

### 3-ディスク混合感度問題に関する研究

## The Investigation to Three Disk Type Mixed Sensitivity Problem

○熊川 恒志\*, 渡部 慶二\*

○Hisashi Kumakawa\*, Keiji Watanabe\*

\*山形大学院 工学研究科

\*Yamagata University

キーワード: 混合感度 (mixed sensitivity), ロバスト安定 (robust stability), 感度関数 (sensitivity function),  
相補感度関数 (complementary sensitivity function), 極配置 (pole assignment)

連絡先: 〒992 山形県米沢市城南 4-3-16 山形大学工学部 電子情報工学科 渡部研究室

熊川 恒志, Tel.: (0238)26-3326, Fax.: (0238)24-2752, E-mail: kumakawa@ewata.yz.yamagata-u.ac.jp

#### 1. はじめに

制御系の設計を行う場合、目標入力への追従性を良くしたり外乱の影響を受け難くするためには低感度にする必要がある。また、制御器を設計する際には制御対象のモデルを基に行うが、実際の制御対象とモデルの間には誤差が生じることは避けられず、モデル誤差があっても制御系を安定にするためにはロバスト安定を考える必要がある。しかし、感度と相補感度の間にはトレードオフが存在し、双方を同時に小さくすることはできない。そこで、感度関数、相補感度関数を  $S(s)$ 、 $T(s)$  とし、それぞれに適当な重み関数  $W_S(s)$ 、 $W_T(s)$  を導入し、

$$\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1, \|W_T(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad (1)$$

を同時に満たす制御器を求める問題が検討されてきた。この問題を「2-ディスク混合感度問題」という。

2-ディスク混合感度問題は現時点で解析的に解けないので、その十分条件である「1-ディスク混

合感度問題」、すなわち

$$\left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (2)$$

のように合成し、 $H_\infty$ 制御で解く方法が与えられている。しかし、1-ディスク混合感度問題は十分条件であるため、 $H_\infty$ 制御で解けない  $W_S(s)$  に対しても、2-ディスク問題としてなら解くことが出来る、すなわち、1-ディスク問題で解ける感度よりもさらに低感度にできる可能性が残されている。したがって、ロバスト安定を満たす範囲でより低感度な制御系を得るために、2-ディスク混合感度問題の解法の検討が必要である。<sup>1)</sup>

ところで、一般に多変数系と呼ばれるシステムのうち、入力の数よりも出力の数の方が多いときにはロバスト安定を出力側で考えなくてはならないが、出力側感度関数  $S_o(s)$  が  $\bar{\sigma}(S_o) \geq 1$  となり制御性能の良い制御器を設計できない。そこで、近似的に制御対象の入力側で2-ディスク、あるいは1-ディスク混合感度問題を設計すると、 $H_\infty$ 非標準問題となってしまう、標準形で解くことができな

なくなってしまう。このように、従来の2-ディスクでは対処できない問題が生じるようになったため、制御系の評価式を一つ増やした「3-ディスク混合感度問題」を考えることによって、これらの問題を解決しようと考えた。

本研究では入力数より出力数が多い多入出力系について、入力側の感度関数  $S_i(s)$  を用いてこれを低感度化し、入力側相補感度関数  $T_i(s)$  でロバスト安定性を近似的に見積もり、出力側の相補感度関数  $T_o(s)$  で正確にチェックする「3-ディスク混合感度問題」を考える。この問題の可能性を検討し、解の候補としてオブザーバを用いての状態フィードバックと、自由パラメータ  $Q$  を使って制御系を考える。そして可能性の条件を基に3-ディスク混合感度問題の解法を与え、制御系設計のアルゴリズムを考えることとし、本法の応用として倒立振子を示し、その有効性を示すものとする。

## 2. 問題設定

Fig.1を考える。

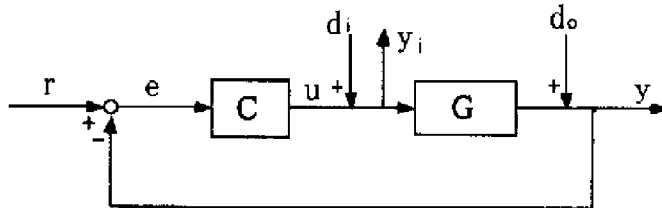


Fig. 1 等価制御系

Fig.1を用いて入力側の感度関数  $S_i(s)$ 、相補感度関数  $T_i(s)$  と出力側の感度関数  $S_o(s)$ 、相補感度関数  $T_o(s)$  を算出すると、以下のようなになる。

$$S_i(s) = \frac{y_i(s)}{d_i(s)} \Big|_{r=0} = (I + C(s)G(s))^{-1} \quad (3)$$

$$T_i(s) = (I + C(s)G(s))^{-1}C(s)G(s) \quad (4)$$

$$S_o(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = (I + G(s)C(s))^{-1} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} T_o(s) &= (I + G(s)C(s))^{-1}G(s)C(s) \\ &= G(s)(I + C(s)G(s))^{-1}C(s) \quad (6) \end{aligned}$$

