\|\Delta B_s(t)\| \leq C_5 \|\Delta\theta(t)\| \leq C_6 e^{-\nu t} \quad (65)$$

$$\text{ただし } \nu = \lambda k e^{-\gamma T}$$

パラメータ誤差が指数的に減衰する性質が大域的安定性を証明する上での重要な条件になる。さらに証明に必要な条件として, つぎの事項は γ の大きさにかわらず成立するものとする。

- n, σ_i, n_d は既知である。
- $C(pI - A)^{-1}B$ の零点は安定で $|N_r| \neq 0$ である。
- $n_m - \sigma_{mi} \geq n - \sigma_i$ である。
- $r_m(t)$ は P.E. である。
- $y(t), v(t)$ は入手可で $f(v(t))$ は既知である。

以下非線形の指数 γ の大きさにより場合に分けて大域的安定性を証明する。

[i] $0 \leq \gamma < 1$ の場合

つぎの2次形式に対して, (53)式の軌道に沿って時間微分を計算する。

$$V(t) = 1/2 z^T(t) P_s z(t) \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -1/2 z^T(t) Q_s z(t) + z^T(t) P_s B_s f(v(t)) \\ &\quad + z^T(t) P_s \Delta A_s(t) z(t) \\ &\quad + z^T(t) P_s \Delta B_s f(v(t)) + z^T(t) P_s d_s(t) \\ &\leq -q_1 V(t) + q_2 \|z(t)\| (\alpha + \beta \|v\|^\gamma) \\ &\quad + q_3 \|z\|^2 e^{-\nu t} + q_4 \|z(t)\| (\alpha + \beta \|v(t)\|^\gamma) \\ &\quad + q_5 \|z(t)\| \\ &\leq -q_6 V(t) + q_7 V(t) e^{-\nu t} + q_8 \end{aligned} \quad (67)$$

ここで $P_s A_s + A_s^T P_s = -Q_s$ で $P_s > 0, Q_s > 0$ であること, および(6)式の $\|f(v(t))\|$ に関するノルム条件および(64),(65)式の $\|\Delta A_s(t)\|, \|\Delta B_s(t)\|$ に関する指数減衰の性質を使う。上記の式で $q_1 > 0, q_6 > 0$, 他の q_i は $q_i \geq 0$ である。この微分不等式は定数変化法により解析的に解くことができ, つぎの結果を得る。

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{\frac{\gamma}{2}(1-e^{-\nu t})} [V(0)e^{-q_6 t} + q_8/q_6(1-e^{-q_6 t})] \\ &\leq e^{\frac{\gamma}{2}} (V(0) + q_8/q_6) < \infty \end{aligned} \quad (68)$$

ゆえに $z(t)$ は有界である。

$$\|z(t)\| < \infty \quad (69)$$

[ii] $1 \leq \gamma < 2$ の場合

この場合つぎの条件が満たされているとする。

(a) $\sigma_i > \sigma_{fi}$

(b) $l_f \times l_f$ 行列伝達関数

$$\begin{aligned} H(p) &= C_s [pI - A_s]^{-1} B_s \\ &= [C_f, 0] \begin{bmatrix} pI - A_s & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が強正実である。

(c) $v^T(t) f(v(t)) \leq \alpha_1 + \beta_1 \|v(t)\|^\gamma$

が成立し $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, 0 \leq \gamma_1 < 2$ である。

(a)の条件 $\sigma_i > \sigma_{fi}$ より $E_3, \Delta E_3$ がゼロになる。よって制御入力 $u(t)$ のなかに $f(v(t))$ の直達項がなくなる。したがって $u(t), \zeta(t), \xi(t)$ の構成はつぎのようになる。

$$u(t) = [C_r, -H_1, -E_2, -H_2, -H_3] \zeta(t) = \Theta \zeta(t)$$

(70)

$$\zeta^T(t) = [r_k^T, \zeta_1^T(t), y^T(t), \zeta_2^T(t), \zeta_3^T(t)] \quad (71)$$

$$u(t)/(T(p)D_m(p)) = \Theta\xi(t) \quad (72)$$

$$\xi^T(t) = [\{Q_s(p)^{-1}y(t)\}^T, \xi_1^T(t), \{y(t)/(T(p)D_m(p))\}^T, \xi_2^T(t), \xi_3^T(t)] \quad (73)$$

