

# 遺伝的アルゴリズムを用いた非線形制御系の設計

## A design of non-linear control system using genetic algorithms

○菊地毅, 大久保重範

○Takeshi Kikuchi, Shigenori Okubo

山形大学

Yamagata University

キーワード: 遺伝的アルゴリズム (genetic algorithm), 非線形レギュレーター (nonlinear regulator), テンソル (tensor), クロネッカーベキ (kroneker product), ベキ状態ベクトル (power state vector)

連絡先: 〒992 山形県米沢市城南4-3-16  
山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室 菊地 毅

Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: tkikuchi@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

### 1. はじめに

従来、非線形レギュレーターはその複雑さから、近似的な方法でしか設計する事ができなかった。本論文では、系を記述する道具として、ベキ状態ベクトルを導入する。これを用いることにより系を一意に記述でき、また線形系の場合と同様にリカッチ解を求めることが出来ることが可能となる。リカッチ解を求めることができれば、閉じた一連の方程式を解くことにより非線形レギュレーターを設計することが可能である。一方で、リカッチ方程式は多次元の連立方程式となり、解析的に解くことが困難になっている。そこで、数値探索能力に優れているとされる遺伝的アルゴリズム (GA) を使用することにする。GA に与える評価関数をうまく与えれば数値的に最適解を見つけることができる。

### 2. 問題の設定

制御対象の非線形システム方程式を式 (1)(2) で与える。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{k=1}^{2N-1} A_{[1,k]} x^{[k]} + Bu \\ &= A_{G[1,2N-1]} G^{[2N-1]}(x) + Bu\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}A_{G[1,2N-1]} &= [A_{[1,1]}, A_{[1,2]}, \dots, A_{[1,2N-1]}], \\ G^{[2N-1]}(x) &= \begin{bmatrix} x \\ x^{[2]} \\ \vdots \\ x^{[2N-1]} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2)$$

$A_{[1,k]}$  は  $(1, k)$  型共変対称テンソルである。また、 $x^{[k]}$  は  $x$  の  $k$  次のクロネッカーベキであり、式 (3) を満たす。

$$x^{[k]} = x \otimes x \otimes \dots \otimes x \quad (3)$$

また各ベクトルは以下の次元を持つ。

$$\begin{aligned} x &\in R^n, u \in R^m, x^{[k]} \in R^{n^k}, \\ G^{[2N-1]}(x) &: \frac{n^{2N}-n}{n-1} \times 1, \\ A_{G[1,2N-1]} &: n \times \frac{n^{2N}-n}{n-1} \end{aligned}$$

この系における評価関数を式(4)で与える。

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_t^\infty (G^{[2N-1]T}(x) Q_{G[2N-1,2N-1]} G^{[2N-1]}(x) + u^T R u) dt \quad (4)$$

$$Q_{G[2N-1,2N-1]} = \begin{bmatrix} Q_{[1,1]} & Q_{[1,2]} & \cdots & Q_{[1,2N-1]} \\ Q_{[2,1]} & Q_{[2,2]} & \cdots & Q_{[2,2N-1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{[2N-1,1]} & Q_{[2N-1,2]} & \cdots & Q_{[2N-1,2N-1]} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$Q_{[i,j]}$  は  $(i,j)$  型完全対称テンソルであり、 $n^i \times n^j$  の行列で表現できる。次元は

$$Q_{[i,j]} : \frac{n^{2N}-n}{n-1} \times \frac{n^{2N}-n}{n-1}$$

制御入力  $u$  は  $V(t)$  を最小にするように設計する。

$$V(t) \rightarrow \min \quad (6)$$

### 3. 制御系の設計

リカッチ方程式の解は、システムが線形の時と同様にハミルトニアンを用いて以下のように求める。ハミルトニアン  $H$  は最大原理より、式(7)になる。

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2} (G^{[2N-1]T}(x) Q_{G[2N-1,2N-1]} \\ & G^{[2N-1]}(x) + u^T R u) \\ & + s^T (A_{G[1,2N-1]} G^{[2N-1]}(x) + B u) \end{aligned} \quad (7)$$