### 2.1 ロバスト安定

Fig.1で制御対象が以下のように変動したとする。

$$G_P(s) = (I + \Delta(s))G(s) \quad (7)$$

$G_P(s)$  はモデル誤差  $\Delta(s)$  を含む実際の制御対象であり、 $G(s)$  は公称数式モデルで可制御、可観測とする。<sup>2)</sup> また、 $G(s), G_P(s)$  の不安定極の数は変わらないものとする。

このとき、 $\Delta(s)$  に対して重み関数  $W_T(s)$  を決めるとき、最大特異値を  $\bar{\sigma}$  で表して

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < |W_T(j\omega)|, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (8)$$

を満たすような  $\Delta(s)$  に対してフィードバック系が安定となる必要十分条件は

$$\|W_T T_o\|_{\infty} < 1 \quad (9)$$

を満たすことであり、このとき制御系はロバスト安定であるという。

### 2.2 低感度化

Fig.1の系について外乱  $d_o$  が出力  $y$  に及ぼす影響をできるだけ小さくしたいと考えるとき、この制御問題は  $d_o$  から  $y$  への伝達関数を感度関数を式 (5) と定義し、適当な重み関数  $W_S(s)$  を選び、

$$\bar{\sigma}(S_o(j\omega)) < |W_S(j\omega)|^{-1}, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (10)$$

とする制御問題として定式化される。上式は以下の  $H_{\infty}$  ノルムの評価に変換できる。

$$\|W_S S_o\|_{\infty} < 1 \quad (11)$$

### 2.3 3-ディスク混合感度問題

先にも説明した通り、多変数系で入力の数よりも出力の数のほうが多いときは、ロバスト安定を出力側で考えなくてはならず、出力側感度関数  $S_o(s)$  が  $\bar{\sigma}(S_o(j\omega)) < 1$  とならない。これは、以下の説明による。

出力側感度関数を式 (5) のようにすると、 $S_o(s)$  の最大特異値は

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(S_o(j\omega)) &= \bar{\sigma}((I + G(j\omega)C(j\omega))^{-1}) \\ &= \underline{\sigma}((I + G(j\omega)C(j\omega))) \quad (12) \end{aligned}$$

となる。感度関数  $S_o(s)$  の固有値を計算してみる。

$$\det(\lambda I - I - GC) \quad (13)$$

この式で、 $\lambda = 1$  に対して

$$\det(\lambda I - I - GC) = 0 \quad (14)$$

となり、固有値  $\lambda = 1$  を持つことになる。よって、行列  $A$  の固有値の大きさと  $A$  の最大特異値  $\bar{\sigma}(A)$ 、および最小特異値  $\underline{\sigma}(A)$  の間には

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \quad (15)$$

の関係があるので式 (12) から

$$\bar{\sigma}(S_o(j\omega)) \geq 1 \quad (16)$$

となってしまうのである。

これは感度関数が縦長になってしまうことに起因しており、したがって制御性能の良いコントローラができなくなる。それにより、入力側で感度関数  $S_i(s)$  を考え、重み関数  $W_S(s)$  によって低感度化できるようにする。

また入力側、出力側の相補感度関数  $T_i(s), T_o(s)$  については、それぞれの  $\infty$  ノルムは式 (4)、(6) により

$$\|T_i(s)\|_{\infty} \leq \|G\|_{\infty} \|(I + CG)^{-1}C\|_{\infty} \quad (17)$$

$$\|T_o(s)\|_{\infty} \leq \|G\|_{\infty} \|(I + CG)^{-1}C\|_{\infty} \quad (18)$$

と最大値は等しくなるが、そこまでの大きさが不明であることから、双方の大きさの関係をチェックするというようにする。

よって、本研究での「3-ディスク混合感度問題」は、入力側で2-ディスク混合感度問題を考え、出力側でロバスト安定性をチェックするものとする。評価式は、以下とする。

$$\|S_i W_S\|_{\infty} < 1 \quad (19)$$

$$\|T_i W_T\|_{\infty} < 1 \quad (20)$$

$$\|W_T T_o\|_{\infty} < 1 \quad (21)$$

### 3. 制御系の構成

以下に制御系を構成する。3)

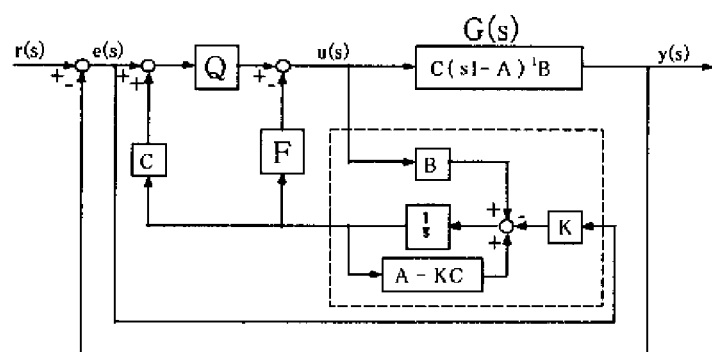


Fig. 2 制御系

ここで  $G(s)$  は制御対象の公称数式モデルで、その状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (22)$$

である。ただし、 $x$  は状態変数、 $u$  は操作量、 $y$  は制御量を表し、 $x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^r, r \geq m$  で、 $(A, B)$  は可制御、 $(A, C)$  は可観測とする。 $F$  は状態フィードバック係数で  $A - BF$  を安定にするものとし、オブザーバを図中の点線枠内で示し  $K$  はオブザーバゲインで  $A - KC$  を安定にするものとする。 $Q$  は安定な自由パラメータである。