これにともない、(60)式の $B_s, \Delta B_s(t)$ は $E_3, \Delta E_3(t)$ をゼロにおいた内容になり、特に $\Delta B_s(t) = 0$ になる。したがって $z(t)$ のシステム方程式において $\Delta B_s f(v(t))$ の項が消えることになる。

$$\dot{z}(t) = A_s z(t) + \Delta A_s z(t) + B_s f(v(t)) + d_s(t) \quad (74)$$

$$v(t) = C_s z(t) + d_v(t) \quad (75)$$

(b)の条件式はパラメータに誤差がない系において $f(v(t))$ から $v(t)$ の伝達関数を求めることによって得られる(付録A参照)。 (C_s, A_s, B_s) が定数行列の場合 Kalman の正準構造変換を使い、可制御・可観測の部分を取り出して有界性を証明することができるが、この場合 $(C_s, A_s + \Delta A_s(t), B_s)$ であるから正準構造変換は使えない。ところが強正実の補題は安定な非最小実現に対しても成立することを証明することができる。

[補題1] 厳にプロパーな強正実伝達関数 $H(p)$ の任意の安定な実現 (C_s, A_s, B_s) に対し、つぎの関係を満たす正定対称行列 P_s, Q_s が存在する。

$$P_s A_s + A_s^T P_s = -Q_s, P_s B_s = C_s^T \quad (76)$$

(証明略) この補題を $H(p)$ の実現 (C_s, A_s, B_s) に対して使用する。なおこの条件は (77), (79), (81) 式で $q_5 > 0$ になるように設定するためである。

(66)式の2次形式 $V(t)$ を(74)式の軌道に沿って微分し、 $\dot{V}(t)$ を計算すればつぎのような不等式関係を得る。

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -1/2z^T(t)Q_s z(t) + z^T(t)C_s^T f(v(t)) \\ & + z^T(t)P_s \Delta A_s(t)z(t) + z^T(t)P_s d_s(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & -1/2z^T(t)Q_s z(t) + v^T(t)f(v(t)) \\ & + z^T(t)P_s \Delta A_s(t)z(t) \\ & + z^T(t)P_s d_s(t) - d_v^T(t)f(v(t)) \\ \leq & -q_1 V(t) + \alpha_1 + \beta_1 \|v(t)\|^{\gamma_1} + q_2 V(t)e^{-\nu t} \\ & + q_3 \|z(t)\| + q_4 (\alpha + \beta \|v(t)\|^\gamma) \\ \leq & -q_5 V(t) + q_6 V(t)e^{-\nu t} + q_7 \quad (77) \end{aligned}$$

ここで $q_1 > 0, q_5 > 0$, 他の q_i は $q_i \geq 0$ である。(77)式に(68)式の結果を使えばただちに $\|z(t)\|$ の有界性がいえる。

$$V(t) \leq e^{\frac{q_7}{q_5} t} (V(0) + q_7/q_5) < \infty \quad (78)$$

[iii] $\gamma \geq 2$ の場合

この場合つぎの (a), (b), (c1) または (a), (b), (c2) が満たされるとする。

(a) $\sigma_1 > \sigma_{f1}$

(b) $l_f \times l_f$ 行列伝達関数

$$H(p) = [C_f, 0] \begin{bmatrix} pI - A, & -B \\ -C, & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

が強正実である。

(c1) $d_v(t) = 0$ かつ

$$v^T(t)f(v(t)) \leq \alpha_1 + \beta_1 \|v(t)\|^{\gamma_1}$$

が成立し $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, 0 \leq \gamma_1 < 2$ である。

(c2) $d_v(t) \neq 0$ かつ

$$v^T(t)f(v(t)) \leq \alpha_1 - \beta_1 \|v(t)\|^{\gamma_1}$$

が成立し $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 > 0, \gamma_1 > \gamma$ である。

(a), (b), (c1) の場合

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -1/2z^T(t)Q_s z(t) + v^T(t)f(v(t)) \\ & + z^T(t)P_s \Delta A_s(t)z(t) + z^T(t)P_s d_s(t) \\ \leq & -q_1 V(t) + \alpha_1 + \beta_1 \|v(t)\|^{\gamma_1} + q_2 V(t)e^{-\nu t} \\ & + q_3 \|z(t)\| \\ \leq & -q_5 V(t) + q_6 V(t)e^{-\nu t} + q_7 \quad (79) \end{aligned}$$