$s$ : 随伴ベクトル

ここで、式(8)より式(9)となる。

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (8)$$

$$u = R^{-1} B^T s \quad (9)$$

$s$  については式(10)が成立している。

$$s = -\frac{\partial V(t)}{\partial x} \quad (10)$$

ここで、 $s$  を式(11)とおくことにより、 $V$  は式(12)となる。

$$\begin{aligned} s &= -\sum_{k=1}^{2N-1} P_{[1,k]} x^{[k]} \\ &= -P_{G[1,2N-1]} G^{[2N-1]}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

$P_{[1,k]}$  は  $n \times n^k$  型の完全対称テンソルである。

$$\begin{aligned} P_{G[1,2N-1]} &= [P_{[1,1]}, P_{[1,2]}, \dots, P_{[1,2N-1]}] \\ V(t) &= \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{k+1} x^T P_{[1,k]} x^{[k]} \end{aligned} \quad (12)$$

一方、式(11)を、式(9)に代入し、式(13)を得る。

$$u = -R^{-1} B^T P_{G[1,2N-1]} G^{[2N-1]}(x) \quad (13)$$

式(7)のハミルトニアン  $H$  に式(11)の  $s$  および式(13)の  $u$  を代入すると、ハミルトン・ヤコビの方程式(14)が得られる。

$$H + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

$V$  は  $t$  を陽に含まないのので式(15)が得られる。

$$\begin{aligned} & G^{[2N-1]T}(x) \{ Q_{G[2N-1,2N-1]} \\ & - P_{G[1,2N-1]}^T B R^{-1} B^T P_{G[1,2N-1]} \\ & + A_{G[1,2N-1]}^T P_{G[1,2N-1]} \\ & + P_{G[1,2N-1]}^T A_{G[1,2N-1]} \} G^{[2N-1]}(x) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

これより、 $P_{G[1,2N-1]}$  についての代数方程式として式(16)を得る。

$$\begin{aligned} & A_{G[1,2N-1]}^T P_{G[1,2N-1]} + P_{G[1,2N-1]}^T A_{G[1,2N-1]} \\ & - P_{G[1,2N-1]}^T B R^{-1} B^T P_{G[1,2N-1]} \\ & + Q_{G[2N-1,2N-1]} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)は線形レギュレータのリカッチ方程式に対して形が類似しているため、拡張リカッチ方程式と呼ぶことにする。式(16)は任意の $\mathbf{x}$ について式(15)を満たすための十分条件であるが、必要条件ではない。式(16)は $n$ 変数 $\mathbf{x}$ について最低次数が2次で最高次数が $4N-2$ 次の多項式であるから独立な項の総数は式(17)の $N_{eq}$ で与えられ、また $\mathbf{P}_{G[1,2N-1]}$ の独立な要素の個数は式(18)の $N_{va}$ になる。

$$N_{eq} = \sum_{k=2}^{4N-2} n H_k = n+4N-2 C_{4N-2} - (n+1) \quad (17)$$

$$N_{va} = \sum_{k=2}^{2N} n H_k = n+2N C_{2N} - (n+1) \quad (18)$$

式(16)を満たす必要十分な係数方程式は $N_{eq}$ 本であるが、一方、変数は $N_{va}$ 個である。 $N \geq 2$ の時、一般に $N_{eq} > N_{va}$ であるので、変数の数より方程式の数の方が多い。そこで本稿では $\mathbf{P}_{G[1,2N-1]}$ を与え条件を満たす $\mathbf{Q}_{G[2N-1,2N-1]}$ を求め、式(15)を満たす解とする。