Fig.2の制御系を Fig.1の等価系で示すと、制御対象  $G(s)$  とコントローラ  $C(s)$  は以下となる。

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (23)$$

$$C(s) = [I + (F - QC)(sI - A + KC)^{-1}B]^{-1} \cdot [Q + (F - QC)(sI - A + KC)^{-1}K] \quad (24)$$

また、 $S_i(s), T_i(s), T_o(s)$  は、以下のようになる。

$$S_i(s) = [I + F(sI - A)^{-1}B]^{-1} \cdot [I + (F - QC)(sI - A + KC)^{-1}B] \quad (25)$$

$$\begin{aligned} T_i(s) &= [I + F(sI - A)^{-1}B]^{-1} \cdot [F(sI - A)^{-1}B \\ &\quad - (F - QC)(sI - A + KC)^{-1}B] \\ &= [I + F(sI - A)^{-1}B]^{-1} \\ &\quad \cdot [F(sI - A + KC)^{-1}KC(sI - A)^{-1}B \\ &\quad + QC(sI - A + KC)^{-1}B] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} T_o(s) &= C(sI - A + BF)^{-1}B \\ &\quad \cdot [Q + (F - QC)(sI - A + KC)^{-1}K] \end{aligned} \quad (27)$$

## 4. 設計法

### 4.1 設計準備

制御対象の状態方程式(22)において、 $A(n \times n)$ 、 $B(n \times m)$ 、 $C(r \times n)$ で  $m \leq r$ 、 $(A, B)$  は可制御、 $(C, A)$  は可観測である。

$B$ 行列を1列ごとに分割する。

$$B = [b_1 \ \cdots \ b_m] \quad (28)$$

このとき

$$\begin{aligned} CA^{j-1}b_i &= 0, \quad j=1, 2, \dots, \nu_i - 1 \\ CA^{\nu_i-1}b_i &\neq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

とすると、式(29)を集めた行列を

$$\Phi = [CA^{\nu_1-1}b_1 \ \cdots \ CA^{\nu_m-1}b_m] \quad (30)$$

$$\text{rank}\Phi = m \text{ (列フルランク)} \quad (31)$$

とする。また $\Phi$ の疑似逆行列を以下とする。

$$\Phi^+ = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \quad (32)$$

設計仕様は以下の式を満足することである。

$$\text{入力側感度} \quad : \quad \|S_i W_S\|_\infty < 1 \quad (33)$$

$$\text{入力側相補感度} \quad : \quad \|T_i W_T\|_\infty < 1 \quad (34)$$

$$\text{出力側相補感度} \quad : \quad \|W_T T_o\|_\infty < 1 \quad (35)$$

式中で使われている重み関数は以下とする。

$$|W_T(j\omega)| \begin{cases} < 1 & : \quad 0 \leq \omega < \omega_T \\ = 1 & : \quad \omega = \omega_T \\ > 1 & : \quad \omega > \omega_T \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} W_S(s) &= \frac{\omega_S}{s} \\ \omega_S &< \omega_T \end{aligned} \quad (37)$$

#### 「補題」

$$\begin{aligned} s^{\nu_i} + \alpha_{i1}s^{\nu_i-1} + \cdots + \alpha_{i\nu_i} &= \\ \begin{cases} (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^{\frac{\nu_i}{2}} & \nu_i : \text{偶数} \\ (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^{\frac{\nu_i-1}{2}}(s + \omega_n) & \nu_i : \text{奇数} \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= [A^{\nu_1}b_1 + \alpha_{11}A^{\nu_1-1}b_1 + \cdots + \alpha_{1\nu_1}b_1 \ \cdots \\ & \quad A^{\nu_m}b_m + \alpha_{m1}A^{\nu_m-1}b_m + \cdots + \alpha_{m\nu_m}b_m] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\Omega = \text{diag}[\alpha_{1\nu_1} \ \cdots \ \alpha_{m\nu_m}] \quad (40)$$

とする。<sup>4)</sup>このとき  $A - \Psi\Phi^+C$ が虚軸上に固有値を持たないとする、リッカチ方程式

$$\begin{aligned} P(A - \Psi\Phi^+C)^T + (A - \Psi\Phi^+C)P \\ - PC^T(\Phi^+)^T\Omega^2\Phi^+CP = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

は安定化解  $P = P^T \geq 0$  を持つ。これに対し

$$K = \Psi\Phi^+ + PC^T(\Phi^+)^T\Omega^2\Phi^+ \quad (42)$$

$$Q_a = \Omega\Phi^+ \quad (43)$$

とすると、

$$Q_a C(sI - A + KC)^{-1}B = U_i(s)\Lambda(s) \quad (44)$$

が成り立つ。<sup>5)</sup>ただし

$$\begin{aligned} U_i(s) &= I - \Omega\Phi^+C(sI - A + KC)^{-1} \\ & \quad \cdot PC^T(\Phi^+)^T\Omega \end{aligned} \quad (45)$$

$$\Lambda(s) = \text{diag} \left[ \frac{\alpha_{i\nu_i}}{s^{\nu_i} + \alpha_{i1}s^{\nu_i-1} + \cdots + \alpha_{i\nu_i}} \right] \quad (46)$$