ここで $q_1 > 0, q_5 > 0$, 他の q_i は $q_i \geq 0$ である。(67)式の場合と同様にして(79)式の微分方程

式を $V(t)$ について解けば, (68) 式の結果が得られ $\|z(t)\|$ の有界性がいえる.

$$V(t) \leq e^{\frac{26}{25}t} (V(0) + q_7/q_5) < \infty \quad (80)$$

(a), (b), (c2) の場合

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -1/2 z^T(t) Q_s z(t) + z^T(t) C_s^T f(v(t)) \\ &\quad + z^T(t) P_s \Delta A_s(t) z(t) + z^T(t) P_s d_s(t) \\ &= -1/2 z^T(t) Q_s z(t) + v^T(t) f(v(t)) \\ &\quad + z^T(t) \Delta A_s(t) z(t) \\ &\quad + z^T(t) P_s d_s(t) - d_v^T(t) f(v(t)) \\ &\leq -q_1 V(t) + \alpha_1 - \beta_1 \|v(t)\|^\gamma + q_2 V(t) e^{-\nu t} \\ &\quad + q_3 \|z(t)\| + q_4 (\alpha + \beta \|v(t)\|^\gamma) \\ &\leq -q_5 V(t) + q_6 V(t) e^{-\nu t} + q_7 \end{aligned} \quad (81)$$

である. よって $z(t)$ は有界である. ここで $q_1 > 0$, $q_5 > 0$. 他の q_i は $q_i \geq 0$ である.

$$V(t) \leq e^{\frac{26}{25}t} (V(0) + q_7/q_5) < \infty \quad (82)$$

以上の内容を表にまとめれば Table 1 になる.

制御入力 $u(t) = \Theta(t)\zeta(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で $\Theta(t) \rightarrow \Theta$ であるから

$$u(t) \rightarrow \Theta \zeta(t) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (83)$$

である. これはモデル追従形制御系の制御入力と同一であるから,

$$e(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (84)$$

が成立する.

5. 数値例

つぎの系に対して, MRACS を設計し, そのシミュレーションを示す.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1 \end{bmatrix} f(v(t)) + \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (85)$$

$$y(t) = [5, 1] x(t) + d_0(t) \quad (86)$$

$$v(t) = [6, 1] x(t) \quad (87)$$

$$f(v(t)) = v(t) + v(t)^2 + 3v(t)^3 - 0.1v^5 \quad (88)$$

この系では $H(p) = 0.2/(p+5)$ であり, Table 1 の (iii-2) に対応する. モデルは (89), (90) 式である.

$$y_m(t) = 1/(p+3) r_m(t) \quad (89)$$

$$r_m(t) = 2 \sin(t) + \sin(10t)$$

$$+ \sin(30t) + \sin(50t) + 4$$

$$n_d = 1, T(p) = (p+6), Q(p) = (p+6)^2 \quad (90)$$

パラメータ調整則の q, λ は $q = 10^{-6}, \lambda = 0.5$ とした. RKG 法のキザミは $T = 0.02s$ である. 同定パラメータの個数は 8 個であり, それらの初期値は

$$\Theta(0) = \Theta \times \delta, \delta = 0.8 \quad (91)$$

である.