#### 4. 評価関数

式(12)の $\mathbf{V}(t)$ は $\mathbf{x}$ についての $2N$ 次多項式であるから、正方荷重行列 $\tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]}$ を用いて式(19)で表記できる。

$$\mathbf{V}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^{T[N]}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]} \mathbf{G}^{[N]}(\mathbf{x}) \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{[1,1]}^{(1,1)} & \tilde{\mathbf{P}}_{[1,2]}^{(1,2)} & \cdots & \tilde{\mathbf{P}}_{[1,N]}^{(1,N)} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{[2,1]}^{(2,1)} & \tilde{\mathbf{P}}_{[2,2]}^{(2,2)} & \cdots & \tilde{\mathbf{P}}_{[2,N]}^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{P}}_{[N,1]}^{(N,1)} & \tilde{\mathbf{P}}_{[N,2]}^{(N,2)} & \cdots & \tilde{\mathbf{P}}_{[N,N]}^{(N,N)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$\tilde{\mathbf{P}}_{[i,j]}^{(i,j)}$  ( $n^i \times n^j$ ):  $\tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]}$  の $(i,j)$ ブロックに位置する $(i,j)$ 型完全対称テンソル

完全対称テンソルは相互に型変換が可能であり、式(21)のようにできる。

$$\mathbf{x}^{T[i]} \tilde{\mathbf{P}}_{[i,j]}^{(i,j)} \mathbf{x}^{[j]} = \mathbf{x}^{T[i]} \tilde{\mathbf{P}}_{[1,i+j-1]}^{(i,j)} \mathbf{x}^{[i+j-1]} \quad (21)$$

上の式を使い、 $\mathbf{P}_{G[1,2N-1]}$ のブロック要素と $\tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]}$ のブロック要素との関係を求めると次のようになる。 $1 \leq k \leq N$ の場合、

$$\mathbf{P}_{[1,k]} = \frac{k+1}{2} \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{P}}_{[1,k]}^{(i,k-i+1)} \quad (22)$$

$N+1 \leq k \leq 2N-1$ の場合、

$$\mathbf{P}_{[1,k]} = \frac{k+1}{2} \sum_{i=k-N+1}^N \tilde{\mathbf{P}}_{[1,k]}^{(i,k-i+1)} \quad (23)$$

#### 5. 縮約形

クロネッカーべき $\mathbf{x}^{[k]}$ には同一の要素が含まれているので、独立な要素を辞書引順に並べたベクトルを $\mathbf{x}^{[k]}$ の縮約形と呼ぶことにして、 $\mathbf{x}^{(k)}$ で表す。 $\mathbf{x}^{(k)}$ の次元は $n H_k$ である。例として $n=2, k=2$ の場合、

$$\mathbf{x}^{[2]} = [x_1^2, x_1 x_2, x_2 x_1, x_2^2]^T \quad (24)$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = [x_1^2, x_1 x_2, x_2^2]^T \quad (25)$$

となる。これにしたがって式(2)のべき状態ベクトルの縮約形を式(26)で定義する。

$$\mathbf{G}^{(2N-1)} = [\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(2N-1)}]^T = [\mathbf{x}^{(i)}] \quad (26)$$

また、共変対称テンソル $\mathbf{A}_{[1,k]}$ に対して式(27)を満たす行列 $\mathbf{A}_{(1,k)}$ が存在する。

$$\mathbf{A}_{[1,k]} \mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{A}_{(1,k)} \mathbf{x}^{(k)} \quad (27)$$

$\mathbf{A}_{(1,k)}$ :  $n \times n H_k$ は $\mathbf{A}_{[1,k]}$ の縮約形である。

式(2)の $\mathbf{A}_{G[1,k]}$ に対する縮約形を式(28)で定義する。

$$\mathbf{A}_{G(1,k)} = [\mathbf{A}_{(1,1)}, \mathbf{A}_{(1,2)}, \dots, \mathbf{A}_{(1,k)}] \quad (28)$$

以上により、式(1)の縮約形表示は以下のように表れられる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{G(1,2N-1)} \mathbf{G}^{(2N-1)} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (29)$$