である。

### 4.2 制御対象が安定なとき

#### 「定理 1」

補題より、以下の  $K, Q$  を決定する。

$$K = \Psi\Phi^+ + PC^T(\Phi^+)^T\Omega^2\Phi^+ \quad (47)$$

$$Q = U_i^{-1}(0)Q_a \quad (48)$$

$$Q_a = \Omega\Phi^+ \quad (49)$$

これらに対し式(33)、(34)、(35)が成り立てば 3-ディスク混合感度問題の解がある。

制御対象が安定であるので、状態フィードバック係数は  $F = 0$  とできる。このとき式(33)、(34)、(35)は

$$\| [I - U_i^{-1}(0)U_i(s)\Lambda(s)] W_S(s) \|_\infty < 1 \quad (50)$$

$$\left\| \frac{\alpha_{i\nu_i}}{s^{\nu_i} + \alpha_{i1}s^{\nu_i-1} + \cdots + \alpha_{i\nu_i}} W_T(s) \right\|_\infty < 1 \quad (51)$$

$$\| [I - C(sI - A + KC)^{-1}K] \|_\infty < 1 \quad (52)$$

となる。これを満たすように設計する。

(設計)

**Step.1:** 制御対象より重み関数  $W_T(s)$ 、設計仕様より  $W_S(s)$  を決定し、 $W_T(s)$  の 0[dB] との交差角周波数  $\omega_T$  を算出する。

**Step.2:** 式 (38) で  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ ,  $\omega_n = \omega_T$  とおき、Fig.2 の制御系を構成し設計を行う。

**Step.3** 式 (51) が満たされるかどうかを調べる。このとき式 (51) が満たされなければ満たすところまで  $\omega_n$  を小さくして計算をし直す。

**Step.4:** 式 (51) が満たされれば、この  $\omega_n$  に対して式 (50) が満たされるかを調べる。このとき式 (50) が満たされなければ解はない。

**Step.5:** 式 (50) が満たされ式 (51) が満たされなければ、 $\omega_n$  を少し小さくして **Step.4** から計算を行う。

### 4.3 制御対象が不安定なとき

#### 〔定理 2〕

$A - BF$  を安定にする状態フィードバック係数を  $F$  とする。このとき、

$$K = \Psi\Phi^+ + PC^T(\Phi^+)^T\Omega^2\Phi^+ \quad (53)$$

$$\begin{aligned} Q_b &= [I + F(sI - A + KC)^{-1}B]\Lambda^{-1}(s)U_i^{-1}(s)|_{s=0} \\ &= [I + F(-A + KC)^{-1}B]\Lambda^{-1}(0)U_i^{-1}(0) \end{aligned} \quad (54)$$

$$Q = Q_bQ_a \quad (55)$$

に対し式 (33)、(34)、(35) が成り立てば 3-ディスク混合感度問題の解がある。式 (33)、(34)、(35) は

$$\begin{aligned} \|[I + F(sI - A)^{-1}B]^{-1}[I + F(sI - A + KC)^{-1}B \\ - Q_bU_i(s)\Lambda(s)]W_S\|_\infty < 1 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \|[I + F(sI - A)^{-1}B]^{-1}[F(sI - A + KC)^{-1}K \\ \cdot C(sI - A)^{-1}B + Q_bU_i(s)\Lambda(s)]W_T\|_\infty < 1 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \|W_TC(sI - A + BF)^{-1}B \\ \cdot [Q + (F - QC)(sI - A + KC)^{-1}K]\|_\infty < 1 \end{aligned} \quad (58)$$

となる。これを満たすように設計する。

(設計)

$A - BF$  の固有値を安定にする状態フィードバック係数  $F$  を

$$\|F\| \rightarrow 0 \quad (59)$$

のようにしたい。 $\|F\|$  が十分 0 に近ければ、

$$\begin{aligned} \|[I + F(sI - A)^{-1}B]^{-1}[F(sI - A + KC)^{-1}K \\ C(sI - A)^{-1}B + Q_bU_i(s)\Lambda(s)]W_T\|_\infty \\ \simeq \|Q_bU_i(s)\Lambda(s)W_T\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (60)$$

となり  $\Lambda$  で調整できる。すなわち、式 (46) により  $\omega_n$  の設定によって調整が可能となる。それには

$$\begin{aligned} [I + F(sI - A)^{-1}B]^{-1} \\ = \frac{|sI - A|}{|sI - A + BF|} \text{adj}([I + F(sI - A)^{-1}B]) \end{aligned}$$

より

$$\frac{|sI - A|}{|sI - A + BF|} = 1$$

にすることを考え、 $F$  を以下を満たすように選ぶ。

$$\lambda(A - BF) = \begin{cases} \lambda(A) & \text{Re}[\lambda(A)] < 0 \\ -\epsilon + j\text{Im}[\lambda(A)] & \text{Re}[\lambda(A)] > 0 \\ -\epsilon + \lambda(A) & \text{Re}[\lambda(A)] = 0 \\ & (0 < \epsilon \ll 1) \end{cases} \quad (61)$$