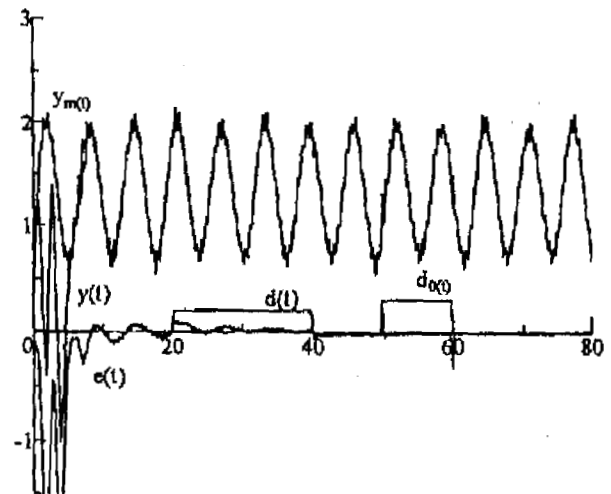


Fig. 1 Simulation results with step disturbances

6. あとがき

本論文では多入出力非線形系のモデル規範形適応制御系 (MRACS) の設計を示し, 非線形指数 γ の全ての範囲にわたる大域的安定性の証明を行っ

γ	$0 \leq \gamma < 1$	$1 \leq \gamma < 2$	$2 \leq \gamma$	
σ_i	$\sigma_i \geq \sigma_{ji}$	$\sigma_i > \sigma_{ji}$	$\sigma_i > \sigma_{ji}$	
$H(p)$	No condition	strictly positive real	strictly positive real	
d_v	Bounded	Bounded	$d_v = 0$	$d_v \neq 0$
α_1	No condition	$\alpha_1 \geq 0$	$\alpha_1 \geq 0$	$\alpha_1 \geq 0$
β_1		$\beta_1 \geq 0$	$\beta_1 \geq 0$	$\beta_1 < 0$
γ_1		$0 \leq \gamma_1 < 2$	$0 \leq \gamma_1 < 2$	$\gamma_1 > \gamma$

Table 1 Global stability conditions of nonlinear MRACS

た、大域的安定性の証明の中でモデル追従形制御系(MFCS)の場合と比較すれば、MFCSでは $H(p)$ が正実でよいが、MRACSでは強正実になり、条件が強くなっている。一方MFCSでは有限発散時間が存在しないことを示さなければならないが、MRACSではその必要がない。シミュレーションの結果は出力誤差がゼロに収束していることを示しており、本設計法が有効であることを確認した。

参考文献

- 1) 大久保重範：外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計，計測自動制御学会論文集，21-8,792/799(1985)
- 2) 大久保重範：零点の安定配置を使った非線形モデル追従形制御系，計測自動制御学会論文集，28-8,939/946 (1992)
- 3) 大久保重範：大域的に安定な多入出力非線形系のMRACS，計測自動制御学会論文集，26-1,46/53 (1990)
- 4) 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会 (1981)

付録A 行列伝達関数 $H(p)$ の誘導

(1), (2), (3), 式から $v(t)$ を消去し次の関係を求める。

$$\begin{aligned}
 y(t) = & C(pI - A)^{-1}Bu(t) \\
 & + C(pI - A)^{-1}B_f f(v(t)) \\
 & + C(pI - A)^{-1}d(t) + d_0(t) \quad (92)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(t) = & C_f(pI - A)^{-1}Bu(t) \\
 & + C_f(pI - A)^{-1}B_f f(v(t)) \\
 & + C_f(pI - A)^{-1}d(t) + d_0(t) \quad (93)
 \end{aligned}$$

制御入力 $u(t)$ は $e(t) = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ になるように設計してあるから閉ループ系での $y(t)$ は(94)式で書ける。

$$y(t) = y_m(t) + \varepsilon(t) \quad (94)$$

$\varepsilon(t)$ は指数関数的にゼロに収束する項である。(92)式の $y(t)$ に(94)式を使い、 $u(t)$ を求めて(93)式に代入すれば $v(t)$ と $f(v(t))$ の関係を得る。

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \{C_f(pI - A)^{-1}B_f - C_f(pI - A)^{-1}B\{C \\
 & (pI - A)^{-1}B\}^{-1}C(pI - A)^{-1}B_f\}f(v(t)) \\
 & + C_f(pI - A)^{-1}B\{C(pI \\
 & - A)^{-1}B\}^{-1}\{y_m(t) + \varepsilon(t)\} - C_f(pI \\
 & - A)^{-1}B\{C(pI - A)^{-1}B\}^{-1}\{C(pI \\
 & - A)^{-1}d(t) + d_0(t)\} + C_f(pI - A)^{-1}d(t) \\
 & + d_0(t) \\
 = & H(p)f(v(t)) + v_e(t) \quad (95)
 \end{aligned}$$

$v_e(t)$ は外部信号である。つぎに逆行列のブロック変換を使う。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}^{-1} \\
 = & \begin{bmatrix} E^{-1} + E^{-1}F(H - GE^{-1}F)^{-1}GE^{-1} & \\ & -(H - GE^{-1}F)^{-1}GE^{-1} \\ & & -E^{-1}F(H - GE^{-1}F)^{-1} \\ & & & (H - GE^{-1}F)^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} & [C_f \ 0] \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix} \\ & = C_f (E^{-1} + E^{-1} F (H - G E^{-1} F)^{-1} G E^{-1}) B_f \end{aligned} \quad (96)$$

となる. (96)式で $E = (pI - A)$, $F = -B$, $H = 0$,
 $G = -C$ と置けば(b)の条件式 $H(p)$ が得られる.