制御入力 $\mathbf{u}$ の縮約形表示は式(30)となり、同様にハミルトンヤコビ方程式は式(31)となる。

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{G(1,2N-1)} \mathbf{G}^{(2N-1)}(\mathbf{x}) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}^{(2N-1)T}(\mathbf{x}) \{ \mathbf{Q}_{G(2N-1,2N-1)} \\ & - \mathbf{P}_{G(1,2N-1)}^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{G(1,2N-1)} \\ & + \mathbf{A}_{G(1,2N-1)}^T \mathbf{P}_{G(1,2N-1)} \\ & + \mathbf{P}_{G(1,2N-1)}^T \mathbf{A}_{G(1,2N-1)} \} \mathbf{G}^{(2N-1)}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\mathbf{Q}_{G(2N-1,2N-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{(1,1)} & \mathbf{Q}_{(1,2)} & \cdots & \mathbf{Q}_{(1,2N-1)} \\ \mathbf{Q}_{(2,1)} & \mathbf{Q}_{(2,2)} & \cdots & \mathbf{Q}_{(2,2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{(2N-1,1)} & \mathbf{Q}_{(2N-1,2)} & \cdots & \mathbf{Q}_{(2N-1,2N-1)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$\mathbf{Q}_{(2N-1,2N-1)}$ は $\mathbf{Q}_{(i,j)}$ をブロック要素とする行列である。拡張リカッチ方程式の縮約形は式(33)となる。縮約形で行列を扱うことにより次元が小さくなり計算に便利である。

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}_{G(2N-1,2N-1)} \\ & + \mathbf{A}_{G(1,2N-1)}^T \mathbf{P}_{G(1,2N-1)} \\ & + \mathbf{P}_{G(1,2N-1)}^T \mathbf{A}_{G(1,2N-1)} \\ & - \mathbf{P}_{G(1,2N-1)}^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{G(1,2N-1)} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

## 6. 安定性

式(19)に対して式(4)より $\dot{\mathbf{V}}(t)$ は式(34)で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(t) = & -\frac{1}{2} \mathbf{G}^{T[2N-1]}(\mathbf{x}) \{ \mathbf{Q}_{G(2N-1,2N-1)} \\ & + \mathbf{P}_{G(1,2N-1)}^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{G(1,2N-1)} \\ & \} \mathbf{G}^{[2N-1]}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (34)$$

式(19)においてゼロでない任意の $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{V}(t) > 0$ である場合、 $\tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]} > 0$ と記すことにする。

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}^{T[N]}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]} \mathbf{G}^{[N]}(\mathbf{x}) > 0 \\ & \Rightarrow \tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]} > 0 \quad (\mathbf{x} \neq 0) \end{aligned} \quad (35)$$

式(19),(34)の $\mathbf{V}(t), \dot{\mathbf{V}}(t)$ において $\mathbf{R}$ が正定であるので $\tilde{\mathbf{P}}_{G[N,N]}, \mathbf{Q}_{G[2N-1,2N-1]}$ が正定であれば、 $\mathbf{x}(\mathbf{x} \neq 0)$ に対して $\mathbf{V}(t) > 0, \dot{\mathbf{V}}(t) < 0$ となる。これは閉ループ系が大域的に安定であることを意味する。縮約形で示せば、

$$\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)} > 0, \quad \mathbf{Q}_{G(2N-1,2N-1)} > 0 \quad (36)$$

## 7. 最簡形式

$\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}$ を与えて $\mathbf{P}_{G(1,2N-1)}$ を実現するには $\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}$ の与え方に任意性がある。ゆえに、出来るだけ簡単な方が望ましい。本稿では、 $\tilde{\mathbf{P}}_{(i,i-1)}^{(i,i-1)}, \tilde{\mathbf{P}}_{(i,i)}^{(i,i)}, \tilde{\mathbf{P}}_{(i,i+1)}^{(i,i+1)}$ 以外をゼロとおくことにする。この場合、 $\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}$ は式(37)のブロックバンド行列で与えられる。