**Step.1:** 制御対象より重み関数  $W_T(s)$ 、設計仕様より  $W_S(s)$  を決定し、 $W_T(s)$  の 0[dB] との交差角周波数  $\omega_T$  を算出する。

**Step.2:** 式 (38) で  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ ,  $\omega_n = \omega_T$  とおき、Fig.2 の制御系を構成、設計を行う。状態フィードバック係数  $F$  を式 (61) のように設定する。

**Step.3** 式 (57) が満たされるかどうかを調べる。このとき式 (57) が満たされなければ満たすところまで  $\omega_n$  を小さくして計算をし直す。

**Step.4:** 式 (57) が満たされれば、この  $\omega_n$  に対して式 (56) が満たされるかを調べる。このとき式 (56) が満たされなければ解はない。

**Step.5:** 式 (56) が満たされ式 (57) が満たされなければ、 $\omega_n$  を少し小さくして **Step.4** から計算を行う。

## 5. 設計例

次に、この問題解法に関する設計例として、「倒立振り子」を制御対象に解析を行う。

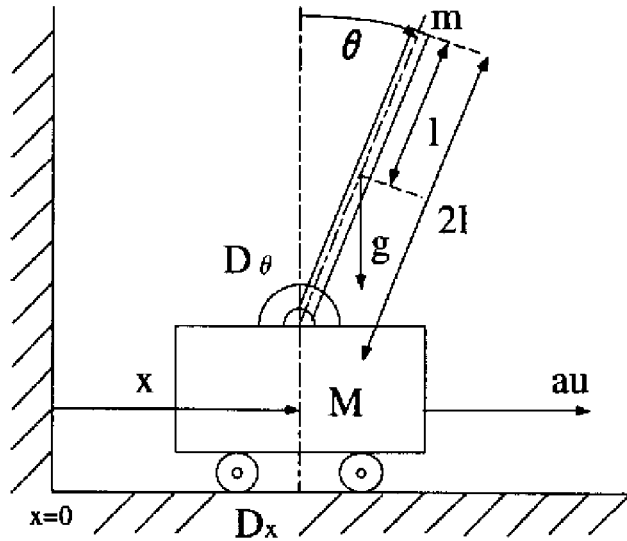


Fig. 3 倒立振り子

Fig.3の各係数の値は Tab.1の通りである。

Table 1 各パラメータの値

振り子の質量	$m$	0.270	[kg]
台車の質量	$M$	1.531	[kg]
振り子の長さの1/2	$l$	0.350	[m]
電圧-力変換係数	$a$	17.6065	[N/V]
台車の粘性係数	$D_x$	76.5500	[Ns/m]
振り子の粘性係数	$D_\theta$	0.002	[kgm <sup>2</sup> /s]
重力加速度	$g$	9.8	[m/s <sup>2</sup> ]

Tab.1の各パラメータの値より、状態方程式は以下で、これは可制御、可観測である。<sup>6)2)</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.2415 & -47.8886 & 0.0027 \\ 0 & 23.6603 & 102.6185 & -0.0511 \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11.0144 \\ -23.6023 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (63)$$

### (Step.1)

設計に使用する重み関数  $W_T(s)$ 、 $W_S(s)$  を

$$W_T(s) = \frac{(s+6)^2}{580} \quad (64)$$

$$W_S(s) = \frac{0.04}{s} \quad (65)$$

と設定した。 $W_T(s)$  のクロスオーバー角周波数は、

$$\omega_T = 22.0 [\text{rad/s}] \quad (66)$$

である。また、 $A$  行列の固有値は

$$\lambda(A) = [0 \ 4.5850 \ -4.5742 \ -47.9505] \quad (67)$$

と、0 と不安定極を持っているので、4.3のときの設計法を適用し、式 (56)、(57)、(58) の評価式が満足できるように設計する。

$B$  行列の大きさは  $(4 \times 1)$  なので、このまま式 (29) のように計算すると、

$$\begin{aligned} CB &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ CAB &= \begin{bmatrix} 11.0144 \\ -23.6023 \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned} \quad (68)$$

となった。よって、式 (29) において  $j = 0, 1, i = 1, \nu_1 = 2$  となり、式 (30) を計算すると

$$\Phi = [CA^{\nu_1-1}B] = [CAB] = \begin{bmatrix} 11.0144 \\ -23.6023 \end{bmatrix} \quad (69)$$

となる。この行列の階数は

$$\text{rank}\Phi = 1 \quad (70)$$

である。また、疑似逆行列  $\Phi^+$  は以下となる。

$$\Phi^+ = [0.0162 \ -0.0348] \quad (71)$$

### (Step.2)

次に、Fig.2の制御系を構成する。

まず、4.1の補題を考える。 $\zeta = 1/\sqrt{2}$ 、 $\omega_n = \omega_T = 22.0$  と設定、 $\nu_1 = \nu_1 = 2$  なので式 (38) は

$$s^2 + \alpha_{11}s + \alpha_{12} = s^2 + 31.1124s + 484 \quad (72)$$

となり、 $\alpha_{11} = 31.1124$ 、 $\alpha_{12} = 484$  である。

このとき式 (39)、(40) より、以下となる。

$$\Psi = [A^2B + \alpha_{11}AB + \alpha_{12}B]$$

$$= \begin{bmatrix} -185 \\ 397 \\ 14213 \\ -30971 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\Omega = \text{diag}[\alpha_{12}] = 484 \quad (74)$$