$$\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{(1,1)}^{(1,1)} & \tilde{\mathbf{P}}_{(1,2)}^{(1,2)} & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_{(2,1)}^{(2,1)} & \tilde{\mathbf{P}}_{(2,2)}^{(2,2)} & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \tilde{\mathbf{P}}_{(N-1,N)}^{(N-1,N)} \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{P}}_{(N,N-1)}^{(N,N-1)} & \tilde{\mathbf{P}}_{(N,N)}^{(N,N)} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$\mathbf{P}_{G(1,2N-1)}$ と $\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}$ とのブロック行列の対応は以下のようなになる。

$$\mathbf{P}_{(1,2r-1)} = r \tilde{\mathbf{P}}_{(1,2r-1)}^{(r,r)} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(1,2r)} &= \frac{2r+1}{2} (\tilde{\mathbf{P}}_{(r,2r)}^{(r,r+1)} + \tilde{\mathbf{P}}_{(1,2r)}^{(r+1,r)}) \\ &= (2r+1) \tilde{\mathbf{P}}_{(r,r+1)}^{(r,r+1)} \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、式(37)を $\{\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}\}$ と表す。 $\{\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}\}$ は3重ブロックバンド行列になるが、このうち対角成分から遠い要素を出来るだけゼロにおいて簡略化できる。そのようにして構成した $\{\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}\}$ を $\langle \{\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}\} \rangle$ とする。 $\{\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}\}$ を第1最簡形式、 $\langle \{\tilde{\mathbf{P}}_{G(N,N)}\} \rangle$ を第2最簡形式と呼ぶことにする。

## 8. GAへの適用

$\langle \{P_{G(1,2N-1)}\} \rangle$ の独立な要素をGAへの変数とする。

$\langle \{\tilde{P}_{G(N,N)}\} \rangle$ は式(38)、(39)より変換でき、

$\langle \{Q_{G(2N-1,2N-1)}\} \rangle$ は下式より求められる。

$$\begin{aligned} & \langle \{Q_{G(2N-1,2N-1)}\} \rangle = \\ & \langle \{P_{G(1,2N-1)}^T B R^{-1} B^T P_{G(1,2N-1)} \\ & - A_{G(1,2N-1)}^T P_{G(1,2N-1)} \\ & - P_{G(1,2N-1)}^T A_{G(1,2N-1)}\} \rangle \end{aligned} \quad (40)$$

また、GAの適合度関数として

$\langle \{Q_{G(2N-1,2N-1)}\} \rangle, \langle \{\tilde{P}_{G(N,N)}\} \rangle$ の主座小行列式の最小値と定義する。

$$f_Q = \min\{D_1, D_2, \dots, D_{N_Q}\} \quad (41)$$

$$f_P = \min\{D'_1, D'_2, \dots, D'_{N_P}\} \quad (42)$$

$$N_Q = \sum_{n=1}^{2N-1} n H_k = n+2N-1 C_{2N-1} - 1 \quad (43)$$

$$N_P = \sum_{n=1}^N n H_k = n+N C_N - 1 \quad (44)$$

$$f = \min\{f_Q, f_P\} \quad (45)$$

$$f \rightarrow \max \quad (46)$$

$\langle \{Q_{G(2N-1,2N-1)}\} \rangle, \langle \{\tilde{P}_{G(N,N)}\} \rangle$ のすべての主座小行列式が正になれば大域的に安定な非線形レギュレーターが設計できる。

## 9. 計算例

$n=3, m=1, N=2$ の場合について制御入力 $u$ を設計する。状態方程式、制御入力、評価関数はおのおの式(47)(48)(49)となる。なお表示は縮約形のみとした。

$$\dot{x} = A_{G(1,3)} G^{(3)} + B u \quad (47)$$

$$u = -R^{-1} B^T P_{G(1,3)} G^{(3)}(x) \quad (48)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} (G^{T(3)}(x) Q_{G(3,3)} G^{(3)}(x)$$

$$\begin{aligned} & + u^T R u) dt \\ & = \frac{1}{2} G^{T(2)}(x) \tilde{P}_{G(2,2)} G^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (49)$$