次に、行列  $A - \Psi\Phi + C$  を計算すると、虚軸上に固有値を持たないので、式 (41) のリッカチ方程式は安定化解  $P = P^T \geq 0$  を持つ。  $P$  の固有値は、以下となった。

$$\lambda(P) = [2.8604 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (75)$$

よって、この安定化解  $P$  を用いて式 (42) を計算すると、オブザーバゲイン  $K$  は

$$K = \begin{bmatrix} -6.2 & 13.3 \\ 3.1 & -6.7 \\ 212.9 & -456.3 \\ -484.3 & 1037.8 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$Q_a$  は式 (43) より

$$Q_a = [7.8583 \ -16.8393] \quad (77)$$

となる。また式 (45)、(46) は

$$U_i(s) = \frac{s - 1.9339}{s + 1.9339} \quad (78)$$

$$\Lambda(s) = \frac{484}{s^2 + 31.1124s + 484} \quad (79)$$

となる。

制御対象が不安定なので、4.3より、式 (76)、(78)、(79) を用いて式 (54) を計算すると、

$$Q_b = 3.58 \quad (80)$$

となり、式 (55) より

$$Q = Q_b Q_a = [28.1326 \ -60.2842] \quad (81)$$

となる。

式 (61) より、  $A - BF$  の固有値を以下のように設定する。

$$\lambda(A - BF) = [-0.1 \ -0.2 \ -4.5742 \ -47.9505] \quad (82)$$

極配置法より状態フィードバック係数  $F$  は以下となった。<sup>7)</sup>

$$F = [-0.0190 \ -10.9789 \ -4.6369 \ -2.3709] \quad (83)$$

$F$  の大きさはユークリッドノルムを計算したところ、以下となった。

$$\|F\| = 12.1514 \quad (84)$$

### (Step.3)

これらの値をもとに  $S_i(s), T_i(s), T_o(s)$  を計算した。入力側感度・相補感度関数  $S_i(s), T_i(s)$  の周波数振幅応答を以下の Fig.4 に示す。

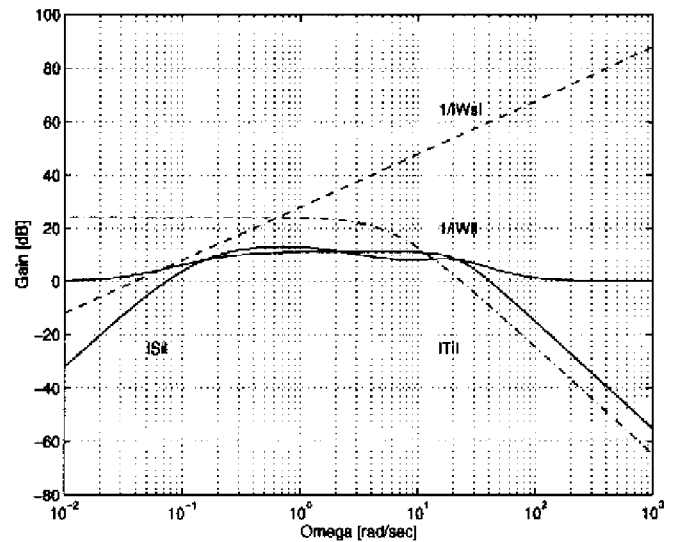


Fig. 4  $\omega_n = \omega_T$  のときの  $S_i(s), T_i(s)$  の周波数振幅応答

この図より、式 (57) が満たすことが出来ないことがわかったので、満たせるところまで  $\omega_n$  を小さくして計算を繰り返した。

### (Step.2', 3, 4, 5)

$\omega_n$  の値を小さくして計算した結果、  $\omega_n = 10.5$  のときに3つの評価式全てを満たすことが出来た。そのときのオブザーバゲイン  $K$ 、自由パラメータ  $Q$  は以下となった。

$$K = \begin{bmatrix} -6.2 & 13.4 \\ 10.7 & -23.0 \\ 279.7 & -599.4 \\ -613.1 & 1313.9 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$Q = [8.6151 \ -18.4609] \quad (86)$$

このときの  $S_i(s), T_i(s)$  の振幅応答を Fig.5に示す。また、出力側相補感度関数  $T_o(s)$  は  $(2 \times 2)$  の伝達関数行列になるので、その最大特異値

$$\|T_o(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}(T_o(j\omega)) \quad (87)$$