べき状態ベクトルは式(50)となる。

$$\begin{aligned} G^{T(3)} = & [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_1^2 \ x_1 x_2 \ x_1 x_3 \ x_2^2 \\ & x_2 x_3 \ x_3^2 \ x_1^3 \ x_1^2 x_2 \ x_1^2 x_3 \ x_1 x_2^2 \ x_1 x_2 x_3 \\ & x_1 x_3^2 \ x_2^3 \ x_2^2 x_3 \ x_2 x_3^2 \ x_3^3] \end{aligned} \quad (50)$$

拡張リカッチ方程式の解は式(51)となる。

$$\begin{aligned} & P_{G(1,3)} \\ & = \begin{bmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 & p_{11}^1 & 2p_{12}^1 & 2p_{13}^1 & p_{22}^1 & 2p_{23}^1 & p_{33}^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_{11}^2 & 2p_{12}^2 & 2p_{13}^2 & p_{22}^2 & 2p_{23}^2 & p_{33}^2 \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & p_{11}^3 & 2p_{12}^3 & 2p_{13}^3 & p_{22}^3 & 2p_{23}^3 & p_{33}^3 \\ p_{111}^1 & 3p_{112}^1 & 3p_{113}^1 & 3p_{122}^1 & 6p_{123}^1 & 3p_{133}^1 & p_{222}^1 & & \\ p_{111}^2 & 3p_{112}^2 & 3p_{113}^2 & 3p_{122}^2 & 6p_{123}^2 & 3p_{133}^2 & p_{222}^2 & & \\ p_{111}^3 & 3p_{112}^3 & 3p_{113}^3 & 3p_{122}^3 & 6p_{123}^3 & 3p_{133}^3 & p_{222}^3 & & \\ 3p_{223}^1 & 3p_{233}^1 & p_{333}^1 & & & & & & \\ 3p_{223}^2 & 3p_{233}^2 & p_{333}^2 & & & & & & \\ 3p_{223}^3 & 3p_{233}^3 & p_{333}^3 & & & & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

リアプノフ関数の荷重行列 $\tilde{P}_{G(2,2)}$ の第1最簡形式は縮約形と同じであり、第2最簡形式は式(52)、(53)、(54)となる。

$$\begin{aligned} & \langle \{\tilde{P}_{G(2,2)}\} \rangle = \\ & \left[ \begin{array}{l} \langle \{\tilde{P}_{(1,1)}^{(1,1)}\} \rangle < \{\tilde{P}_{(1,2)}^{(1,2)}\} \rangle \\ \langle \{\tilde{P}_{(2,1)}^{(2,1)}\} \rangle < \{\tilde{P}_{(2,2)}^{(2,2)}\} \rangle \end{array} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

$$\langle \{\tilde{P}_{(1,1)}^{(1,1)}\} \rangle = \begin{bmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \langle \{\tilde{P}_{(1,2)}^{(1,2)}\} \rangle = \langle \{\tilde{P}_{(2,1)}^{T(2,1)}\} \rangle = \\ & \frac{1}{3} \begin{bmatrix} p_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3p_{12}^1 & 3p_{22}^1 & 0 & p_{22}^2 & 0 & 0 \\ 3p_{13}^1 & 6p_{23}^1 & 3p_{33}^1 & 3p_{23}^2 & 3p_{33}^2 & p_{33}^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{P}_{(2,2)}^{(2,2)} = \frac{1}{2} \times \\ & \begin{bmatrix} p_{11}^{11} & 2p_{12}^{11} & 2p_{13}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 2p_{12}^{11} & 6p_{12}^{12} & 6p_{13}^{12} & 2p_{22}^{12} & 0 & 0 \\ 2p_{13}^{11} & 6p_{13}^{12} & 6p_{13}^{13} & 6p_{22}^{13} & 6p_{23}^{13} & 2p_{33}^{13} \\ 0 & 2p_{22}^{12} & 6p_{22}^{13} & p_{22}^{22} & 2p_{23}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 6p_{23}^{13} & 2p_{23}^{22} & 6p_{23}^{23} & 2p_{33}^{23} \\ 0 & 0 & 2p_{33}^{13} & 0 & 2p_{33}^{23} & p_{33}^{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