を計算することにより、周波数振幅応答を Fig.6に示す。

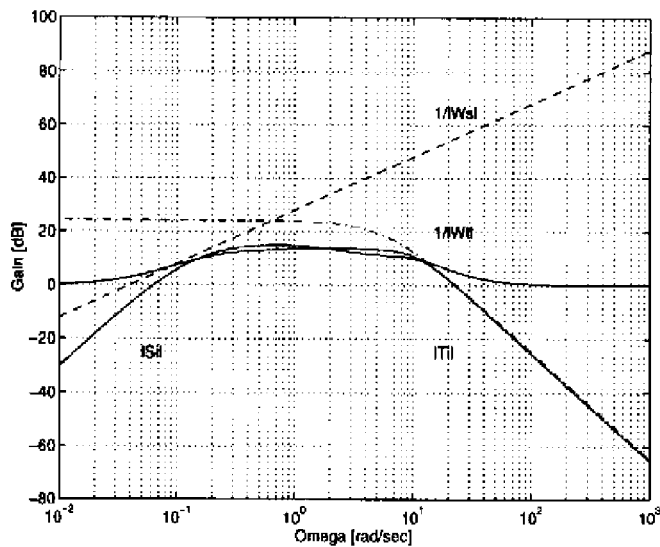


Fig. 5  $\omega_n = 10.5$  のときの  $S_i(s), T_i(s)$  の周波数振幅応答

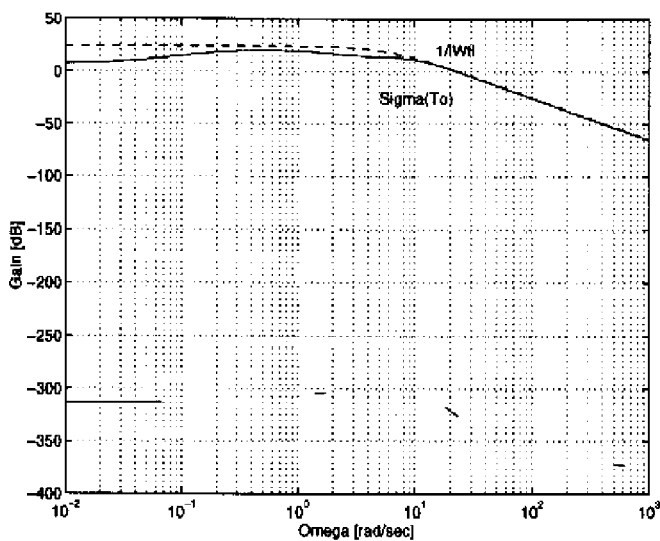


Fig. 6  $\omega_n = 10.5$  のときの  $T_o(s)$  の周波数振幅応答

## 6. シミュレーション結果

次に、設計した制御系を用いてシミュレーションを行った。

初期条件として振子の振れ角を  $0.1[\text{rad}]$ (約  $5.7$  度) 傾けてスタートさせたところ、設定条件<sup>†</sup>をクリアするのに  $2.36[\text{s}]$  かった。以下にそのときの台車と振子、及び入力電圧の変化を示す。

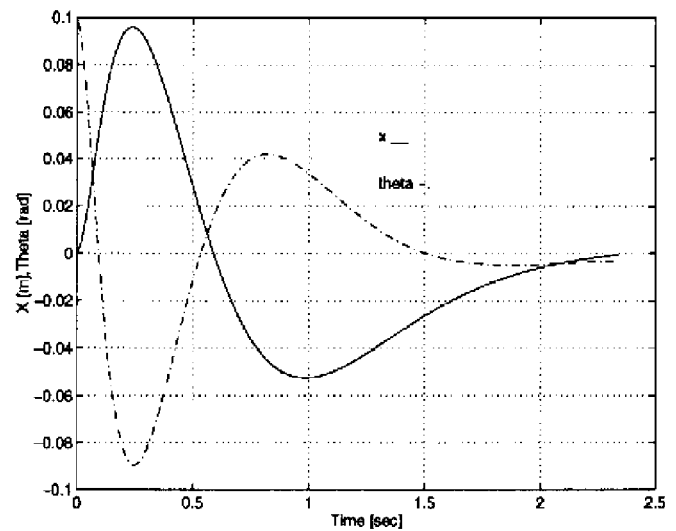


Fig. 7 台車の位置と振子の振れ角の変化

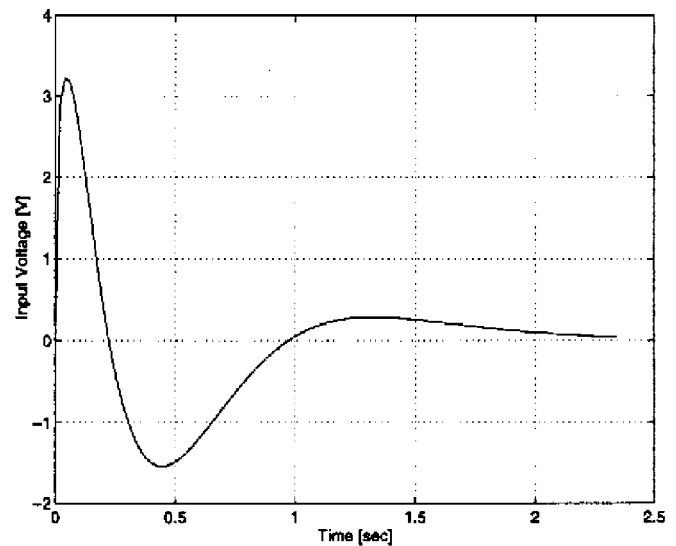


Fig. 8 入力電圧の変化

<sup>†</sup>設定した終了条件とは、制御対象の状態変数  $[x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]$  の全変数の絶対値が  $0.005[\text{m}]=5[\text{mm}]$ ,  $0.01[\text{rad}]=0.57[\text{度}]$ ,  $0.01[\text{m/s}]=1[\text{cm/s}]$ ,  $0.01[\text{rad/s}]=0.57[\text{度/s}]$  未満になることであり、これをクリアしたときに終了するようにしてある。