$Q_{G(3,3)}$ については次のようになる。

$$\langle \{Q_{G(3,3)}\} \rangle = \begin{bmatrix} Q_{(1,1)} & Q_{(1,2)} & 0 \\ Q_{(2,1)} & 3Q_{(2,2)} & Q_{(2,3)} \\ 0 & Q_{(3,2)} & Q_{(3,3)} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$Q_{(1,1)} = \begin{bmatrix} q_1^1 & q_2^1 & q_3^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 \\ q_1^3 & q_2^3 & q_3^3 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$Q_{(1,2)} = Q_{(2,1)}^T = \begin{bmatrix} q_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3q_{12}^1 & 3q_{22}^1 & 0 & q_{22}^2 & 0 & 0 \\ 3q_{13}^1 & 6q_{23}^1 & 3q_{33}^1 & 3q_{23}^2 & 3q_{33}^2 & q_{33}^3 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$Q_{(2,2)} = \begin{bmatrix} q_{11}^{11} & 2q_{12}^{11} & 2q_{13}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 2q_{12}^{11} & 6q_{12}^{12} & 6q_{13}^{12} & 2q_{22}^{12} & 0 & 0 \\ 2q_{13}^{11} & 6q_{13}^{12} & 6q_{13}^{13} & 6q_{22}^{13} & 6q_{23}^{13} & 2q_{33}^{13} \\ 0 & 2q_{22}^{12} & 6q_{22}^{13} & q_{22}^{22} & 2q_{23}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 6q_{23}^{13} & 2q_{23}^{22} & 6q_{23}^{23} & 2q_{33}^{23} \\ 0 & 0 & 2q_{33}^{13} & 0 & 2q_{33}^{23} & q_{33}^{33} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$Q_{(2,3)} = \begin{bmatrix} q_{111}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5q_{112}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5q_{113}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19q_{122}^{11} & 10q_{222}^{11} & 0 & 3q_{222}^{12} & 0 \\ 20q_{123}^{11} & 23q_{223}^{11} & 0 & 26q_{223}^{12} & 0 \\ 10q_{133}^{11} & 33q_{233}^{11} & 13q_{333}^{11} & 26q_{233}^{12} & 25q_{333}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{222}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5q_{223}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 4q_{333}^{13} & 10q_{233}^{22} & 10q_{333}^{22} & 5q_{333}^{23} & 1q_{333}^{33} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$Q_{(3,3)} =$$

$$\begin{bmatrix} q_{111}^{11} & 3q_{112}^{11} & 3q_{113}^{11} & 0 & 0 \\ 3q_{112}^{11} & 15q_{112}^{12} & 15q_{113}^{12} & 10q_{222}^{11} & 0 \\ 3q_{113}^{11} & 15q_{113}^{12} & 15q_{113}^{13} & 30q_{122}^{13} & 30q_{123}^{13} \\ 0 & 10q_{222}^{11} & 30q_{122}^{13} & 15q_{122}^{22} & 30q_{123}^{22} \\ 0 & 0 & 30q_{123}^{13} & 30q_{123}^{22} & 90q_{123}^{23} \\ 0 & 0 & 10q_{133}^{13} & 0 & 30q_{133}^{23} \\ 0 & 0 & 0 & 3q_{222}^{22} & 15q_{222}^{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10q_{133}^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3q_{222}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 30q_{133}^{23} & 15q_{222}^{23} & 0 & 0 & 0 \\ 15q_{133}^{33} & 30q_{222}^{33} & 30q_{223}^{33} & 15q_{233}^{33} & 3q_{333}^{33} \\ 30q_{222}^{33} & q_{222}^{22} & 3q_{223}^{22} & 0 & 0 \\ 30q_{223}^{33} & 3q_{223}^{22} & 15q_{223}^{23} & 10q_{233}^{23} & 0 \\ 15q_{233}^{33} & 0 & 10q_{233}^{23} & 15q_{233}^{23} & 3q_{333}^{23} \\ 3q_{333}^{33} & 0 & 0 & 3q_{333}^{23} & q_{333}^{33} \end{bmatrix} \quad (61)$$

実際に以下の数値例で、シミュレーションしてみる。

$$A_G = \begin{bmatrix} -2.0 & 1.1 & 0.3 & 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.9 & -5.0 & 0.4 & 0.5 & 1.2 & 0.7 \\ 1.1 & 0.2 & -3.0 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 & 0.3 & -0.7 & 1.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & -6.0 & 0.6 & 0.9 & -0.4 \\ -0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 0.5 & -2.1 & 0.8 & 0.9 & 0.3 \\ 0.9 & 0.1 & 0.5 & 0.9 & 0.4 & 0.6 & 1.0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (62)$$

また、GAの主なパラメーターは、以下に記す。

1つの遺伝子は16bit × 31, 発生個数は10,  $P_G$ の独立な個数は31, 各要素の範囲は-6.5536 ~ 6.5535の0.0001刻み。エリート保存選択の個数は1, 突然変異確率は9.0%。一様交叉、ランク戦略を使用。

このときのGAによる算出 $P_G$ は(63)式となる。

これに対する応答をFig.1に示す。

$$P_G = \begin{bmatrix} 1.6821 & 2.6240 & 0.5527 & -2.4408 \\ 2.6240 & 1.4289 & 2.1467 & 1.1510 \\ 0.5527 & 2.1467 & -1.7255 & -1.4317 \\ 2.3020 & -2.8634 & -0.8587 & -0.2346 \\ -1.7174 & -0.2346 & -1.9491 & -1.5980 \\ -0.2346 & -4.5464 & -0.7990 & -2.6814 \\ -2.2732 & 1.5749 & -8.2893 & -3.8139 \\ -1.3407 & -2.7631 & -0.2373 & 4.4694 \\ 1.8735 & -1.2713 & 4.4694 & 8.6574 \\ -0.2373 & 8.9388 & 8.6574 & -2.3591 \\ -7.0773 & 5.9478 & -2.3523 & 1.5974 \\ 2.9739 & -4.7046 & 2.9565 & 2.0429 \\ 2.9739 & -2.3523 & 0.9855 & \\ 6.1287 & -3.6123 & 2.2099 & \\ -3.6123 & 6.6297 & 2.4732 & \end{bmatrix} \quad (63)$$

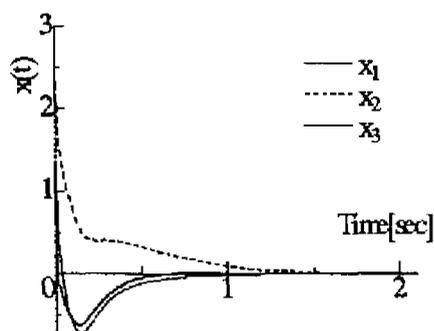


Fig. 1 Responses of nonlinear regulator

## 10. おわりに

シミュレーションよりべき状態ベクトルを用いた非線形レギュレータが設計できたことを確認した。また、荷重行列 $A_G, B_G$ をランダムに与えても解が必ず存在するわけではないことに注意したい。

## 参考文献

- 1) 大久保重範：遺伝的アルゴリズムによる非線形レギュレータの設計，計測自動制御学会東北支部第156回研究会集會資料,156-19, (1995)
- 2) 志水清孝：最適制御の理論と計算法,105/110,コロナ社(1994)
- 3) 坂和正敏,田中雅博：遺伝的アルゴリズム,13/30,朝倉書店(1995)