## 7. 実験結果

最後に、ハードウェアに対し制御系を設計、実験を行った。実験では制御開始後、外乱として次の2つを与えた。

- 1) 振子を手で揺らす (11[s])。
- 2) 台車の台を手で持ち上げる (22[s]~35[s])。

制御プログラムでは、振子の角度、台車の位置をそれぞれサンプリング間隔 20[ms] でサンプルし、コンピュータで制御を行っている。このときの台車の位置と振子の振れ角、及び入力電圧の変化を以下に示す。8)

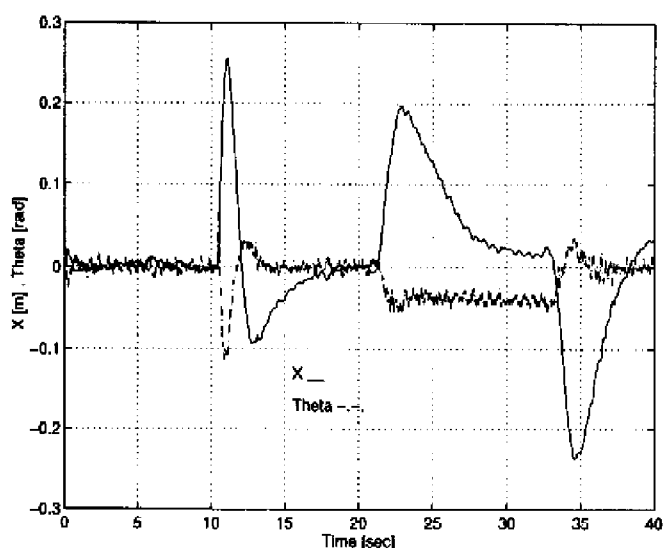


Fig. 9 実験結果 ( $x, \theta$ )

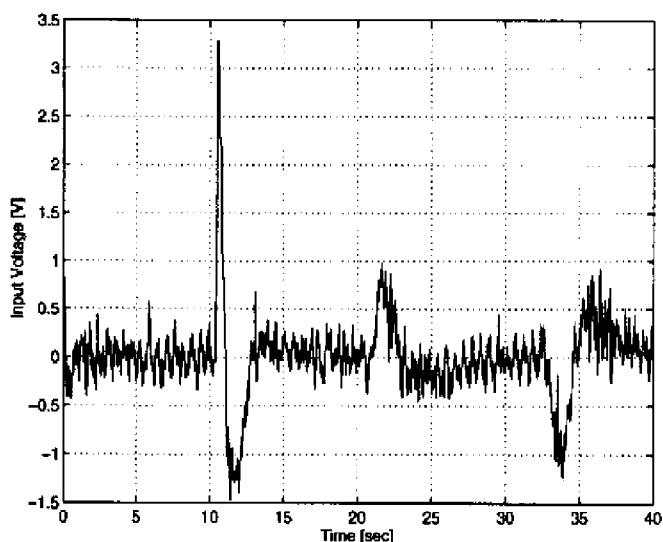


Fig. 10 入力電圧

11[s]で入力している外乱の大きさはシミュレーション値とほぼ同じであり、そのときの振子の振れ角や入力電圧値もシミュレーション結果と同等の結果を出力した。また定常動作においても振れ角が $\pm 0.01[\text{rad}]$ (0.57度)程で安定に制御しているので、設計した制御系が有効であることがわかった。

## 8. おわりに

本研究では、多変数系において入力の数より出力の数の方が多いシステムにおいて、従来の2-ディスク混合感度問題では出力側感度関数の設計仕様が満たせない場合に対し、3-ディスク混合感度問題を設定し、ロバスト安定を保障しながら感度仕様の調整が可能な方法を提案した。

また、設計例に倒立振子を用いて、状態フィードバック係数、オブザーバ、自由パラメータを用いての制御系を構成し、この設計法および制御系が有効であることがわかった。

最後に、本研究を進める上で山田 功氏には、提案した手法に対し色々貴重なご意見を頂きました。この場をお借りして、心から感謝致します。

## 参考文献

- 1) 我妻 敏正: 極配置に基づく2ディスク混合感度問題の一解法, 1345/1348, 計測自動制御学会論文集 Vol.32(1996)
- 2) 中野 道雄, 美多 勉: 制御基礎理論, 161/191, 昭晃堂(1982)
- 3) 石川 孝洋: 内部モデルレス・サーボ系の設計, 123/126, 計測自動制御学会東北支部 第163回研究集会(1996)
- 4) 白石 昌武: 入門現代制御理論, 131/137, 啓学出版(1987)
- 5) 美多 勉:  $H_\infty$ 制御, 44/53, 昭晃堂(1994)
- 6) 古田 勝久, 川路 茂保, 美多 勉, 原 辰次: メカニカルシステム制御, 7/17, オーム社(1984)
- 7) 吉川 恒夫, 井村 順一: 現代制御論, 107/130, 昭晃堂(1994)
- 8) 末松 良一: 機械制御入門, 85/129, オーム社(1988)